INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES NO LOCALES ESPACIOS DE SOBOLEV FRACCIONARIOS

JULIÁN FERNÁNDEZ BONDER

Resumen. En estas notas haremos una introducción muy básica al cálculo fraccionario y a las ecuaciones no locales. Nos enfocaremos casi exclusivamente al operador fraccionario $(-\Delta)^s$ y a los espacios de Sobolev asociados, los espacios H^s.

Índice

1. Introducción

En estas notas haremos una introducción a las ecuaciones diferenciales no locales. este tipo de ecuaciones aparece muy naturalmente cuando se consideran fenómenos difusivos de largo rango.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35R11, 35B27.
Key words and phrases. Fractional partial differential equations, homogenization.

Entre este tipo de ecuaciones, el opererador fraccionario $(-\Delta)^s$ juega un rol preponderante debido a las numerosas aplicaciones en donde aparece y por las propiedades regularizantes que el mismo tiene [5, 6, 7].

Algunas de las aplicaciones donde aparece este tipo de ecuaciones es en algunos modelos físicos [11, 13, 16, 19, 23, 26], finanzas [1, 20, 25], dinámica de fluidos [8, 9], ecología [18, 21, 24] y procesamiento de imágenes [17].

1.1. Motivación. Se quiere modelar la evolución de un fenómeno de difusión de una cierta sustancia que tiene densidad $u = u(x,t)$. Luego, se hace la suposición de que la difución viene dada por una cierta transición de probabilidad $\rho = \rho(x,y)$, donde $\rho(x,y)$ mide la proporción de partículas que están en la posición y y que pasan a la posición x por unidad de tiempo.

Se supone que se tiene una fuente $f = f(x,t)$ que indica la cantidad de partículas que se agregan a la posición x a tiempo t por unidad de tiempo.

Luego, la ecuación que modela la evolución viene dada por

$$u_t(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x,y)u(y,t)\,dy - \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y,x)u(x,t)\,dy + f(x,t). \tag{1.1}$$

Es decir, la variación de la densidad de partículas en la posición x a tiempo t es la cantidad de partículas que llegan a la posición x por unidad de tiempo, menos la cantidad de partículas que se van de x por unidad de tiempo más la cantidad de partículas que la fuente agrega en x por unidad de tiempo.

Observemos que la transición de probabilidad ρ debe verificar

$$1 = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y,x)\,dy.$$

Luego, (1.1) se transforma en

$$u_t(x,t) = -\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x,t) - u(y,t))\,dy + f(x,t). \tag{1.2}$$

A partir de esta ecuación, Einstein en su clásico trabajo sobre movimientos Brownianos [12] dedujo que, si se asume que el núcleo ρ tiene interacciones de corto alcance, tomando el límite cuando ese rango de interacción tiende a cero, las soluciones de la ecuación (1.2) convergen a las soluciones de la ecuación del calor.

En estas notas no haremos esta suposición, sino que asumiremos que ρ admite interacciónes de largo alcance.

Así mismo, fundamentalmente nos dedicaremos al estudio del problema estacionario de (1.2), es decir, estudiaremos el problema

$$\mathcal{L}u(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x) - u(y))\,dy = f(x), \tag{1.3}$$

y sólo sobre el final estudiaremos muy someramente el problema de evolución (1.2).

1.2. Decaimiento de ρ. Si bien resulta natural suponer que ρ tiene un cierto decaimiento cuando $|x-y| \to \infty$ supondremos que ese decaimiento viene dado en forma de potencia. Es decir, asumiremos que

$$\rho(x,y) \sim \frac{1}{|x-y|^\alpha} \quad \text{si } |x-y| \to \infty. \tag{1.4}$$

Así mismo, es natural suponer que ρ tiene una singularidad cuando $x = y$. Luego, asumiremos que (1.4) es también cierta cuando $|x - y| \to 0$.

Debido a la singularidad de la función ρ, para que el operador $\mathcal{L}$ esté bien definido la integral tiene que entenderse en el sentido del *valor principal*. Esto es

$$\mathcal{L}u(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x) - u(y))\, dy = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \rho(x,y)(u(x) - u(y))\, dy$$

Aún así, para que esta integral esté bien definida es necesario que el parámetro α esté limitado.

En efecto, supongamos que u está acotada, luego

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(x)} \rho(x,y)|u(x) - u(y)|\, dy &\le C\|u\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^\alpha}\, dy \\ &= C\|u\|_\infty N\omega_N \int_1^\infty r^{-\alpha} r^{N-1}\, dr \\ &= \begin{cases} C\|u\|_\infty \frac{N\omega_N}{(\alpha - N)} & \text{si } \alpha > N \\ \infty & \text{si } \alpha \le N, \end{cases} \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\alpha > N$.

Por otro lado, asumamos que $\rho(x,y) = \rho(|x-y|)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{B_1(x)\setminus B_\varepsilon(x)} \rho(|x-y|)(u(x) - u(y))\, dy &= \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \rho(|z|)(u(x) - u(x-z))\, dz \\ &= \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \rho(|z|)(u(x) - u(x+z))\, dz. \end{aligned}$$

Luego la última integral es igual a

$$-\frac{1}{2} \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \rho(|z|)(u(x+z) - 2u(x) + u(x-z))\, dz. \tag{1.5}$$

Si suponemos que $u \in C^2$, se tiene entonces que

$$|u(x+z) - 2u(x) + u(x-z)| \le C|z|^2. \tag{1.6}$$

Luego, de (1.5) y (1.6), se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_1(x)\setminus B_\varepsilon(x)} \rho(|x-y|)(u(x) - u(y))\, dy \right| &\le C \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} |z|^{2-\alpha}\, dz \\ &= C \int_\varepsilon^1 r^{1-\alpha+N}\, dr \\ &= \begin{cases} C(1 - \varepsilon^{2-\alpha+N}) & \text{si } \alpha \ne N+2 \\ C \log|\varepsilon| & \text{si } \alpha = N+2, \end{cases}. \end{aligned}$$

Luego, si $\alpha < N + 2$ el límite $\varepsilon \downarrow 0$ es finito.

Esto nos da la restricción

$$N < \alpha < N + 2.$$

Es habitual usar la notación $\alpha = N + 2s$ lo que da la restricción

$$0 < s < 1.$$

Resumamos lo hecho hasta ahora en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea* $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$|\rho(t)| \le \frac{C}{|t|^{N+2s}}, \quad 0 < s < 1,$$

Sea $\mathcal{L}$ *el operador definido como*

$$\mathcal{L}u(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^N} \rho(|x-y|)(u(x) - u(y))\, dy.$$

Entonces este operador está bien definido para $u \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *y se puede calcular mediante la expresión*

$$\mathcal{L}u(x) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \rho(|z|)(u(x+z) - 2u(x) + u(x-z))\, dz.$$

2. Espacios de Sobolev fraccionarios

Queremos ahora dar una noción al operador $\mathcal{L}$ para funciones más generales, pagando eventualmente el costo de que la definición no será en un sentido puntual, sino en uno más débil.

2.1. Definición del espacio $H^s(\mathbb{R}^N)$. Podemos entonces preguntarnos, ¿para qué clase de funciones se tiene que $\mathcal{L}u$ define una función de L^2? O más generalmente, ¿para qué clase de funciones se tiene que $\mathcal{L}u$ define una distribución en $\mathcal{D}'$?

Para poder responder a estas preguntas, empecemos definiendo, para cada $\varepsilon > 0$ los operadores $\mathcal{L}_\varepsilon$ de la forma

$$\mathcal{L}_\varepsilon u(x) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \rho(x,y)(u(x) - u(y))\, dy.$$

Obviamente, se tiene que $\mathcal{L}_\varepsilon u \to \mathcal{L}u$ y en qué sentido se tenga ese límite determinará en qué sentido está definido $\mathcal{L}u$.

Veamos entonces cuándo $\mathcal{L}_\varepsilon u \in L^2$.

De la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_\varepsilon u(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} |\rho(x,y)||u(x) - u(y)|\, dy \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} |\rho(x,y)|\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\rho(x,y)|(u(x) - u(y))^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\varepsilon^{-s} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dy\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

donde hemos usado la cota $|\rho(x,y)| \le C|x-y|^{-(N+2s)}$.

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{L}_\varepsilon u|^2\, dx \le C\varepsilon^{-2s} \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dxdy. \tag{2.1}$$

A la integral doble que aparece al lado derecho se lo conoce como la *seminorma de Gagliardo*. Usaremos la siguiente notación:

$$[u]_s := \left(\iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dxdy \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Esto motiva la definición siguiente.

Definición 2.1. Dado $0 < s < 1$ se define el espacio de Sobolev fraccionario como

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) \colon [u]_s < \infty\}.$$

Este espacio tiene una estructura *natural* de espacio de Hilbert. En efecto, si definimos el producto interno

$$[u,v]_s := \int_{\mathbb{R}^N} uv\, dx + \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}\, dxdy, \tag{2.3}$$

no es difícil probar que $(H^s(\mathbb{R}^N), [\cdot,\cdot]_s)$ es un espacio de Hilbert. La norma inducida por ese producto interno es

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= [u,u]_s^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2\, dx + \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\|u\|_2^2 + [u]_s^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Observación 2.2. Del Teorema 1.1 se desprende que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N)$.

De hecho $C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N)$.

En resumen, hemos probado el siguiente lema.

Lema 2.3. *Sea $0 < s < 1$ y sea $\rho \colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que $|\rho(x,y)| \le C|x-y|^{-(N+2s)}$.*

Dado $\varepsilon > 0$ se define el operador

$$\mathcal{L}_\varepsilon u(x) = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \rho(x,y)(u(x)-u(y))\, dy.$$

Luego, si $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ tenemos que $\mathcal{L}_\varepsilon u \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

La estimación (2.1) explota cuando $\varepsilon \downarrow 0$ por lo que no nos permite concluir nada acerca del límite.

Dado que queremos mantener la identificación de $L^2(\mathbb{R}^N)$ con su espacio dual, no resulta conveniente (de hecho sería erróneo) identificar $H^s(\mathbb{R}^N)$ con su espacio dual. El espacio dual de $H^s(\mathbb{R}^N)$ se lo denota por $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$. Es decir,

$$H^{-s}(\mathbb{R}^N) := \left\{ f \colon H^s(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R} \colon f \text{ es lineal y } \sup_{v \in H^s(\mathbb{R}^N)} \frac{\langle f, v\rangle}{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}} < \infty \right\}.$$

En $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ la norma se define como

$$\|f\|_{-s} = \sup \left\{ \langle f, v\rangle \colon v \in H^s(\mathbb{R}^N),\ \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \le 1 \right\}.$$

2.2. Límite $\mathcal{L}_\varepsilon \to \mathcal{L}$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$. Para estudiar el límite $\varepsilon \downarrow 0$ debemos entonces debilitar el espacio en donde se trabaja.

Observemos que si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ entonces f induce una distribución en $\mathcal{D}'$ de la forma

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi\,dx, \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D} = C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Por otro lado, recordemos que si $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{D}'$, decimos que $T_\varepsilon \to T$ en $\mathcal{D}'$ si

$$\langle T_\varepsilon, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}$.

En consecuencia, debemos probar que existe el límite $\langle \mathcal{L}_\varepsilon u, \varphi\rangle$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}$.

Pero

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_\varepsilon u, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{L}_\varepsilon u\varphi\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(x)} \rho(x,y)(u(x)-u(y))\varphi(x)\,dydx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(x)} \rho(y,x)(u(y)-u(x))\varphi(y)\,dydx,
\end{aligned}$$

donde hemos realizado el cambio de variables $x \leftrightarrow y$.

Asumamos ahora que $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, entonces obtenemos

$$\langle \mathcal{L}_\varepsilon u, \varphi\rangle = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(x)} \rho(x,y)(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\,dxdy.$$

Usando la Observación 2.2 y la cota para ρ, es fácil ver que el integrando

$$\rho(x,y)(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y)) \in L^1(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N).$$

Luego, por el Teorema de Convergencia Mayorada se concluye que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}u, \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\langle \mathcal{L}_\varepsilon u, \varphi\rangle\\
&= \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\,dxdy
\end{aligned}$$

y de esta expresión se deduce adicionalmente que

$$|\langle \mathcal{L}u, \varphi\rangle| \le C[u]_s[\varphi]_s. \tag{2.4}$$

Es decir, se observa que $\mathcal{L}u \in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$.

Resumamos todo esto en un teorema.

Teorema 2.4. *Sea $0 < s < 1$ y sea $\rho\colon \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ y*

$$|\rho(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^{N+2s}}.$$

Definamos el operador $\mathcal{L}u$ como

$$\mathcal{L}u(x) := v.p. \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x)-u(y))\,dy.$$

Entonces $\mathcal{L}\colon H^s(\mathbb{R}^N) \to H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ resulta ser un operador lineal y continuo.

Finalmente se tiene la expresión

$$\langle \mathcal{L}u, v\rangle = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x)-u(y))(v(x)-x(y))\,dxdy.$$

3. Condiciones de contorno

Usualmente uno tiene el sistema contenido en una cierta región del espacio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (acotada o no). Luego, resulta natural asumir que fuera de esa región la densidad de partículas es 0, con lo cual $u(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Esto motiva la definición:

Definición 3.1. Sea $0 < s < 1$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Se define el conjunto $H_0^s(\Omega)$ como

$$H_0^s(\Omega) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^N)\colon u(x) = 0 \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}.$$

Luego, el problema que intentaremos resolver es encontrar una función $u \in H_0^s(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $f \in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$. Esto significa:

Definición 3.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $0 < s < 1$. Sea $\rho\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ medible tal que existe $C > 0$ tal que $|\rho(x,y)| \le C|x-y|^{-(N+2s)}$.

Dada $f \in H^{-s}(\Omega)$ decimos que $u \in H_0^s(\Omega)$ es una solución débil de (3.1) si

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\,dxdy = \langle f, v\rangle, \tag{3.2}$$

para toda $v \in H_0^s(\Omega)$.

Observemos que si definimos

$$B[u,v] := \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\,dxdy, \tag{3.3}$$

entonces $B\colon H_0^s(\Omega)\times H_0^s(\Omega) \to \mathbb{R}$ define una forma bilineal y la ecuación (3.2) toma la forma abstracta

$$B[u,v] = \langle f, v\rangle. \tag{3.4}$$

Resulta entonces natural intentar aplicar el Teorema de Lax-Milgram para probar existencia y unicidad de solución.

Recordemos el Teorema de Lax-Milgram.

Teorema 3.3 (Lax-Milgram)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coersiva. Es decir $B[\cdot,\cdot]$ es lineal en cada variable y existen constantes $0 < \theta < \Lambda < \infty$ tales que*

$$|B[u,v]| \le \Lambda\|u\|\|v\| \quad y \quad B[u,u] \ge \theta\|u\|^2,$$

para todo $u, v \in H$.

Entonces, dada $f \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que

$$B[u,v] = \langle f, v\rangle,$$

para todo $v \in H$.

De (2.4) se deduce fácilmente que la forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ definida en (3.3) es continua. Para poder aplicar el Teorema de Lax-Milgram resta entonces verificar la coersividad.

4. Desigualdad de Poincaré

Como dijimos anteriormente, resta chequear que la forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ definida en (3.3) es coersiva. Pero

$$\begin{aligned} B[u,u] &= \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x)-u(y))^2\,dxdy \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)|x-y|^{N+2s}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy. \end{aligned}$$

Luego, si asumimos que existe $\lambda>0$ tal que

$$\rho(x,y)|x-y|^{N+2s}\geq\lambda,$$

obtenemos

$$B[u,u]\geq\frac{\lambda}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy=\frac{\lambda}{2}[u]_s^2. \tag{4.1}$$

Para poder entonces concluir la coersividad de $B[\cdot,\cdot]$ es necesario que la seminorma de Gagliardo $[\,\cdot\,]_s$ controle a la norma en $H^s(\mathbb{R}^N)$, $\|\cdot\|_s$. Esto es posible obtenerlo para funciones en $H^s_0(\Omega)$ cuando Ω tiene medida finita, gracias a la desigualdad de Poincaré.

Veremos dos demostraciones de esta desigualdad. La primera es más elemental, pero requiere que Ω sea acotado. La segunda, algo más complicada, requiere sólo que Ω tenga medida finita.

Teorema 4.1 (Desigualdad de Poincaré, versión 1)**.** *Sean $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ acotado y $0<s<1$. Entonces existe $C>0$ que depende sólo de s,N y diam(Ω) tal que*

$$\|u\|_2\leq C[u]_s, \tag{4.2}$$

para toda $u\in H^s_0(\Omega)$.

Demostración. Dada $u\in H^s_0(\Omega)$, se tiene

$$\begin{aligned} [u]_s^2 &= \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dy\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}u^2(x)\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega}\frac{1}{|x-y|^{N+2s}}\,dy\right)dx. \end{aligned}$$

Luego debemos encontrar una cota inferior para el peso

$$\rho_\Omega(x):=\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega}\frac{1}{|x-y|^{N+2s}}\,dy. \tag{4.3}$$

Una cota inferior elemental para ρ_Ω se obtiene como sigue: si llamamos $d = \operatorname{diam}(\Omega)$, entonces para todo $x \in \Omega$ vale que $\Omega \subset B_d(x)$. Luego

$$\begin{aligned}\rho_\Omega(x) &\geq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_d(x)} \frac{1}{|x-y|^{N+2s}}\, dy \\ &= \int_{|z|\geq d} \frac{1}{|z|^{N+2s}}\, dy \\ &= \frac{N\omega_N}{2sd^{2s}}.\end{aligned}$$

Entonces si tomamos

$$C = \left(\frac{2s}{N\omega_N}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{diam}(\Omega)^s,$$

el teorema queda demostrado. □

El siguiente lema permite obtener una cota inferior del peso ρ_Ω asumiendo sólo que el conjunto Ω tiene medida finita. Luego implica de manera trivial la desigualdad de Poincaré en ese caso.

Lema 4.2. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de medida finita y $0 < s < 1$. Entonces*

$$\rho_\Omega(x) \geq \frac{c_0}{|\Omega|^{\frac{2s}{N}}},$$

donde $c_0 > 0$ depende sólo de s y N.

Demostración. Sea $r > 0$ tal que $|B_r(x)| = |\Omega|$. Es decir,

$$r = \left(\frac{|\Omega|}{\omega_N}\right)^{\frac{1}{N}}.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}|(\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \cap B_r(x)| &= |B_r(x)| - |\Omega \cap B_r(x)| \\ &= |\Omega| - |\Omega \cap B_r(x)| \\ &= |\Omega \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_r(x))|.\end{aligned}$$

Ahora bien

$$\rho_\Omega(x) = \int_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega)\cap B_r(x)} \frac{1}{|x-y|^{N+2s}}\, dy + \int_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega)\cap(\mathbb{R}^N\setminus B_r(x))} \frac{1}{|x-y|^{N+2s}}\, dy,$$

pero

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\Omega)\cap B_r(x)} \frac{1}{|x-y|^{N+2s}}\, dy &\geq \frac{|(\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \cap B_r(x)|}{r^{N+2s}} \\ &= \frac{|\Omega \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_r(x))|}{r^{N+2s}} \\ &\geq \int_{\Omega\cap(\mathbb{R}^N\setminus B_r(x))} \frac{1}{|x-y|^{N+2s}}\, dy.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\rho_\Omega(x) &\geq \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r(x)} \frac{1}{|x-y|^{N+2s}}\,dy\\ &= \int_{|z|\geq r} \frac{1}{|z|^{N+2s}}\,dy\\ &= \frac{N\omega_N}{2sr^{2s}} = \frac{N\omega_N^{1+\frac{2s}{N}}}{2s|\Omega|^{\frac{2s}{N}}}.\end{aligned}$$

Tomando entonces $c_0 = N\omega_N^{1+\frac{2s}{N}}(2s)^{-1}$, se concluye el resultado. □

Con la ayuda del Lema 4.2 se obtiene entonces la siguiente mejora del Teorema 4.1

Teorema 4.3 (Desigualdad de Poincaré, versión 2)**.** *Sean $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ de medida finita y $0<s<1$. Entonces existe $C>0$ que depende sólo de s, N y $|\Omega|$ tal que*

$$\|u\|_2 \leq C[u]_s, \tag{4.4}$$

para toda $u\in H_0^s(\Omega)$.

Demostración. La demostración es exactamente igual que la del Teorema 4.1 y se usa el Lema 4.2 para acotar el peso ρ_Ω dado por (4.3). □

Con la ayuda de la desigualdad de Poincaré (4.4) obtenemos que $[\,\cdot\,]_s$ resulta ser una norma equivalente a $\|\cdot\|_s$ para funciones de $H_0^s(\Omega)$.

Corolario 4.4. *Sean $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ de medida finita y $0<s<1$. Entonces*

$$[u]_s \leq \|u\|_s \leq (1+C^2)^{\frac12}[u]_s,$$

para toda $u\in H_0^s(\Omega)$, donde $C>0$ es la constante del Teorema 4.3.

5. Resolución del problema de Dirichlet

Con todos estos preliminares, ya es inmediato probar el teorema de existencia y unicidad del problema de Dirichlet para el operador $\mathcal{L}$.

Teorema 5.1. *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ de medida finita y $0<s<1$. Entonces, dada $f\in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$, existe una única $u\in H_0^s(\Omega)$ solución débil de*

$$\begin{cases}\mathcal{L}u = f & \text{en } \Omega\\ u=0 & \text{en } \mathbb{R}^N\setminus\Omega.\end{cases} \tag{5.1}$$

Demostración. Lo único que resta probar es que la forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ es coersiva. Pero esto es inmediato de la desigualdad (4.1) y del Corolario 4.4. □

6. El problema de evolución

Nos concentraremos ahora en el estudio del problema de evolución. Estudiaremos primero el problema

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{L}u = 0 & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0,\infty) \\ u = u_0 & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Usaremos el método de separación de variables, luego buscamos una solución $u(x,t) = w(x)v(t)$. Luego, dado que $\mathcal{L}$ es lineal y no depende de t, tenemos

$$v'(t)w(x) + v(t)\mathcal{L}w(x) = 0,$$

de donde

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = -\frac{\mathcal{L}w(x)}{w(x)} = -\lambda.$$

Fácilmente se deduce que $v(t) = e^{-\lambda t}$ y que w debe verificar

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = \lambda w & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{6.2}$$

Asumiremos que existen $0 < s < 1$ y constantes $0 < c < C < \infty$ tales que

$$c \leq \rho(x,y)|x-y|^{N+2s} \leq C. \tag{6.3}$$

Luego, de (6.3) es fácil deducir que si $w \in H_0^s(\Omega)$, $w \not\equiv 0$, verifica (6.2), entonces $\lambda > 0$. En efecto, observemos primero que si $f = \lambda w$, entonces $f \in H_0^s(\Omega) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ y tenemos

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(w(x)-w(y))(v(x)-v(y))\,dxdy = \langle f, v\rangle = \lambda\int_\Omega w(x)v(x)\,dx,$$

para toda $v \in H_0^s(\Omega)$. Luego, tomando $v = w$ y usando (6.3) se llega a

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(w(x)-w(y))^2\,dxdy}{\int_\Omega w^2\,dx} \geq c\frac{[w]_s^2}{\|w\|_2^2} > 0.$$

Luego, debemos estudiar el problema de *autovalores para el operador* $\mathcal{L}$ (6.2).

7. El problema de autovalores para $\mathcal{L}$

El objetivo de esta sección es el de estudiar la ecuación (6.2). Es decir, buscamos hallar los valores de $\lambda > 0$ tal que exista $w \in H_0^s(\Omega)$ solución no trivial del problema.

Para eso lo adecuado resulta mirar, dada $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, la solución de la ecuación

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{7.1}$$

Por lo visto en el Teorema 5.1, este problema tiene existencia y unicidad. Llamemos Sf a la solución, es decir $S\colon L^2(\Omega) \to H_0^s(\Omega)$ es el *operador solución* asociado al problema (7.1).

Observemos que S resulta un operador continuo. En efecto, si $u = Sf$ tenemos

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\,dxdy = \int_\Omega fv\,dx,$$

para toda $v\in H_0^s(\Omega)$, de donde tomando $v=u$ y usando (6.3),

$$\frac{c}{2}[u]_s^2 \le \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x)-u(y))^2\,dxdy = \int_\Omega fu\,dx \le \|f\|_2\|u\|_2.$$

Luego, usando la desigualdad de Poincaré (Teorema 4.3), concluimos que

$$\|Sf\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \le C[u]_s^2 \le C\|f\|_2\|u\|_2 \le C\|f\|_2\|Sf\|_{H_0^s(\Omega)}.$$

Es decir

$$\|Sf\|_{H_0^s(\Omega)} \le C\|f\|_2.$$

Llamemos ahora $i\colon H_0^s(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ a la inclusión (i.e. $i(w)=w$) y definimos $K = i\circ S\colon L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$. Luego, es fácil verificar que $\lambda>0$ es un autovalor de (6.2) si y sólo si $\mu=\lambda^{-1}$ es un autovalor de K y $w\in H_0^s(\Omega)$ es una autofunción asociada a λ de (6.2) si y sólo si w es una autofunción de K asociada a μ.

Luego el problema al que arribamos es el estudio de los autovalores y autofunciones del operador $K\colon L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$. Para eso haremos uso del siguiente teorema que suele demostrarse en los cursos de Análisis Funcional (ver, por ejemplo, [3, Theorem 6.11].

Teorema 7.1 (Descomposición espectral de operadores compactos y autoadjuntos)**.** *Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $K\colon H\to H$ un operador compacto y autoadjunto. Entonces existe una base numerable ortonormal de H de autofunciones de K.*

Recordemos las siguientes definiciones: Si H es un espacio de Hilbert separable y $K\colon H\to H$ es un operador lineal y acotado, entonces

1. K se dice compacto si dada un sucesión acotada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset H$, existe una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{Kx_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente;
2. K se dice autoadjunto si $(Kx,y)=(x,Ky)$ para todo $x,y\in H$, donde $(\cdot,\cdot)$ denota el producto interno en H.

Debemos entonces verificar que el operador $K=i\circ S$ es compacto y autoadjunto para poder aplicar el Teorema 7.1.

Lema 7.2. *El operador $K=i\circ S$ es autoadjunto, donde $i\colon H_0^s(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ es la inclusión $i(w)=w$ y $S\colon L^2(\Omega)\to H_0^s(\Omega)$ es el operador solución, $Sf=u$ con $u\in H_0^s(\Omega)$ la única solución del problema* (7.1)*, $\mathcal{L}$ es el operador no local*

$$\mathcal{L}u(x) = v.p.\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x)-u(y))\,dy$$

y $\rho\colon\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ es medible y verifica (6.3)*.*

Demostración. La demostración es elemental.

Sean $f,g\in L^2(\Omega)$ y llamemos $u=Kf$, $v=Kg$. Observemos que la forma bilineal asociada a $\mathcal{L}$ es simétrica, es decir

$$B[u,v] = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\,dxdy = B[v,u].$$

Luego,

$$(Kf,g) = (u,g) = \int_\Omega ug\,dx = B[v,u] = B[u,v] = \int_\Omega fv\,dx = (f,v) = (f,Kg),$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Queda entonces ver que K es compacto. Pero observemos que $S\colon L^2(\Omega) \to H_0^s(\Omega)$ es acotado, luego si probamos que $i\colon H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacto, esto dará el resultado deseado.

8. Compacidad de la inclusión $H_0^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

Para la demostración de la compacidad del operador inclusión i, haremos uso del siguiente teorema que puede encontrarse en [3, Theorem 4.26].

Teorema 8.1 (Kolmogorov-Riesz-Fréchet)**.** *Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ una sucesión acotada (i.e. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty$). Dado $h \in \mathbb{R}^N$, notemos por $\tau_h u(x) = u(x+h)$. Si*

$$\lim_{h\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\tau_h u_n - u_n\|_2 = 0,$$

entonces existe $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k} \to u$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Recordemos que $u_{n_k} \to u$ en $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ significa que para todo $E \subset \mathbb{R}^N$ medible y acotado, $\|u_{n_k} - u\|_{2,E} \to 0$ cuando $k \to \infty$.

El siguiente lema es fundamental.

Lema 8.2. *Sea $0 < s < 1$. Existe entonces una constante $C > 0$ que depende sólo de N y s tal que*

$$\|\tau_h u - u\|_2 \le C|h|^s\,[u]_s,$$

para toda $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Observemos primero que

$$|h|^N \omega_N \|\tau_h u - u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_{|h|}(x)} |u(x+h) - u(x)|^2\,dy\,dx, \tag{8.1}$$

donde ω_N es la medida de Lebesgue de la bola de radio 1 en $\mathbb{R}^N$.

Ahora, se usa la siguiente desigualdad elemental

$$|u(x+h) - u(x)|^2 \le 2(|u(x+h) - u(y)|^2 + |u(y) - u(x)|^2), \tag{8.2}$$

para todo $y \in B_{|h|}(x)$.

Luego, de (8.2), obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_{|h|}(x)} &|u(x+h) - u(x)|^2\,dy\,dx \le \\
&2\int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_{|h|}(x)} \frac{|u(x+h) - u(y)|^2}{|x+h-y|^{N+2s}} |x+h-y|^{N+2s}\,dy\,dx \\
&+ 2\int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_{|h|}(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} |x-y|^{N+2s}\,dy\,dx \\
=&2(I + II).
\end{aligned}$$

Los términos I y II se acotan de manera similar. Primero se observa que, si $x \in \mathbb{R}^N$ e $y \in B_{|h|}(x)$,

$$|x-y| \le |h| \quad \text{y} \quad |x+h-y| \le |x-y| + |h| \le 2|h|. \tag{8.3}$$

Luego, de (8.3),

$$I \le (2|h|)^{N+2s} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_{|h|}(x)} \frac{|u(x+h)-u(y)|^2}{|x+h-y|^{N+2s}}\, dy\, dx \le (2|h|)^{N+2s} [u]_s^2. \tag{8.4}$$

Análogamente,

$$II \le |h|^{N+2s} [u]_s^2. \tag{8.5}$$

Finalmente, usando (8.1), (8.4) y (8.5) concluimos

$$\|\tau_h u - u\|_2^2 \le \frac{2(2^{N+2s}+1)}{\omega_N} |h|^{2s} [u]_s^2,$$

lo que concluye la demostración. □

Observación 8.3. Observemos que si $N = 3$ (con lo que $\omega_N = \frac{4}{3}\pi$) y $s = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$C = \sqrt{\frac{51}{\pi}}$$

:)

Con la ayuda del Teorema 8.1 y del Lema 8.2 se obtiene fácilmente el siguiente resultado de compacidad.

Teorema 8.4. *Sean* $0 < s < 1$ *y sea* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^s(\mathbb{R}^N)$ *una sucesión acotada, i.e.* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_s < \infty$*. Existe entonces una función* $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ *y una subsucesión* $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $u_{n_k} \to u$ *en* $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$*.*

Demostración. Si llamamos $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{s,p}$ es claro entonces que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_2 \le M \quad \text{y} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} [u_n]_s \le M.$$

Luego, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^2(\mathbb{R}^N)$ y, por el Lema 8.2,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\tau_h u_n - u_n\|_p \le CM|h|^s.$$

Luego, la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica las hipótesis del Teorema 8.1, con lo que tenemos que existe $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k} \to u$ en $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

Sólo queda por verificar que $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Pero eso es una consecuencia del Lema de Fatou. En efecto, pasando eventualmente a una subsucesión, podemos suponer que $u_{n_k} \to u$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^N$. Luego

$$0 \le \frac{|u_{n_k}(x) - u_{n_k}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \to \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \quad \text{para casi todo } (x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Entonces, por el Lema de Fatou

$$\begin{aligned}
[u]_s^2 &= \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy \\
&\le \liminf_{k\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u_{n_k}(x)-u_{n_k}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy \\
&\le \sup_{n\in\mathbb{N}} [u_n]_s^2 < \infty,
\end{aligned}$$

como queríamos ver. □

La convergencia local en $L^2(\mathbb{R}^N)$ no puede mejorarse. De hecho es sencillo ver que en general no es cierto que si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^s(\mathbb{R}^N)$ es acotada, entonces $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tenga algún punto de acumulación en $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Ejemplo 8.5. Sea $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\rho \ge 0$, $\operatorname{sop}(\rho) = B_1(0)$. Por ejemplo, se puede tomar $\rho(x)$ como el *núcleo regularizante estándar*,

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $\rho \in H^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $0 < s < 1$ y si llamamos $u_n(x) = \rho(x + n\mathbf{v})$ con $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ fijo, entonces $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^s(\mathbb{R}^N)$ es acotada y verifica

$$\|u_n\|_2 = \|\rho\|_2 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad u_n \to 0 \text{ en } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N).$$

En consecuencia $u_n \not\to 0$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$.

El motivo por el cual en el Ejemplo 8.5 no se obtiene compacidad de la sucesión en $L^2(\mathbb{R}^N)$ es porque la masa de la sucesión se *pierde en el infinito*. En cambio si consideramos funciones restringidas a un dominio acotado, este fenómeno debería evitarse y así conseguir la deseada compacidad. Ese es el contenido del siguiente corolario.

Corolario 8.6 (Compacidad de $H_0^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y $0 < s < 1$. Entonces, si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^s(\Omega)$ es acotada, existe $u \in H_0^s(\Omega)$ y una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k} \to u$ en $L^2(\Omega)$ cuando $k \to \infty$.*

Demostración. La demostración es inmediata del Teorema 8.4. En efecto, Por el Teorema 8.4 existe $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ y una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k} \to u$ en $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Pero, en particular, como Ω es acotado, $u_{n_k} \to u$ en $L^2(\Omega)$. Finalmente dado que, pasando a una nueva subsucesión de ser necesario, $u_{n_k} \to u$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^N$, se tiene que $u = 0$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Por ende $u \in H_0^s(\Omega)$. □

9. El problema de autovalores para $\mathcal{L}$, parte 2

Con los resultados de las secciones previas ahora si podemos completar el estudio del problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = \lambda w & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{9.1}$$

Observemos que el Corolario 8.6 nos da que la inclusión $i\colon H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta, de donde $K = i \circ S\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacto y, como vimos en el Lema 7.2, es autoadjunto por lo que puede aplicarse el Teorema 7.1. Tenemos luego.

Teorema 9.1. *El problema* (9.1) *admite una sucesión de autovalores* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ *(contados con su multiplicidad). Más aún, el conjunto de autofunciones asociadas* $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^s(\Omega)$ *forma una base ortonormal de* $L^2(\Omega)$.

10. El problema de evolución, parte 2

Una vez completado el estudio del problema de autovalores (9.1), podemos finalizar lo empezado en la Sección 6 y obtener un resultado de existencia y unicidad para el problema de evolución

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{L}u = 0 & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0,\infty) \\ u = u_0 & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{10.1}$$

Para esto, se debe dar una definición de qué se entiende como solución de (10.1), pero primero razonemos formalmente.

Buscamos entonces una solución por el método de variables separadas de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t} w_n(x), \tag{10.2}$$

donde $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ son los autovalores (contados con su multiplicidad) de (9.1) y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^s(\Omega)$ son las respectivas autofunciones dadas por el Teorema 9.1.

Observemos que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forma una base ortonormal de $L^2(\Omega)$, luego si asumimos que $u_0 \in L^2(\Omega)$, es claro que los coeficientes $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se deben tomar de la forma

$$a_n := \int_\Omega u_0 w_n \, dx. \tag{10.3}$$

Luego, de la identidad de Parseval (ver, por ejemplo, [15]),

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \|u_0\|_2^2 < \infty. \tag{10.4}$$

De esta identidad, es fácil ver que la fórmula (10.2) efectivamente define una función en el espacio $C([0,T]; L^2(\Omega))$ para todo $T > 0$.

Lema 10.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *medible y acotado y sea* $\mathcal{L}$ *el operador no local dado por* (1.3) *donde* $\rho\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *verifica* (6.3).

Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ *la sucesión de autovalores de* (9.1) *(contados con su multiplicidad) y* $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^s(\Omega)$ *la sucesión de autofunciones asociadas normalizadas tales que forman una base ortonormal de* $L^2(\Omega)$.

Sea $u_0 \in L^2(\Omega)$ *que extendemos por cero a* $\mathbb{R}^N$ *y definimos los coeficientes* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *por* (10.3).

Entonces la fórmula (10.2) *define una función en el espacio* $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N))$ *para todo* $T > 0$.

Demostración. El espacio $C([0,T];L^2(\Omega))$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|v\| := \sup_{0\le t\le T} \|v(\cdot,t)\|_2.$$

Recordemos que en un espacio de Banach, una serie $v = \sum_{n=1}^\infty v_n$ es convergente si la sucesión de sus sumas parciales es convergente en norma. Es decir, si definimos $V_k = \sum_{n=1}^k v_n$, entonces se debe verificar que

$$\|V_k - V_j\| \to 0 \quad \text{cuando } k,j\to\infty.$$

Con todas estas consideraciones generales, para concluir el lema debemos verificar que se tiene que si $j<k$,

$$\sup_{0\le t\le T} \left\| \sum_{n=j}^k a_n e^{-\lambda_n t} w_n \right\|_2^2 \to 0 \quad \text{cuando } j,k\to\infty.$$

Pero, para $0\le t\le T$ fijo, usando la identidad de Pitagoras (dado que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ es una base ortonormal) se tiene

$$\left\| \sum_{n=j}^k a_n e^{-\lambda_n t} w_n \right\|_2^2 = \sum_{n=j}^k a_n^2 e^{-2\lambda_n t} \le \sum_{n=j}^k a_n^2 \to 0,$$

donde hemos usado en el cálculo del límite la identidad de Parseval (10.4).

El lema queda entonces demostrado. □

Observación 10.2. Observemos que, en particular, tenemos que

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_2 \to 0 \qquad \text{cuando } t\downarrow 0.$$

Luego, en este sentido decimos que $u(x,0) = u_0(x)$ para $x\in\Omega$.

Para poder continuar, necesitamos que la función definida en (10.2) tenga más regularidad.

Lema 10.3. *Con las mismas hipótesis que el Lema 10.1, tenemos que la fórmula* (10.2) *define una función en el espacio* $L^2([0,T];H_0^s(\Omega))$ *para todo* $T>0$.

Demostración. La demostración es similar a la del Lema 10.1.

El espacio $L^2([0,T];H_0^s(\Omega))$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|v\|_* := \left(\int_0^T [v(\cdot,t)]_s^2\, dt \right)^{\frac12}$$

(verificar este hecho!). Luego para concluir el lema tenemos que demostrar que

$$\int_0^T \left[\sum_{n=j}^k a_n e^{-\lambda_n t} w_n \right]_s^2 dt \to 0 \qquad \text{cuando } k,j\to\infty.$$

Pero, de (6.3) se deduce que

$$[v]_s^2 \le \frac{1}{c} \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(v(x)-v(y))^2\, dxdy = B[v,v].$$

Luego, usando que $B[u_n, v] = \lambda_n \int_\Omega u_n v\,dx$ para $v \in H_0^s(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{n=j}^k a_n e^{-\lambda_n t} w_n\right]_s^2 &\le \frac{1}{c} B\left[\sum_{n=j}^k a_n e^{-\lambda_n t} w_n, \sum_{m=j}^k a_m e^{-\lambda_m t} w_m\right]\\
&= \frac{1}{c}\sum_{n,m=j}^k a_n a_m e^{-(\lambda_n+\lambda_m)t} B[w_n, w_m]\\
&= \frac{1}{c}\sum_{n=j}^k a_n^2 e^{-2\lambda_n t} B[w_n, w_n]\\
&= \frac{1}{c}\sum_{n=j}^k a_n^2 e^{-2\lambda_n t}\lambda_n.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\int_0^T \lambda_n e^{-2\lambda_n t}\,dt = \frac{1-e^{-2\lambda_n T}}{2} \le \frac{1}{2}.$$

Integrando, llegamos a

$$\int_0^T \left[\sum_{n=j}^k a_n e^{-\lambda_n t} w_n\right]_s^2 dt \le \frac{1}{2c}\sum_{n=j}^k a_n^2 \to 0 \qquad \text{cuando } j,k\to\infty.$$

El lema queda entonces demostrado. □

Estos dos lemas nos permiten entonces dar una noción de solución para (10.1).

Definición 10.4. Decimos que $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T); H_0^s(\Omega))$ es una solución débil de (10.1) si cumple que $u(x,0) = u_0(x)$ y

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega u_0(x)v(x,0)\,dx &- \int_0^T\int_\Omega u(x,t)v_t(x,t)\,dx\,dt\\
&+ \int_0^T \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x,t)-u(y,t))(v(x,t)-v(y,t))\,dxdy\,dt = 0,
\end{aligned}$$

para toda $v \in C([0,T]; H_0^s(\Omega)) \cap C^1((0,T); L^2(\Omega))$ tal que $v(x,T) = 0$ c.t.p. en Ω.

Esta ecuación se puede reescribir como

$$-(u_0, v(\cdot,0))_2 - \int_0^T (u(\cdot,t), v_t(\cdot,t))_2\,dt + \int_0^T B[u(\cdot,t), v(\cdot,t)]\,dt = 0,$$

donde $(\cdot,\cdot)_2$ es el producto interno en $L^2(\Omega)$ y $B[\cdot,\cdot]$ es la forma bilineal dada en (3.3).

Ahora es sencillo chequear que la función construida en (10.2) es una solución de (10.1) en el sentido de la Definición 10.4

Efectivamente, los Lemas 10.1 y 10.3 ya muestran que la si u es dada por (10.2), entonces $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T); H_0^s(\Omega))$ y si elegimos los coeficientes por (10.3), entonces se tiene que $u(x,0) = u_0(x)$.

Sea entonces $v \in C([0,T]; H_0^s(\Omega)) \cap C^1((0,T); L^2(\Omega))$ tal que $v(x,T) = 0$ c.t.p. en Ω y calculemos

$$(u_0, v(\cdot,0))_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w_n, v(\cdot,0))_2;$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u(\cdot,t), v_t(\cdot,t))_2 \, dt &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T e^{-\lambda_n t} (w_n, v_t(\cdot,t))_2 \, dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T e^{-\lambda_n t} \frac{d}{dt} (w_n, v(\cdot,t))_2 \, dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(-(w_n, v(\cdot,0))_2 + \int_0^T \lambda_n e^{-\lambda_n t} (w_n, v(\cdot,t))_2 \, dt \right).
\end{aligned}$$

Luego,

$$-(u_0, v(\cdot,0))_2 - \int_0^T (u(\cdot,t), v_t(\cdot,t))_2 \, dt = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \lambda_n e^{-\lambda_n t} (w_n, v(\cdot,t))_2 \, dt.$$

Por otro lado,

$$\int_0^T B[u(\cdot,t), v(\cdot,t)] \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T e^{-\lambda_n t} B[w_n, v(\cdot,t)] \, dt$$

Si ahora recordamos que w_n es autofunción de $\mathcal{L}$ y por lo tanto verifica

$$B[w_n, \phi] = \lambda_n (w_n, \phi)_2,$$

para toda $\phi \in H_0^s(\Omega)$ concluimos el siguiente teorema.

Teorema 10.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ medible y acotado y sea $\mathcal{L}$ el operador no local dado por* (1.3) *donde $\rho\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ verifica* (6.3)*.*

Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ la sucesión de autovalores de (9.1) *(contados con su multiplicidad) y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^s(\Omega)$ la sucesión de autofunciones asociadas normalizadas tales que forman una base ortonormal de $L^2(\Omega)$.*

Sea $u_0 \in L^2(\Omega)$ que extendemos por cero a $\mathbb{R}^N$ y definimos los coeficientes $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por (10.3)*.*

Entonces la fórmula (10.2) *es una solución de* (10.1) *en el sentido de la Definición 10.4.*

Veamos ahora que la solución dada por el Teorema 10.5 es en realidad la única solución de (10.1).

Teorema 10.6. *Con las mismas hipótesis que en el Teorema 10.5, el problema* (10.1) *tiene una única solución en el sentido de la Definición 10.4.*

Demostración. El teorema queda demostrado si vemos que la única solución de

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{L}u = 0 & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{10.5}$$

es la solución trivial, $u = 0$.

Sea entonces $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T); H_0^s(\Omega))$ una solución de (10.5) y definamos la función

$$v(x,t) := \int_t^T u(x,s)\, ds.$$

Es claro entonces que $v \in C^1((0,T); L^2(\Omega)) \cap C([0,T]; H_0^s(\Omega))$ y que $v(x,T) = 0$. Luego es admisible como función test en la Definición 10.4.

Observemos primero que $v_t = -u$ y

$$\begin{aligned} B[u(\cdot,t), v(\cdot,t)] &= \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x,t)-u(y,t)) \int_t^T (u(x,s)-u(y,s))\, ds\, dxdy \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y) \left(\int_t^T (u(x,s)-u(y,s))\, ds \right)^2 dxdy. \end{aligned}$$

Luego, de la Definición 10.4, recordando que en este caso $u_0 = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_0^T \int_\Omega u(x,t) v_t(x,t)\, dx\, dt + \int_0^T B[u(\cdot,t), v(\cdot,t)]\, dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega u^2(x,t)\, dx\, dt + \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y) \left(\int_0^T (u(x,s)-u(y,s))\, ds \right)^2 dxdy, \end{aligned}$$

de donde se deduce fácilmente que $u = 0$. □

11. El problema de evolución con fuente. El método de Duhamel

El método de Duhamel es un método que sirve en problemas de evolución lineales para calcular el la solución del problema general a partir de las soluciones del problema de evolución homogéneo.

Se puede utilizar en ecuaciones diferenciales ordinarias, en la ecuación del calor, en la ecuación de ondas, etc. Ver, por ejemplo, [14, 15], etc.

Aplicaremos dicho método a la resolución de

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{L}u = f & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{en } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0,T) \\ u = 0 & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{11.1}$$

donde $f \in L^2(\Omega \times (0,T)) = L^2((0,T); L^2(\Omega))$.

Observemos que, por la linealidad del problema, si resolvemos (11.1) y (10.1) habremos encontrado una solución para el problema general de evolución.

Observemos también que (la prueba de) el Teorema 10.6 también implica que (11.1) posee a lo sumo una solución.

Dado $0 < \tau < T$, llamemos entonces $u^\tau(x,t)$ a la solución de

$$\begin{cases} (u^\tau)_t + \mathcal{L}u^\tau = 0 & \text{en } \Omega \times (\tau,T) \\ u^\tau = 0 & \text{en } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (\tau,T) \\ u^\tau(x,\tau) = f(x,\tau) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{11.2}$$

Luego se construye la solución de (11.1) como

$$u(x,t) = \int_0^t u^\tau(x,t)\, d\tau. \tag{11.3}$$

Veamos, formalmente, que la función dada por (11.3) verifica (11.1). En efecto, $u(x,0)=0$ y

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u^t(x,t) + \int_0^t (u^\tau)_t(x,t)\,d\tau \\ &= f(x,t) - \int_0^t \mathcal{L}u^\tau(x,t)\,d\tau \\ &= f(x,t) - \mathcal{L}\left(\int_0^t u^\tau(x,t)\,d\tau\right) \\ &= f(x,t) - \mathcal{L}u(x,t), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\mathcal{L}$ conmuta con la integral.

Una demostración rigurosa de que la fórmula (11.3) es en efecto una solución (débil) de (11.1) sigue las mismas ideas que la Sección 10 y es dejada de ejercicio al lector.

12. Problemas no lineales

En muchos contextos, el término de fuente f en la ecuación (5.1) no viene dado, sino que el mismo depende de la solución de la ecuación, i.e. $f = f(x, u(x))$. Esta situación es usual en modelos de combustión (ver [4]).

Al intentar estudiar el problema (5.1) en este caso, el primer inconveniente técnico que se presenta es que la función $f(\cdot, u(\cdot))$ debe tener alguna propiedad de integrabilidad que haga que la definición de solución débil tenga sentido.

Para fijar ideas, supongamos que $|f(x,t)| \leq C(1+|t|^p)$ para algún $p \geq 1$. Luego si requerimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u(x))\phi(x)\,dx < \infty$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, se necesitará entonces que $u \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

La pregunta natural entonces es: Para qué valores de $p \geq 1$ es cierto que si $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ entonces $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$?

Para empezar a dar una respuesta a esa pregunta, hagamos el siguiente razonamiento dimensional. Supongamos que existe una constante $C > 0$ tal que para toda $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ se tiene que

$$\|u\|_p \leq C[u]_s. \tag{12.1}$$

Sea $r > 0$ y $u_r(x) = u(rx)$, luego de (12.1) se deduce que $\|u_r\|_p \leq C[u_r]_s$, para todo $r > 0$. Ahora

$$\|u_r\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} |u_r(x)|^p\,dx = r^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} |u(\bar{x})|^p\,d\bar{x}$$

$$\begin{aligned} [u_r]_s^2 &= \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u_r(x)-u_r(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dxdy \\ &= r^{-2N}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u(\bar{x})-u(\bar{y}))^2}{|\bar{x}-\bar{y}|^{N+2s}} r^{N+2s}\,d\bar{x}d\bar{y}, \end{aligned}$$

donde hemos hecho los cambios de variables $\bar{x} = rx$ y $\bar{y} = ry$.

Luego, aplicando (12.1) obtenemos que

$$r^{-\frac{N}{p}}\|u\|_p \le C r^{-\frac{N}{2}+s}[u]_s.$$

Finalmente, haciendo $r \uparrow \infty$ y $r \downarrow 0$ se deduce que la única posibilidad para que la desigualdad (12.1) sea cierta es que se verifique

$$\frac{N}{p} - \frac{N}{2} + s = 0,$$

es decir

$$p = 2_s^* := \frac{2N}{N-2s}. \tag{12.2}$$

El número 2_s^* se denomina el *exponente crítico de Sobolev.*

Debemos entonces verificar entonces que si $p = 2_s^*$, la desigualdad (12.1) es verdadera. Esa desigualdad se la conoce como *desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.*

Teorema 12.1. *Existe una constante $C = C(s,N)$ tal que para toda $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ se tiene que*

$$\|u\|_{2_s^*} \le C[u]_s. \tag{12.3}$$

Demostración. Alcanza con verificar (12.3) para toda $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Tomemos $x \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$ e $y \in B_r(x)$. Luego, se tiene

$$|u(x)| \le |u(x) - u(y)| + |u(y)|.$$

Integramos en $B_r(x)$ con respecto a y y obtenemos

$$\begin{aligned}
\omega_N r^N |u(x)| &\le \int_{B_r(x)} |u(x)-u(y)|\,dy + \int_{B_r(x)} |u(y)|\,dy \\
&= \int_{B_r(x)} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{2}+s}} |x-y|^{\frac{N}{2}+s}\,dy + \int_{B_r(x)} |u(y)|\,dy \\
&\le r^{\frac{N}{2}+s} \int_{B_r(x)} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{2}+s}}\,dy + \int_{B_r(x)} |u(y)|\,dy
\end{aligned}$$

Ahora, usamos la desigualdad de Hölder en ambas integrales y obtenemos

$$\begin{aligned}
\omega_N r^N |u(x)| \le\, & r^{\frac{N}{2}+s} (\omega_N r^N)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ (\omega_N r^N)^{\frac{N+2s}{2N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}\,dy \right)^{\frac{1}{2_s^*}}.
\end{aligned}$$

Realizando cálculos elementales se deduce entonces que

$$|u(x)| \le \omega_N^{-\frac{1}{2}} r^s \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dy \right)^{\frac{1}{2}} + \omega_N^{\frac{s}{N}} r^{-\frac{N}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}\,dy \right)^{\frac{1}{2_s^*}} \right].$$

Elevamos ambos miembros a la potencia 2_s^* y obtenemos

$$|u(x)|^{2_s^*} \le \omega_N^{-\frac{N}{N-2s}} r^{s2_s^*} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dy \right)^{\frac{1}{2}} + \omega_N^{\frac{s}{N}} r^{-\frac{N}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}\,dy \right)^{\frac{1}{2_s^*}} \right]^{2_s^*}.$$

Observamos que esta desigualdad se verifica para todo $r > 0$, luego buscamos igualar ambos sumandos y esto se logra tomando

$$r = \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}\,dy\right)^{\frac{2}{N2_s^*}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dy\right)^{\frac{1}{N}}}.$$

De esta forma se llega a

$$|u(x)|^{2_s^*} \le (1+\omega_N^{\frac{s}{N}})\omega_N^{-\frac{N}{N-2s}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}\,dy\right)^{\frac{2s}{N}}.$$

Integrando ahora en x y simplificando la expresión se concluye que

$$\|u\|_{2_s^*}^2 \le (1+\omega_N^{\frac{s}{N}})\omega_N^{-\frac{N}{N-2s}} [u]_s^2.$$

Esto finaliza la demostración del teorema. □

Observación 12.2. La constante $C(s,N)$ calculada en el Teorema 12.1 no es óptima. El cálculo de la constante óptima es un problema importante y delicado, en particular interesa el comportamiento óptimo cuando $s \uparrow 1$ y $s \downarrow 0$. Es sabido que ese comportamiento viene dado por

$$C(s,N) \simeq s(1-s)K(N).$$

Para más detalles, ver [2, 22, 10].

Como corolario inmediato de el Teorema 12.1 obtenemos el siguiente resultado de inmersión.

Corolario 12.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de medida finita. Luego $H_0^s(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ para todo $1 \le p \le 2_s^*$, donde la inclusión es continua.*

Demostración. Si $u \in H_0^s(\Omega)$ y $1 \le p < 2_s^*$, tenemos

$$\|u\|_{p;\Omega}^p \le |\Omega|^{\frac{2_s^*-p}{2_s^*}} \|u\|_{2_s^*}^p \le C|\Omega|^{\frac{2_s^*-p}{2_s^*}} [u]_s^p,$$

donde hemos usado la desigualdad de Hölder y el Teorema 12.1. □

Combinando este corolario con el Teorema de compacidad, Corolario 8.6, obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 12.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado. Luego, si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^s(\Omega)$ es acotada, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $u \in H_0^s(\Omega)$ tal que $\|u_{n_k} - u\|_p \to 0$ cuando $k \to \infty$ para todo $1 \le p < 2_s^*$.*

Demostración. La demostración es una consecuencia directa de los Corolarios 8.6 y 12.3.

En efecto, por el Corolario 8.6 sabemos que existe $u \in H_0^s(\Omega)$ y $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|u_{n_k} - u\|_2 \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Ahora, si $1 \le p < 2$, por la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\|u_{n_k} - u\|_p \le |\Omega|^{\frac{2-p}{2p}} \|u_{n_k} - u\|_2 \to 0, \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

Finalmente, si $2 < p < 2_s^*$, se utiliza la siguiente desigualdad de interpolación

$$\|f\|_p \le \|f\|_2^\theta \|f\|_{2_s^*}^{1-\theta}, \tag{12.4}$$

donde $0 < \theta < 1$ viene dado por

$$\frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{2_s^*} = \frac{1}{p}. \tag{12.5}$$

En efecto, de (12.4), se deduce que

$$\begin{aligned}\|u_{n_k} - u\|_p &\le \|u_{n_k} - u\|_2^\theta \|u_{n_k} - u\|_{2_s^*}^{1-\theta} \le \|u_{n_k} - u\|_2^\theta \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{2_s^*} + \|u\|_{2_s^*}\right)^{1-\theta} \\ &\le C\|u_{n_k} - u\|_2^\theta \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} [u_n]_s + [u]_s\right)^{1-\theta}\end{aligned}$$

donde hemos usado (12.3) en la última desigualdad.

De esto último se deduce fácilmente que $\|u_{n_k} - u\|_p \to 0$ cuando $k \to \infty$ como queríamos ver.

Resta demostrar la desigualdad de interpolación (12.4), pero eso queda de ejercicio al lector. $\square$

Veamos ahora cómo el Teorema 12.4 se puede utilizar para demostrar la existencia de una solución no trivial para el problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u^{p-1} & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \\ u \ge 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{12.6}$$

para $1 < p < 2_s^*$.

Empecemos con el siguiente lema.

Lema 12.5. *Sea $\rho\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \to \mathbb{R}$ tal que $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, donde $\Delta = \{(x,x)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$ es la diagonal. Supongamos que para $0 < s < 1$ existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que*

$$\alpha \le |x-y|^{N+2s}\rho(x,y) \le \beta. \tag{12.7}$$

Sea $\mathcal{L}\colon H_0^s(\Omega) \to H^{-s}(\Omega)$ el operador dado por

$$\mathcal{L}u(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x) - u(y))\, dy$$

donde el límite se entiende en sentido $H^{-s}(\Omega)$ y notemos por $B[u,v]$ a la forma bilineal asociada a $\mathcal{L}$, i.e.

$$B[u,v] = \langle \mathcal{L}u, v\rangle = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))\, dxdy.$$

Finalmente, dado $1 \le p < 2_s^*$, existe $u \in H_0^s(\Omega)$, $\|u\|_p = 1$, $u \ge 0$ c.t.p., tal que

$$B[u,u] = \inf\{B[v,v]\colon v \in H_0^s(\Omega),\ \|v\|_p = 1\}. \tag{12.8}$$

Demostración. La demostración de este lema se hace por el llamado *método directo del cálculo de variaciones.*

El método funciona así. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^s(\Omega)$ una sucesión minimizante, i.e.

$$\|u_n\|_p = 1 \quad \text{y} \quad B[u_n,u_n] \to \inf\{B[v,v]\colon v \in H_0^s(\Omega),\ \|v\|_p = 1\}.$$

Observemos que de la hipótesis (12.7), se deduce que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}[u_n]_s^2 \leq \frac{2}{\alpha}\sup_{n\in\mathbb{N}} B[u_n,u_n] < \infty.$$

Luego, la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H_0^s(\Omega)$. Ahora, por el Teorema 12.4, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $u \in H_0^s(\Omega)$ tal que $\|u_{n_k} - u\|_p \to 0$ cuando $k\to\infty$, de donde se deduce que $\|u\|_p = 1$.

Pasando eventualmente a una sub-subsucesión, podemos asumir que $u_{n_k} \to u$ c.t.p., de donde, por el Lema de Fatou, obtenemos que

$$\begin{aligned} B[u,u] &= \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u(x)-u(y))^2\,dxdy \\ &\leq \liminf_{k\to\infty}\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)(u_{n_k}(x)-u_{n_k}(y))^2\,dxdy \\ &= \liminf_{k\to\infty} B[u_{n_k},u_{n_k}] = \lim_{n\to\infty} B[u_n,u_n] \\ &= \inf\{B[v,v]\colon v\in H_0^s(\Omega),\ \|v\|_p = 1\}. \end{aligned}$$

Finalmente, observemos que de la desigualdad elemental

$$||u(x)| - |u(y)|| \leq |u(x) - u(y)|, \tag{12.9}$$

se deduce que si u es un minimizante de (12.8), entonces $|u|$ también lo es. □

Observación 12.6. Observando con más cuidado la desigualdad (12.9), no es difícil ver que si $u \in H_0^s(\Omega)$ es un minimizante de (12.8), entonces u tiene signo constante. Queda de ejercicio al lector demostrar este hecho.

Veamos que un minimizante u de (12.8) es una solución de una variante de la ecuación (12.6).

Lema 12.7. *Sea $u \in H_0^s(\Omega)$ un minimizante para* (12.8) *tal que $u \geq 0$ c.t.p. Entonces existe $\lambda > 0$ tal que u es solución de*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u^{p-1} & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N\setminus\Omega \\ u \geq 0 & \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{12.10}$$

Demostración. Primero, observemos que por solución de (12.10) entendemos una $u \in H_0^s(\Omega)$ tal que $u \geq 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^N$ y que

$$B[u,v] = \lambda\int_\Omega u^{p-1}v\,dx,$$

para toda $v \in H_0^s(\Omega)$.

Demostraremos que toda función u que resuelve el problema de minimización (12.8) es efectivamente una solución de (12.10).

Para eso, sea $v \in H_0^s(\Omega)$ y definimos $i\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$i(t) = \frac{B[u+tv,u+tv]}{\|u+tv\|_p^2} = B\left[\frac{u+tv}{\|u+tv\|_p}, \frac{u+tv}{\|u+tv\|_p}\right]. \tag{12.11}$$

Observemos que, por la definición de u como solución de (12.8), tenemos que $i(0) \leq i(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Luego $i'(0) = 0$.

Ahora,

$$B[u+tv,u+tv]=B[u,u]+2tB[u,v]+t^2B[v,v],$$

de donde

$$\frac{d}{dt}B[u+tv,u+tv]\Big|_{t=0}=2B[u,v]. \tag{12.12}$$

Por otro lado,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |u+tv|^p\,dx = p\int_\Omega |u+tv|^{p-2}(u+tv)v\,dx,$$

de donde

$$\frac{d}{dt}\|u+tv\|_p^2\Big|_{t=0}=\frac{2}{p}\|u\|_p^{2-p}p\int_\Omega u^{p-1}v\,dx = 2\int_\Omega u^{p-1}v\,dx. \tag{12.13}$$

Luego, de (12.11), (12.12) y (12.13) obtenemos

$$i'(0)=\frac{2B[u,v]\|u\|_p^2-B[u,u]2\int_\Omega u^{p-1}v\,dx}{\|u\|_p^4}=2B[u,v]-B[u,u]2\int_\Omega u^{p-1}v\,dx,$$

Entonces, si llamamos $\lambda=B[u,u]$ y recordamos que $i'(0)=0$, llegamos a

$$B[u,v]=\lambda\int_\Omega u^{p-1}v\,dx.$$

Como v es arbitraria, concluimos que u es solución de (12.10). □

Finalmente, usando la homogeneidad de la ecuación, observamos que si $p\neq 2$ se puede considerar $\lambda=1$ tomando un múltiplo adecuado de u.

Teorema 12.8. *Sea $\rho\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Delta\to\mathbb{R}$ tal que $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, donde $\Delta=\{(x,x)\colon x\in\mathbb{R}^n\}$ es la diagonal. Supongamos que ρ verifica* (12.7).

Sea $\mathcal{L}\colon H_0^s(\Omega)\to H^{-s}(\Omega)$ el operador dado por

$$\mathcal{L}u(x)=v.p.\int_{\mathbb{R}^N}\rho(x,y)(u(x)-u(y))\,dy$$

donde el límite se entiende en sentido $H^{-s}(\Omega)$

Sea $1<p<\infty$, $p\neq 2$. Entonces existe una solución $u\in H_0^s(\Omega)$ de (12.6).

Demostración. La demostración es inmediata a partir del Lema 12.7 y queda de ejercicio al lector. □

Observación 12.9. El caso $p=2$ es un problema de autovalores y ya fue tratado en la Sección 7.

Referencias

1. Vedat Akgiray and G. Geoffrey Booth, *The siable-law model of stock returns*, Journal of Business & Economic Statistics **6** (1988), no. 1, 51–57.
2. Jean Bourgain, Haïm Brezis, and Petru Mironescu, *Another look at Sobolev spaces*, 2001, Original research article appeared at in Optimal Control and Partial Differential Equations IOS Press ISBN 1 58603 096 5, pp. 439–455.
3. Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011. MR 2759829 (2012a:35002)
4. J. D. Buckmaster and G. S. S. Ludford, *Lectures on mathematical combustion*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 43, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1983. MR 765073

5. Luis Caffarelli and Luis Silvestre, *Regularity theory for fully nonlinear integro-differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), no. 5, 597–638. MR 2494809 (2010d:35376)
6. ———, *The Evans-Krylov theorem for nonlocal fully nonlinear equations*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), no. 2, 1163–1187. MR 2831115
7. ———, *Regularity results for nonlocal equations by approximation*, Arch. Ration. Mech. Anal. **200** (2011), no. 1, 59–88. MR 2781586
8. Peter Constantin, *Euler equations, Navier-Stokes equations and turbulence*, Mathematical foundation of turbulent viscous flows, Lecture Notes in Math., vol. 1871, Springer, Berlin, 2006, pp. 1–43. MR 2196360
9. Anne-Laure Dalibard and David Gérard-Varet, *On shape optimization problems involving the fractional Laplacian*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **19** (2013), no. 4, 976–1013. MR 3182677
10. Eleonora Di Nezza, Giampiero Palatucci, and Enrico Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. **136** (2012), no. 5, 521–573. MR 2944369
11. Qiang Du, Max Gunzburger, R. B. Lehoucq, and Kun Zhou, *Analysis and approximation of nonlocal diffusion problems with volume constraints*, SIAM Rev. **54** (2012), no. 4, 667–696. MR 3023366
12. Albert Einstein, *Investigations on the theory of the Brownian movement*, Dover Publications Inc., New York, 1956, Edited with notes by R. Fürth, Translated by A. D. Cowper. MR 0077443 (17,1035g)
13. A. Cemal Eringen, *Nonlocal continuum field theories*, Springer-Verlag, New York, 2002. MR 1918950
14. Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR 2597943 (2011c:35002)
15. Julián Fernández Bonder, *Ecuaciones diferenciales parciales*, Cursos de Grado, vol. 7, Departamento de Matemática, FCEN-UBA, 2015.
16. Giambattista Giacomin and Joel L. Lebowitz, *Phase segregation dynamics in particle systems with long range interactions. I. Macroscopic limits*, J. Statist. Phys. **87** (1997), no. 1-2, 37–61. MR 1453735
17. Guy Gilboa and Stanley Osher, *Nonlocal operators with applications to image processing*, Multiscale Model. Simul. **7** (2008), no. 3, 1005–1028. MR 2480109
18. Nicolas et al. Humphries, *Environmental context explains lévy and brownian movement patterns of marine predators*, Nature **465** (2010), 1066–1069.
19. Nikolai Laskin, *Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals*, Phys. Lett. A **268** (2000), no. 4-6, 298–305. MR 1755089
20. Sergei Levendorski, *Pricing of the american put under lévy processes*, International Journal of Theoretical and Applied Finance **7** (2004), no. 03, 303–335.
21. A. Massaccesi and E. Valdinoci, *Is a nonlocal diffusion strategy convenient for biological populations in competition?*, ArXiv e-prints (2015).
22. V. Maz′ya and T. Shaposhnikova, *On the Bourgain, Brezis, and Mironescu theorem concerning limiting embeddings of fractional Sobolev spaces*, J. Funct. Anal. **195** (2002), no. 2, 230–238. MR 1940355 (2003j:46051)
23. Ralf Metzler and Joseph Klafter, *The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach*, Phys. Rep. **339** (2000), no. 1, 77. MR 1809268
24. A. M. Reynolds and C. J. Rhodes, *The lvy flight paradigm: random search patterns and mechanisms*, Ecology **90** (2009), no. 4, 877–887.
25. Wim Schoutens, *Lévy processes in finance: Pricing financial derivatives*, Willey Series in Probability and Statistics, Willey, New York, 2003.
26. Kun Zhou and Qiang Du, *Mathematical and numerical analysis of linear peridynamic models with nonlocal boundary conditions*, SIAM J. Numer. Anal. **48** (2010), no. 5, 1759–1780. MR 2733097

Departamento de Matemática, FCEN - UBA e IMAS - CONICET
Ciudad Universitaria, Pabellón I (1428) Av. Cantilo s/n.
Buenos Aires, Argentina.

E-mail address: jfbonder@dm.uba.ar

URL: http://mate.dm.uba.ar/~jfbonder