
Lista de ejercicios número 4

MÉTODOS NO VARIACIONALES

---

1. Sea u una solución débil de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u = g & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde $g \in L^2(\Omega)$, $f \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$ para cada $T > 0$. Supongamos que f es periódica en t con período τ, es decir, $f(x,t) = f(x,t+\tau)$ $(x \in \Omega,\ t \geq 0)$. Probar que existe una única función $g \in L^2(\Omega)$ tal que la solución u es τ-periódica.

---

2. Consideremos el siguiente problema elíptico no lineal

$$\begin{cases} -\Delta u + b(Du) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usar el Teorema de punto fijo de Banach para mostrar que existe una única solución débil $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ donde $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz si la constante de Lipschitz $\mathrm{Lip}(b)$ es suficientemente pequeña.

---

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz y acotada tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) > \lambda_1$ donde λ_1 es el primer autovalor de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$. Usar el método de super y sub soluciones para mostrar la existencia de una solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

---

4. Supongamos que existen $\underline{u}$, $\bar{u}$ sub y super soluciones clásicas de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde f es una función creciente y regular. Usar el principio del máximo para verificar que

$$\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_k \leq \cdots \leq \bar{u},$$

donde $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ están definidas inductivamente por

$$\begin{cases} -\Delta u_k = f(u_{k-1}) & \text{en } \Omega \\ u_k = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

---

5. Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda F(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde $F \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, [0, +\infty))$, $F(x, 0) > 0$.

Se define el *espectro* Σ de (1) como el conjunto de todos los λ tales que (1) tiene solución. Probar que si $\lambda \in \Sigma$, entonces $[0, \lambda] \subset \Sigma$.

---

6. Con la notación del ejercicio anterior, probar que si existen $f_0 \in C(\overline{\Omega})$ no negativa y $\alpha > 0$ tales que

$$F(x,u) \geq f_0(x) + \alpha u \geq 0, \qquad x \in \overline{\Omega},\ u \geq 0,$$

entonces (1) no tiene solución positiva para $\lambda \geq \lambda_1/\alpha$ donde λ_1 es el primer autovalor de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$. Concluir que si $F(x,u) = e^u$ entonces (1) no tiene solución positiva para $\lambda \geq \lambda_1$.

---

7. Supongamos que $0 \leq F(x,u) \leq f(u)$ donde f es una función monótona creciente. Sea m_0 tal que

$$\frac{m_0}{f(m_0)} \geq \frac{m}{f(m)}, \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{R}.$$

Consideremos w la solución de

$$\begin{cases} -\Delta w = 1 & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Sea $M = \max_{\Omega} w$ y definamos $\lambda_0 = \frac{m_0}{M f(m_0)}$. Probar que si $\lambda \leq \lambda_0$ entonces (1) tiene una solución positiva.

---

8. Puede probarse que si w es la solución de (2) se tiene

$$M = \max_{\Omega} w \leq \frac{1}{2N} \left(\frac{|\Omega|}{|B_1(0)|} \right)^{2/N}.$$

Usar este resultado para estimar λ_0 del ejercicio anterior en los casos:

a) $\Omega = B_1(0)$, $F(x,u) = e^u$.

b) $\Omega = B_1(0)$, $F(x,u) = (u+a)^p$, con $a > 0$.

---

9. Probar que si $F(x,u) > 0$ entonces existe $\bar{\lambda} \in (0,\infty]$ tal que (1) tiene una solución positiva para $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ y que no existe solución positiva para $\lambda \leq 0$ o $\lambda > \bar{\lambda}$. Más aún,

   a) Si $\liminf_{s\to\infty} \frac{F(x,s)}{s} > 0$ uniformemente en x, entonces $\bar{\lambda} < \infty$.

   b) Si $\lim_{s\to\infty} \frac{F(x,s)}{s} = 0$ uniformemente en x, entonces $\bar{\lambda} = \infty$.

---

10. Probar que si $F_\varepsilon(x,u) = \exp(\frac{u}{1+\varepsilon u})$ entonces (1) tiene una solución positiva para todo $\lambda > 0$. (Observar que $F_\varepsilon(x,u) \to F(x,u) = e^u$ cuando $\varepsilon \to 0$ y que sin embargo – por el ejercicio 6 – el problema (1) con $F(x,u)$ no tiene solución positiva para $\lambda > \lambda_1$).
