
Lista de ejercicios número 1

ESPACIOS DE SOBOLEV

---

1. Probar que en dimensión $n = 1$, si $u \in W^{1,p}(I)$, donde I es un intervalo de la recta y $1 \leq p < \infty$, entonces u coincide en casi todo punto con una función absolutamente continua y que u' (que existe en sentido clásico c.t.p.) coincide con la derivada débil c.t.p.

---

2. Muestre que si $u \in W^{1,p}(0,1)$ para $1 < p < \infty$, entonces se tiene la estimación
$$|u(x) - u(y)| \leq |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \Big(\int_0^1 |u'|^p \, dt \Big)^{1/p},$$
para casi todo $x, y \in [0,1]$.

---

3. Muestre que $C_c(0,1)$ no es denso en $W^{1,p}(0,1)$.

---

4. Muestre que $\chi_{B_1(0)}(x)$ no está en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Más aún, no tiene derivada débil.

---

5. ¿Para qué valores de $\alpha > 0$ vale que $u(x) := |x|^{-\alpha}$ pertenece a $W^{1,p}(B_1(0))$? Para $n > p$, construya una función de $W^{1,p}(B_1(0))$ que no es acotada en ningún subconjunto abierto de $B_1(0)$.

---

6. Demuestre la unicidad de la derivada débil.

---

7. Pruebe que $W^{k,p}(U)$ es un espacio de Banach.

---

8. Complete los detalles del Teorema de aproximación local [Evans, pág. 250]. En particular, pruebe la siguiente fórmula:
$$D^\alpha u^\epsilon = \rho_\epsilon * D^\alpha u,$$
donde $u \in W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \leq k$, $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\rho(x/\epsilon)$ y $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

---

9. Mostrar que el Teorema de extensión visto en clase para $W^{1,p}(U)$ provee un operador de extensión para $W^{2,p}(U)$ también, si $\partial U \in C^2$.

---

10. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 con F' acotada. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $u \in W^{1,p}(U)$ con $1 < p < \infty$. Pruebe que

$$F(u) \in W^{1,p}(U) \quad \text{ y } \quad F(u)_{x_i} = F'(u)u_{x_i} \ (i = 1, \ldots, n).$$

---

11. Sea $1 < p < \infty$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado.

    (a) Pruebe que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(U)$.

    (b) Pruebe que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $u^+, u^- \in W^{1,p}(U)$ y

$$Du^+ = \begin{cases} Du & \text{c.t.p. } \{u > 0\} \\ 0 & \text{c.t.p. } \{u \leq 0\} \end{cases}, \qquad Du^- = \begin{cases} 0 & \text{c.t.p. } \{u \leq 0\} \\ Du & \text{c.t.p. } \{u > 0\} \end{cases}.$$

    (c) Pruebe que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $Du = 0$ c.t.p. $\{u = 0\}$.

---

12. Pruebe la siguiente desigualdad de interpolación:

$$\int_U |Du|^2 \, dx \leq C\Big(\int_U u^2 \, dx\Big)^{1/2} \Big(\int_U |D^2 u|^2 \, dx\Big)^{1/2},$$

para toda $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ con C independiente de u.

---

13. Muestre que si U es conexo y $u \in W^{1,p}(U)$ verifica que $Du = 0$ c.t.p. U, entonces u es constante c.t.p. U.

---

14. Pruebe la siguiente desigualdad de Poincaré:

$$\|u - (u)_U\|_{L^p(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)},$$

para toda $u \in W^{1,p}(U)$, $1 \leq p \leq \infty$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, acotado con frontera de clase C^1, $C = C(n, p, U)$ y

$$(u)_U := \frac{1}{|U|} \int_U u \, dx$$

es el promedio de u sobre U.
