$$y^2 + 2py + q = 0$$

$$y^2 + 2py + p$$

$$\xi_\pm = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \xi_{+/-}}{\partial p} = -1 \pm \dfrac{p}{\sqrt{p^2-q}} \\[2ex] \dfrac{\partial \xi_{+/-}}{\partial q} = \dfrac{\pm(-1)}{2\sqrt{p^2-q}} \end{array} \right.$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\boxed{x^2 + \frac{b}{a}x + c}$$

<u>Número de condición:</u>

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{p\left(-\sqrt{p^2-q} \pm p\right)}{\left(-p \pm \sqrt{p^2-q}\right)\sqrt{p^2-q}} \\[3ex] \dfrac{q\left(\dfrac{\pm(-1)}{\sqrt{p^2-q}}\right)}{2\left(-p \pm \sqrt{p^2-q}\right)} \end{array} \right.$$

$$\xi_+ : \frac{-p}{\sqrt{p^2-q}} \cdot \varepsilon_p + \frac{q(-1)}{2\sqrt{p^2-q}} \cdot \frac{\left(p + \sqrt{p^2-q}\right)}{\left(-p + \sqrt{p^2-q}\right)\left(p + \sqrt{p^2-q}\right)} \varepsilon_q =$$

$$= \frac{-p}{\sqrt{p^2-q}} \varepsilon_p + \frac{1}{2}\left(\frac{p + \sqrt{p^2-q}}{\sqrt{p^2-q}}\right) \varepsilon_q$$

Si $q < 0$ bien cond.

Si $q \sim -p^2$ mal cond.

$$\xi_- : \frac{p\left(\cancel{-\sqrt{p^2-q}} - p\right)}{\left(-p \cancel{- \sqrt{p^2-q}}\right)\sqrt{p^2-q}} \varepsilon_p + \frac{(q)}{2\left(-p - \sqrt{p^2-q}\right)} \cdot \frac{\left(-p + \sqrt{p^2-q}\right)}{\left(-p + \sqrt{p^2-q}\right)\sqrt{p^2-q}} \varepsilon_q$$

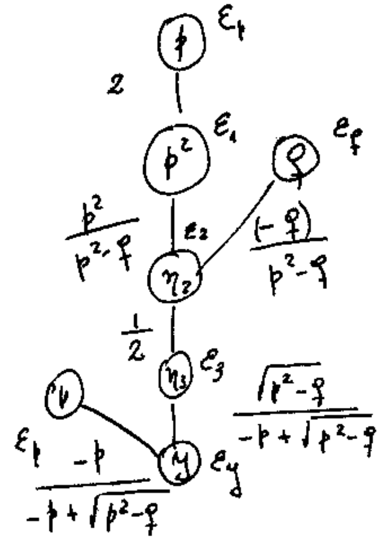
$$\frac{p}{\sqrt{p^2-q}} \varepsilon_p + \frac{\cancel{q}}{2\left(\cancel{p^2} - \cancel{p^2} + \cancel{q}\right)} \left(-p + \sqrt{p^2-q}\right) \varepsilon_q = \frac{p}{\sqrt{p^2-q}} \varepsilon_p + \frac{\left(-p + \sqrt{p^2-q}\right)}{\sqrt{p^2-q}} \varepsilon_q$$

$\eta_1 = p^2$

$\eta_2 = \eta_1 - q$

$\eta_3 = \sqrt{\eta_2}$

$y = -p + \eta_3$



Cálculo de los factores de amplificación:

$\underline{\eta_1}$

$$[p\cdot(1+\varepsilon_p)]^2 \cong p^2 + 2p^2\varepsilon_p + O(\varepsilon_p^2)$$

$$\rightarrow \frac{[p(1+\varepsilon_p)]^2 - p^2}{p^2} = 2\varepsilon_p$$

$\underline{\eta_2}$ error relativo supuesto en η_1

$$\frac{(\eta_1(1+\delta\eta_1) - q(1+\varepsilon_q)) - (\eta_1 - q)}{\eta_1 - q} \cong$$

$$\cong \frac{\eta_1\delta\eta_1 - q\varepsilon_q}{\eta_1 - q} = \frac{\eta_1 \delta\eta_1}{\eta_1 - q} - \frac{q}{\eta_1 - q}\varepsilon_q$$

Taylor orden 1

$\underline{\eta_3}$ $$\sqrt{\eta_2(1+\delta\eta_2)} \cong \sqrt{\eta_2}\left(1 + \frac{1}{2}\delta\eta_2\right) \rightarrow \frac{\sqrt{\eta_2(1+\delta\eta_2)} - \sqrt{\eta_2}}{\sqrt{\eta_2}} = \frac{1}{2}\delta\eta_2$$

$\underline{y}$: igual que η_2.

Analicemos la propagación de los errores paso a paso, para el caso $p > 0$, $q < 0$, $|q| << p^2$.
Al elevar al cuadrado, el error relativo aumenta en factor 2, lo que no es grave. Para llegar a η_2, los factores de amplificación son ≤ 1 en módulo $\rightarrow$ no son importantes. Para llegar a η_3, se mult. por $1/2$, lo cual está Ok. Lo grave ocurre al calcular y: $-p + \sqrt{p^2 - q}$ es muy chico si $|q| << p^2 \rightarrow$ los errores relativos ε_p y el acumulado en η_3 se amplifican mucho.

Como ejercicio, extraigamos del grafo el error relativo acumulado en η_3. Hay que proceder desde cada vértice por encima de η_3, y sumar los productos de los factores de amplificación.

En detalle:

Contrib. ε_p: $\quad 2\cdot\left(\dfrac{p^2}{p^2-q}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\varepsilon_p$

Contrib. ε_1 $\quad \dfrac{1}{2}\,\dfrac{p^2}{p^2-q}\cdot\varepsilon_1$

contrib. ε_q $\quad \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(-q)}{p^2-q}\;\varepsilon_q$

contrib. ε_2 $\quad + \quad \dfrac{1}{2}\;\varepsilon_2$

$$\frac{p^2}{p^2-q}\,\varepsilon_p+\frac{1}{2}\frac{p^2}{p^2-q}\,\varepsilon_1+\frac{1}{2}\left(\frac{-q}{p^2-q}\right)\varepsilon_q+\frac{1}{2}\,\varepsilon_2$$

+ contrib ε_3 $\quad + \varepsilon_3$

<u>Conclusión</u>: el error relativo del resultado puede ser muy grande, porque los términos $\dfrac{-p}{-p+\sqrt{p^2-q}}$ y $\dfrac{\sqrt{p^2-q}}{-p+\sqrt{p^2-q}}$ son grandes si $|q| << p^2$

<u>Sin embargo</u> para $p>0$, $q<0$, ξ_+, vimos en la pág. 1 que el problema estaba bien condicionado $\Rightarrow$ la situación es:

$$\boxed{\text{Problema OK} \;-\; \text{Algoritmo MAL}}$$

En esta situación, se dice que el problema está bien condicionado, pero el algoritmo no es <u>numéricamente estable</u>.

<u>Remedio</u> Cuando se tiene una cuadrática $ax^2+bx+c=0$ el problema aparece con la raíz para la cual $-b$ y $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ tienen $\neq$ signo, mientras que la otra no presenta esta dificultad.

Entonces, se calcula

$$x_1 = \frac{-b - \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \operatorname{sgn}(b) = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ -1 & b < 0 \\ +1 & b > 0 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{c}{a x_1}$$

$$\left(\text{Porque} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \rightarrow a x_1 x_2 = c \right)$$

Por favor, revisen estas notas con cuidado, y me consultan el lunes si hay dudas. Otras dificultades con las cuadráticas aparecen si hay overflows o underflows al calcular p^2 (o b^2), etc. Hacer una rutina (programita!) que para cualquier conjunto de valores de máquina p y q dé un resultado decente puede ser un ejercicio interesante!

Javier