Capítulo 9

Variedades lineales

Al considerar los subespacios de $\mathbb{R}^2$, vimos que éstos son el conjunto $\{(0,0)\}$, el espacio $\mathbb{R}^2$ y las rectas que pasan por el origen. Ahora, en algunos contextos, por ejemplo para resolver problemas geométricos, puede ser útil trabajar con rectas que no pasan por el origen, es decir, que no son subespacios.

En este capítulo estudiaremos una noción que generaliza a la de subespacios de un K-espacio vectorial: las variedades lineales. Así como los subespacios aparecen como conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales homogéneas, las variedades lineales pueden verse como conjuntos de soluciones de ecuaciones lineales no homogéneas.

9.1 Nociones básicas

9.1.1 Variedades lineales

Las variedades lineales en un K-espacio vectorial V pueden definirse como sigue a partir de los subespacios de V.

Definición 9.1 Sea V un K-espacio vectorial. Una *variedad lineal* $M \subseteq V$ es un conjunto de la forma $M = \{s + p \;/\; s \in S\}$, donde S es un subespacio de V y $p \in V$.

Notación. $M = S + p$.

Podemos entonces pensar a la variedad lineal $M = S + p \subseteq V$ como el subespacio S "corrido", es decir, que en lugar de pasar por el 0 pasa por un punto p.

Observación 9.2 Sea V un K-espacio vectorial, y sea $p \in V$. Si $M = S + p \subseteq V$ (con S un subespacio de V y $p \in V$) es una variedad lineal, se le puede dar a V otra estructura de K-espacio vectorial (donde p pasa a tener el papel del 0 de V) tal que M resulta ser un subespacio de V con esa nueva estructura:

Se definen

$$\begin{aligned} +_p &: V \times V \to V\,, \quad v +_p w = v + w - p \\ \cdot_p &: K \times V \to V\,, \quad \lambda \cdot_p v = \lambda \cdot (v - p) + p \end{aligned}$$

Entonces $(V, +_p, \cdot_p)$ es un K-espacio vectorial, p es el elemento neutro de $+_p$ (con lo cual cumple la función de ser el "nuevo origen" de V) y M es un subespacio de $(V, +_p, \cdot_p)$ (comparar con el Ejercicio 4 de la Sección 1.5).

La siguiente proposición muestra que una variedad lineal en un K-espacio vectorial V determina unívocamente un subespacio de V.

Proposición 9.3 *Sea V un K-espacio vectorial y sea $M \subseteq V$ una variedad lineal. Supongamos que existen $p, p' \in V$ y subespacios S y S' de V tales que $M = S + p$ y $M = S' + p'$. Entonces $S = S'$ y $p - p' \in S$.*

Demostración. En primer lugar, veamos que bajo las hipótesis de la proposición, $p - p' \in S'$ y $p - p' \in S$.

- Como $p \in M = S' + p'$, existe $s' \in S'$ tal que $p = s' + p'$. Entonces $p - p' = s' \in S'$.
- Por otro lado, se tiene que $p' \in M = S + p$, con lo que existe $s \in S$ tal que $p' = s + p$. Luego, $p - p' = -s \in S$.

Veamos ahora que $S = S'$:

Sea $s \in S$. Entonces $s + p \in M = S' + p'$, y por lo tanto, existe $s' \in S'$ tal que $s + p = s' + p'$. En consecuencia $s = s' + (p' - p) \in S'$. Luego, $S \subseteq S'$.

Análogamente se prueba la otra inclusión. □

Este resultado nos permite introducir una noción de dimensión para variedades lineales.

Definición 9.4 Sea V un K-espacio vectorial y sea $M \subseteq V$ una variedad lineal. Supongamos que $M = S + p$, donde S es un subespacio de V y $p \in V$. Entonces S se llama el *subespacio asociado a M*. Si S es de dimensión finita, se define la *dimensión de M* como $\dim(M) = \dim(S)$.

Si bien el subespacio S asociado a una variedad lineal M está unívocamente determinado por M, para cualquier punto $p \in M$ resulta que $M = S + p$:

Observación 9.5 Si V es un K-espacio vectorial, $M = S + p \subseteq V$ (con S un subespacio de V y $p \in V$) es una variedad lineal y $m \in M$, entonces $M = S + m$.

Como $m \in M$, existe $s' \in S$ tal que $m = s' + p$.

($\subseteq$) Sea $s + p \in M = S + p$. Entonces

$$s + p = s + p - m + m = s + p - (s' + p) + m = (s - s') + m \in S + m.$$

($\supseteq$) Sea $s + m \in S + m$. Entonces $s + m = s + (s' + p) = (s + s') + p \in S + p = M$.

A continuación damos algunos ejemplos de variedades lineales en distintos espacios vectoriales.

Ejemplos.

1. Los subespacios de un K-espacio vectorial V son variedades lineales: $S = S + \vec{0}$.
2. Un conjunto formado por un punto de un K-espacio vectorial es una variedad lineal.
3. Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $b \in K^{m\times 1}$. Entonces
$$\{x \in K^n \ / \ A.x = b\} = S_{\text{hom}} + p,$$
donde $S_{\text{hom}} \subset K^n$ es el subespacio de soluciones del sistema homogéneo asociado $A.x = 0$ y p es una solución particular del sistema $A.x = b$, es una variedad lineal.

   (Observar que si el sistema es incompatible, el conjunto es vacío y entonces no es una variedad lineal.)
4. Se considera en $K[X]$ el conjunto
$$\begin{aligned} M &= \{P \in K[X] \ / \ P(0) = 1\} = \{P \in K[X] \ / \ P = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i + 1\} \\ &= \{P \in K[X] \ / \ P(0) = 0\} + 1. \end{aligned}$$
Como $\{P \in K[X] \ / \ P(0) = 0\}$ es un subespacio de $K[X]$, entonces M es una variedad lineal.
5. En $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, sea
$$M = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ / \ f'' = \operatorname{sen}(x)\} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ / \ (f + \operatorname{sen}(x))'' = 0\}$$
Sea $S = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ / \ f'' = 0\}$, que es un subespacio de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Observamos que $f \in M$ si y sólo si $f + \operatorname{sen}(x) \in S$. Luego, $M = S - \operatorname{sen}(x)$ es una variedad lineal.

9.1.2 Algunas variedades lineales particulares

Las nociones de recta y plano conocidas en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, así como también algunas propiedades básicas de estos conjuntos, se generalizan a K-espacios vectoriales arbitrarios:

Definición 9.6 Sea V un K-espacio vectorial.

i) Una *recta* en V es una variedad lineal de dimensión 1, es decir, $L = < v > + p$, con $v, p \in V$, $v \neq \vec{0}$.

ii) Un *plano* en V es una variedad lineal de dimensión 2, es decir, $\Pi = < v, w > + p$, con $\{v, w\} \subset V$ linealmente independiente

iii) Si $\dim V = n$, un *hiperplano* de V es una variedad lineal de dimensión $n - 1$.

Observación 9.7 Sea V un K-espacio vectorial y sean $p \neq q \in V$. Entonces existe una única recta $L \subseteq V$ tal que $p \in L$ y $q \in L$.

Demostración. Sea $L = < p - q > + q$. Se tiene que L es una recta, puesto que como $p \neq q$, $\dim(< p - q >) = 1$. Además:

- $q \in L$, puesto que $q = 0 + q$.
- $p \in L$, puesto que $p = 1.(p - q) + q$.

Sea L' una recta tal que $p \in L'$ y $q \in L'$. Entonces existe un subespacio S con $\dim S = 1$ tal que $L' = S + q$ y $L' = S + p$. Por lo tanto, $p - q \in S$ y, como $p - q \neq 0$ y $\dim S = 1$, resulta que $S = < p - q >$. Luego $L' = < p - q > + q = L$. □

Observación 9.8 Sea V un K-espacio vectorial. Dados $x, y, z \in V$ no alineados (es decir, que no pertenecen a una misma recta), existe un único plano Π tal que $x, y, z \in \Pi$.

Demostración. Sea $\Pi = < y - x,\ z - x > + x$. Se tiene que $x \in \Pi$, $y = (y - x) + x \in \Pi$ y $z = (z - x) + x \in \Pi$.

Como por hipótesis, x, y, z no están alineados, debe ser $\dim(< y - x,\ z - x >) = 2$ (si no, Π sería una recta con $x, y, z \in \Pi$ o un solo punto). Luego, Π es un plano con $x, y, z \in \Pi$.

Supongamos que $\Pi' = S + p$ es un plano con $x, y, z \in \Pi'$. Entonces $\Pi' = S + x$, $\Pi' = S + y$, $\Pi' = S + z$. Luego, $y - x \in S$ y $z - x \in S$. En consecuencia, $S = < y - x,\ z - x >$, de donde $\Pi' = \Pi$. □

En general, dada una cantidad finita de vectores en un K-espacio vectorial V, existe una variedad lineal que los contiene. Esto da lugar a la siguiente definición:

Definición 9.9 Sea V un K-espacio vectorial y sean $a_0, a_1, \ldots, a_n \in V$. Se llama *variedad lineal generada por* $a_0, \ldots, a_n$ a la variedad lineal $M \subseteq V$ más chica tal que $a_0 \in M, \ldots, a_n \in M$ (es decir, si $M' \subset V$ es una variedad lineal con $a_0 \in M', \ldots, a_n \in M'$, entonces $M \subset M'$).

El resultado siguiente caracteriza la variedad lineal generada por un conjunto finito de vectores de un K-espacio vectorial. En particular, establece que dados $n + 1$ vectores existe una variedad lineal de dimensión menor o igual que n que los contiene.

Proposición 9.10 *Sea V un K-espacio vectorial y sean $a_0, a_1, \ldots, a_n \in V$. Entonces, la variedad lineal generada por $a_0, a_1, \ldots, a_n$ es $M = < a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0 > + a_0$. Observar que* $\dim(M) \leq n$.

Demostración. Es claro que $a_i \in M$ para cada $0 \leq i \leq n$. Veamos que M es la menor variedad lineal (con respecto a la inclusión) con esta propiedad.

Supongamos que $M' = S + a_0$ verifica que $a_i \in M'$ para cada $0 \leq i \leq n$. Entonces $a_i - a_0 \in S$ para cada $1 \leq i \leq n$, de donde $< a_1 - a_0,\ a_2 - a_0, \ldots,\ a_n - a_0 > \subseteq S$, y en consecuencia $M \subseteq M'$.

Luego, la variedad lineal más chica que contiene a $a_0, \ldots, a_n$ es M. □

9.1.3 Otra forma de describir variedades lineales

En el Ejemplo 3 de la página 233 vimos que el conjunto de las soluciones de un sistema lineal compatible de ecuaciones con n incógnitas es una variedad lineal en K^n. Por otro lado, sabemos que todo subespacio de K^n es el conjunto de las soluciones de un sistema lineal homogéneo $Ax = 0$, lo que implica que una variedad lineal en K^n es el conjunto de las soluciones de un sistema lineal (no necesariamente homogéneo).

Esto dice que las variedades lineales de K^n son los conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.

Mediante el uso de coordenadas, es posible dar una descripción del mismo tipo para variedades lineales en un K-espacio vectorial de dimensión finita arbitrario:

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea B una base de V. Sea $M = S + p$ una variedad lineal en V, con S un subespacio de V y $p \in V$. Denotemos por S_B al subespacio de K^n formado por las coordenadas de los vectores de S en la base B. Entonces

$$v \in M \iff (v)_B \in S_B + (p)_B \text{ en } K^n.$$

Por lo tanto, $\{(v)_B \in K^n : v \in M\}$ es una variedad lineal en K^n y, entonces, es el conjunto de las soluciones de un sistema lineal (no homogéneo si no es un subespacio).

Ejemplo. Sea $M = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P(2) = 1\}$, que es una variedad lineal en $\mathbb{R}_2[X]$. Consideremos la base $B = \{1, X, X^2\}$. Entonces

$$P \in M \iff P(2) = 1 \iff (P)_B = (a, b, c) \text{ y } a + 2b + 4c = 1.$$

9.2 Intersección y suma de variedades lineales

9.2.1 Intersección de variedades lineales

A diferencia de lo que sucede para subespacios, la intersección de dos variedades lineales puede ser el conjunto vacío. La siguiente proposición muestra que si esta intersección es no vacía, entonces es una variedad lineal.

Proposición 9.11 *Sea V un K-espacio vectorial y sean M_1 y M_2 variedades lineales en V. Entonces $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ o $M_1 \cap M_2$ es una variedad lineal.*

Demostración. Supongamos que $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Entonces existe $p \in M_1 \cap M_2$, con lo cual $M_1 = S_1 + p$ y $M_2 = S_2 + p$ con S_1 y S_2 subespacios de V.

Veamos que $M_1 \cap M_2 = (S_1 \cap S_2) + p$:

($\subseteq$) Sea $q \in M_1 \cap M_2$. Entonces existen $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tales que $q = s_1 + p = s_2 + p$. En consecuencia, $s_1 = s_2$, es decir $q = s + p$ con $s \in S_1 \cap S_2$.

($\supseteq$) Si $q = s + p$ con $s \in S_1 \cap S_2$, como $s \in S_1$, se tiene que $q \in M_1$ y como $s \in S_2$, entonces $q \in M_2$. Luego $q \in M_1 \cap M_2$. □

9.2.2 Variedades lineales paralelas y alabeadas

A continuación estudiaremos las distintas situaciones que se pueden presentar para que la intersección de dos variedades lineales sea el conjunto vacío. Por ejemplo, esto sucede en $\mathbb{R}^2$ en el caso de dos rectas paralelas no coincidentes.

Definición 9.12 Sea V un K-espacio vectorial y sean M_1 y M_2 variedades lineales en V tales que $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$. Se dice que M_1 y M_2 son *paralelas*, y se nota $M_1 \parallel M_2$, si $S_1 \subseteq S_2$ o $S_2 \subseteq S_1$.

Observación 9.13 De la definición anterior se deduce que:

- Un punto es paralelo a cualquier variedad lineal.
- Si $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$ son variedades lineales de la misma dimensión en un K-espacio vectorial V, entonces $M_1 \parallel M_2$ si y sólo si $S_1 = S_2$.

Proposición 9.14 *Sea V un K-espacio vectorial con $\dim(V) \geq 2$. Sean L_1 y L_2 dos rectas en V. Son equivalentes:*

i) Existe un plano $\Pi \subseteq V$ tal que $L_1 \subseteq \Pi$ y $L_2 \subseteq \Pi$.

ii) $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ o $L_1 \parallel L_2$.

Demostración.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Analizaremos por separado los casos a) $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ y b) $L_1 \parallel L_2$.

a) Supongamos que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Sea $p \in L_1 \cap L_2$. Entonces $L_1 = S_1 + p = < v_1 > + p$ y $L_2 = S_2 + p = < v_2 > + p$, con $v_1, v_2 \in V$ no nulos.

Si v_1 y v_2 son linealmente independientes, consideramos $\Pi = < v_1, v_2 > + p$, que es un plano y contiene a L_1 y a L_2.

Si v_1 y v_2 son linealmente dependientes, sea $w \in V$ tal que $\{v_1, w\}$ es linealmente independiente. Entonces $\Pi = < v_1, w > + p$ es un plano que contiene a $L_1 = L_2$.

b) Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y $L_1 \parallel L_2$, entonces $L_1 = < v > + p_1$ y $L_2 = < v > + p_2$ para algún $v \in V$ no nulo.

Sea $\Pi = < v, p_1 - p_2 > + p_2$. Vemos que $\dim(< v, p_1 - p_2 >) = 2$, puesto que si fuera $p_1 - p_2 = \lambda.v$, se tendría $p_1 = \lambda.v + p_2 \in L_1 \cap L_2$, contradiciendo la hipótesis. Luego, Π es un plano, y contiene a ambas rectas.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Sea Π un plano con $L_1 \subseteq \Pi$ y $L_2 \subseteq \Pi$. Supongamos que $L_1 = < v_1 > + p_1$, $L_2 = < v_2 > + p_2$ y $\Pi = S + p_1$, con $v_1, v_2 \in V$ no nulos, S un subespacio de dimensión 2 de V, y $p_1, p_2 \in V$.

Dado que $v_1 + p_1$, p_2 y $v_2 + p_2$ pertenecen a Π, se tiene que

$$\begin{array}{rl} v_1 \in S & \text{pues } \exists\, s \in S : v_1 + p_1 = s + p_1, \text{ de donde } v_1 = s, \\ p_2 - p_1 \in S & \text{pues } \exists\, s' \in S : p_2 = s' + p_1, \text{ de donde } p_2 - p_1 = s', \\ v_2 \in S & \text{pues } \exists\, s'' \in S : v_2 + p_2 = s'' + p_1, \text{ de donde } v_2 = s'' - (p_2 - p_1), \end{array}$$

Como $\dim S = 2$, existe una combinación lineal no trivial

$$a.\, v_1 + b.\, (p_2 - p_1) + c.\, v_2 = 0.$$

Si $b = 0$, resulta que $< v_1 > = < v_2 >$ con lo que $L_1 \parallel L_2$.

Si $b \neq 0$, entonces $\frac{c}{b}\, v_2 + p_2 = \frac{-a}{b}\, v_1 + p_1$, de donde $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. □

Es posible que dos variedades lineales no sean paralelas, pero tampoco tengan intersección no vacía (por ejemplo, $L_1 = < (1, 0, 0) > + (0, 0, 1)$ y $L_2 = < (0, 1, 0) > + (0, 0, 2)$ son dos rectas en $\mathbb{R}^3$ que no son paralelas ni se cortan). Esto da lugar a la siguiente definición:

Definición 9.15 Sea V un K-espacio vectorial. Dos variedades lineales M_1 y M_2 de V se dicen *alabeadas* si $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ y $M_1 \nparallel M_2$.

Ejemplos.

1. $L_1 = < (1, 0, 0) > + (0, 0, 1)$ y $L_2 = < (0, 1, 0) > + (0, 0, 2)$ son dos rectas alabeadas en $\mathbb{R}^3$.

2. Los planos definidos en $\mathbb{R}^4$ por

   $$\Pi_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 1,\ y = 1\} \quad \text{y} \quad \Pi_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2,\ z = 3\}$$

   son alabeados.

   (Se puede probar que, si V es un K-espacio vectorial tal que existen dos planos Π_1 y Π_2 en V que son alabeados, entonces $\dim(V) \geq 4$.)

En el ejemplo que sigue, estudiaremos cómo determinar si dos rectas en $\mathbb{R}^3$ se intersecan, son paralelas o son alabeadas a partir de ecuaciones que las definen.

Ejemplo. En $\mathbb{R}^3$, consideremos dos rectas L_1 y L_2 definidas por

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + cz & = & d \\ ex + fy + gz & = & h \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad L_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} a'x + b'y + c'z & = & d' \\ e'x + f'y + g'z & = & h' \end{array} \right.$$

donde $\dim < (a, b, c), (d, e, f) > = 2$ y $\dim < (a', b', c'), (d', e', f') > = 2$. Se tiene que

$$L_1 \cap L_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + cz & = & d \\ ex + fy + gz & = & h \\ a'x + b'y + c'z & = & d' \\ e'x + f'y + g'z & = & h'. \end{array} \right.$$

Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ a' & b' & c' \\ e' & f' & g' \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ a' & b' & c' & d' \\ e' & f' & g' & h' \end{array}\right).$$

Observamos que:

i) Si $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(B) = 2$, el sistema de ecuaciones que define $L_1 \cap L_2$ es compatible y su conjunto de soluciones es una recta. Entonces $L_1 = L_2$.

ii) Si $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(B) = 3$, el sistema es incompatible, pero el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado es un subespacio de dimensión 1. Luego, $L_1 \parallel L_2$ y $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

iii) Si $\text{rg}(A) = 3$ y $\text{rg}(B) = 3$, el sistema tiene solución única, de donde $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ y $L_1 \nparallel L_2$.

iv) Si $\text{rg}(A) = 3$ y $\text{rg}(B) = 4$, entonces el sistema es incompatible, con lo que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y el sistema homogéneo asociado tiene solución única, lo que implica que $L_1 \nparallel L_2$. Luego, L_1 y L_2 son alabeadas.

9.2.3 Suma de variedades lineales

Para concluir esta sección, introducimos el concepto de suma de variedades lineales. Al igual que en el caso de subespacios, dadas variedades lineales M_1 y M_2 en un K-espacio vectorial V, la idea es construir la menor variedad lineal en V que contiene a M_1 y a M_2 simultáneamente.

Definición 9.16 Sea V un K-espacio vectorial y sean M_1 y M_2 variedades lineales en V. Si $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$ con S_1 y S_2 subespacios de V y $p_1, p_2 \in V$, se define la *variedad lineal suma* de M_1 y M_2, que notaremos $M_1 \vee M_2$, como

$$M_1 \vee M_2 = (S_1 + S_2 + < p_1 - p_2 >) + p_2.$$

Algunas observaciones respecto de la definición:

Observación 9.17 Se puede probar que:

1. Si $M_1 = S_1 + p_1 = S_1 + p_1'$ y $M_2 = S_2 + p_2 = S_2 + p_2'$, con S_i subespacio de V y $p_i, p_i' \in V$ para $i = 1, 2$, entonces $(S_1 + S_2 + < p_1' - p_2' >) + p_2' = (S_1 + S_2 + < p_1 - p_2 >) + p_2$.

   Es decir, la definición de $M_1 \vee M_2$ no depende de las descripciones de M_1 y M_2.

2. $M_1 \subseteq M_1 \vee M_2$ y $M_2 \subseteq M_1 \vee M_2$.

3. Si $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$, entonces $p_1 - p_2 \in S_1 + S_2$ si y sólo si $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, en cuyo caso $M_1 \vee M_2 = (S_1 + S_2) + p_2$.

En efecto, si $p_1 - p_2 \in S_1 + S_2$ existen $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tales que $p_1 - p_2 = s_1 + s_2$, y entonces $-s_1 + p_1 = s_2 + p_2 \in M_1 \cap M_2$. Recíprocamente, si $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ y $q \in M_1 \cap M_2$, entonces existen $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tales que $s_1 + p_1 = q = s_2 + p_2$, de donde $p_1 - p_2 = -s_1 + s_2 \in S_1 + S_2$.

El análogo del Teorema 1.43 para variedades lineales es el siguiente resultado:

Teorema 9.18 (Teorema de la dimensión para la suma de variedades lineales.) *Sea V un K espacio vectorial y sean M_1 y M_2 variedades lineales de V de dimensión finita. Entonces:*

i) Si $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$,

$$\dim(M_1 \vee M_2) = \dim(M_1) + \dim(M_2) - \dim(M_1 \cap M_2).$$

ii) Si $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$, con S_1, S_2 subespacios de V y $p_1, p_2 \in V$,

$$\dim(M_1 \vee M_2) = \dim(M_1) + \dim(M_2) - \dim(S_1 \cap S_2) + 1.$$

Demostración. Si $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$, por las definiciones de variedad suma y de dimensión de una variedad lineal, se tiene que

$$\dim(M_1 \vee M_2) = \dim(S_1 + S_2 + < p_1 - p_2 >).$$

i) Si $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ y $p \in M_1 \cap M_2$, entonces $M_1 \cap M_2 = (S_1 \cap S_2) + p$. Además, por lo visto en la observación anterior, $p_1 - p_2 \in S_1 + S_2$ y entonces $M_1 \vee M_2 = (S_1 + S_2) + p_2$. Entonces, aplicando el teorema de la dimensión para subespacios, tenemos que

$$\begin{aligned} \dim(M_1 \vee M_2) &= \dim(S_1 + S_2) \\ &= \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2) \\ &= \dim(M_1) + \dim(M_2) - \dim(M_1 \cap M_2). \end{aligned}$$

ii) Si $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, entonces $p_1 - p_2 \notin S_1 + S_2$, con lo que

$$\begin{aligned} \dim(M_1 \vee M_2) &= \dim(S_1 + S_2 + < p_1 - p_2 >) \\ &= \dim(S_1 + S_2) + 1 \\ &= \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2) + 1 \\ &= \dim(M_1) + \dim(M_2) - \dim(S_1 \cap S_2) + 1. \end{aligned}$$ □

9.3 Variedades lineales en espacios con producto interno

Para terminar, estudiaremos variedades lineales en espacios euclídeos (es decir, $\mathbb{R}$-espacios vectoriales con producto interno). El hecho de que en el espacio esté definido un producto interno permite extender las nociones de perpendicularidad, ángulo y distancia a variedades lineales, lo que a su vez posibilita el estudio de problemas geométricos.

9.3.1 Ortogonalidad de variedades lineales

Definición 9.19 Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio euclídeo. Sean $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$ (con S_1, S_2 subespacios de V y $p_1, p_2 \in V$) variedades lineales en V. Se dice que M_1 y M_2 son *ortogonales* si $S_1 \perp S_2$, es decir, si $\forall\, s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, se tiene que $\langle s_1, s_2 \rangle = 0$.

Si $M = S + p$ es una variedad lineal en un espacio euclídeo V de dimensión finita y $q \in V$, se puede considerar la variedad lineal ortogonal a M de dimensión máxima que pasa por q (por ejemplo, si $q = 0$, esta variedad lineal es $S^\perp$):

Definición 9.20 Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita, sea $M \subseteq V$ una variedad lineal y sea $q \in V$. El *complemento ortogonal a M por el punto q* es la variedad lineal $M_q^\perp = S^\perp + q$, donde S es el subespacio de V asociado a M.

Escribiremos $M^\perp$ para denotar al complemento ortogonal a M por $q = 0$.

Ejemplos.

1. Sea $L = <(1,2,3)> + (1,5,4) \subseteq \mathbb{R}^3$. Hallar $L^\perp_{(1,1,2)}$.

   Por la definición, se tiene que

$$\begin{aligned} L^\perp_{(1,1,2)} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \langle (x,y,z), (1,2,3) \rangle = 0\} + (1,1,2) \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y + 3z = 0\} + (1,1,2) \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y + 3z = 9\}. \end{aligned}$$

2. Hallar $\Pi^\perp_{(1,0,1)}$ siendo $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 3x - 2y + z = 7\}$.

   Se tiene que

$$\begin{aligned} \Pi &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 3x - 2y + z = 0\} + (0,0,7) \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \langle (x,y,z), (3,-2,1) \rangle = 0\} + (0,0,7) \\ &= <(3,-2,1)>^\perp + (0,0,7). \end{aligned}$$

   Entonces $\Pi^\perp_{(1,0,1)} = \big(<(3,-2,1)>^\perp\big)^\perp + (0,0,1) = <(3,-2,1)> + (0,0,1)$.

9.3.2 Ángulo entre rectas y planos

Utilizando el concepto de ángulo entre vectores introducido en la Sección 8.1.4 podemos definir el ángulo entre dos rectas en un espacio euclídeo como sigue:

Definición 9.21 Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio euclídeo y sean $L_1 = <v_1> + p_1$ y $L_2 = <v_2> + p_2$, con $v_1, v_2 \in V$ no nulos, dos rectas en V. Se define el *ángulo entre L_1 y L_2* como el (único) número real comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ que coincide con el ángulo entre v_1 y v_2 o con el ángulo entre $-v_1$ y v_2.

Esta noción nos permite a su vez definir el ángulo entre una recta y un plano, y el ángulo entre dos planos, en un espacio euclídeo de dimensión 3:

Definición 9.22 Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio euclídeo con $\dim V = 3$.

- Sean L una recta y Π un plano en V. Si α es el ángulo entre las rectas L y $\Pi^\perp$, se define el *ángulo entre* L *y* Π como $\frac{\pi}{2} - \alpha$.
- Sean Π_1 y Π_2 planos en V. Se define el *ángulo entre* Π_1 *y* Π_2 como el ángulo entre las rectas $\Pi_1^\perp$ y $\Pi_2^\perp$.

9.3.3 Distancia de un punto a una variedad lineal

Definición 9.23 Sea V un espacio euclídeo de dimensión finita. Sea M una variedad lineal en V y sea $q \in V$. Se define la *distancia de* q *a* M como

$$d(q, M) = \inf\{d(q, z)\ /\ z \in M\}.$$

Aplicando los resultados vistos en la Sección 8.2.4, podemos probar que si $q \in V$ y M es una variedad lineal en V, existe un punto $q' \in M$ tal que $d(q, M) = d(q, q')$ y dar una fórmula para su cálculo:

Observación 9.24 Con la notación de la definición anterior, si $M = S + p$ con S un subespacio de V y $p \in V$, entonces

$$\begin{aligned} d(q, M) &= \inf\{d(q, z) / z \in M\} = \inf\{d(q, s + p) / s \in S\} \\ &= \inf\{\|q - (s + p)\| / s \in S\} = \inf\{\|q - p - s\| / s \in S\} = d(q - p,\, S) \\ &= d(q - p,\, p_S(q - p)) = \|p_{S^\perp}(q - p)\|, \end{aligned}$$

donde p_S y $p_{S^\perp}$ denotan las proyecciones ortogonales sobre S y $S^\perp$ respectivamente.

Notar que lo que se hizo es "trasladar el problema al 0", o sea, restarle p a todos los puntos de la variedad y a q, y entonces calcular la distancia de un vector a un subespacio.

De las igualdades de la observación anterior se deduce que $d(q, M) = \|q - (p_S(q-p) + p)\|$ y, como $p_S(q - p) + p \in M$, concluimos que éste es el punto de M más cercano a q.

Finalmente observamos que se puede probar que, si $M_q^\perp$ es el complemento ortogonal a M por q, entonces $M_q^\perp \cap M = \{p_S(q - p) + p\}$.

Ejemplo. Calcular la distancia de $(1, 2, 4)$ a $M = < (1, 1, 0), (0, 1, 0) > + (5, 1, 2)$.

Se tiene que $S = < (1, 1, 0), (0, 1, 0) >$ es el subespacio asociado a M y $S^\perp = < (0, 0, 1) >$. Por lo tanto, para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vale $p_{S^\perp}(x, y, z) = (0, 0, z)$. De acuerdo a la observación anterior,

$$d((1, 2, 3), M) = \|p_{S^\perp}((1, 2, 4) - (5, 1, 2))\| = \|(0, 0, 2)\| = 2.$$

9.3.4 Distancia entre variedades lineales

Para terminar, estudiaremos la noción de distancia entre variedades lineales. Comenzamos con un ejemplo:

Ejemplo. Sean L_1 y L_2 las rectas definidas en $\mathbb{R}^3$ como

$$L_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 = 1, x_2 = 1\} \;\text{ y }\; L_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 = 2, x_3 = 4\}.$$

La distancia $d(L_1, L_2)$ entre L_1 y L_2 puede definirse como el ínfimo de las distancias $d(m_1, m_2)$ con $m_1 \in L_1$, $m_2 \in L_2$. Entonces

$$\begin{aligned} d(L_1, L_2) &= \inf\{d(m_1, m_2) \,/\, m_1 \in L_1, m_2 \in L_2\} \\ &= \inf\{d((1, 1, \alpha), (2, \beta, 4)) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \inf\{\sqrt{1 + (1-\beta)^2 + (\alpha - 4)^2} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Más aún, el conjunto posee mínimo, el cual se alcanza para $\alpha = 4$, $\beta = 1$. En conclusión, $d(L_1, L_2)$ coincide con la distancia entre los puntos $(1, 1, 4) \in L_1$ y $(2, 1, 4) \in L_2$.

En lo que sigue, veremos que lo que sucede en el ejemplo (es decir, que la distancia entre L_1 y L_2 es la mínima de las distancias entre un punto de L_1 y un punto de L_2) se da también para variedades lineales arbitrarias en espacios euclídeos de dimensión finita. Damos entonces la siguiente definición:

Definición 9.25 Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita. Sean M_1 y M_2 variedades lineales en V. Se define la *distancia entre* M_1 *y* M_2 como

$$d(M_1, M_2) = \inf\{d(m_1, m_2) \;/\; m_1 \in M_1,\; m_2 \in M_2\}.$$

Veamos que, dadas dos variedades lineales M_1 y M_2 es un espacio euclídeo V, existen $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$ tales que $d(m_1, m_2) = d(M_1, M_2)$:

Supongamos que $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$, con S_1 y S_2 subespacios de V y $p_1, p_2 \in V$.

Consideremos el subespacio $S = S_1 + S_2$. Como $S \oplus S^\perp = V$, existen únicos $v \in S$ y $u \in S^\perp$ tales que

$$p_1 - p_2 = v + u.$$

A continuación mostraremos que $d(M_1, M_2) = \|u\|$.

i) En primer lugar, veamos que el elemento $u \in S^\perp$ no depende de los puntos $p_1 \in M_1$ y $p_2 \in M_2$, es decir, que si $M_1 = S_1 + p_1'$ y $M_2 = S_2 + p_2'$, entonces $p_1' - p_2' = v' + u$ con $v' \in S$:

Como $p_1' \in M_1 = S_1 + p_1$ y $p_2' \in M_2 = S_2 + p_2$, existen $s_1' \in S_1$ y $s_2' \in S_2$ tales que $p_1' = s_1' + p_1$ y $p_2' = s_2' + p_2$. Entonces

$$p_1' - p_2' = s_1' + p_1 - s_2' - p_2 = s_1' - s_2' + (p_1 - p_2) = s_1' - s_2' + v + u = v' + u,$$

donde $v' = s_1' - s_2' + v \in S$.

ii) Veamos ahora que $d(x, y) \geq \|u\|$ para cada $x \in M_1$, $y \in M_2$:

Por i), para $x \in M_1$, $y \in M_2$ se tiene que $x - y = v_{xy} + u$, para algún $v_{xy} \in S$. Entonces

$$\|x - y\|^2 = \|v_{xy}\|^2 + \|u\|^2 \geq \|u\|^2$$

y, en consecuencia, $d(x, y) \geq \|u\|$.

iii) Finalmente veamos que existen $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$ tales que $d(m_1, m_2) = \|u\|$:

Sea $v \in S$ como al comienzo, es decir, tal que $p_1 - p_2 = v + u$. Como $v \in S = S_1 + S_2$, existen $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tales que $v = s_1 + s_2$.

Sean $m_1 = -s_1 + p_1 \in M_1$ y $m_2 = s_2 + p_2 \in M_2$. Entonces

$$\begin{aligned} d(m_1, m_2) &= \|m_1 - m_2\| = \| - s_1 + p_1 - p_2 - s_2\| \\ &= \|(p_1 - p_2) - (s_1 + s_2)\| = \|v + u - v\| = \|u\|. \end{aligned}$$

Observamos que, como consecuencia de ii) y iii), resulta que

$$d(M_1, M_2) = \|u\| = d(m_1, m_2),$$

con $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$ los puntos definidos en iii) y $u = p_{S^\perp}(p_1 - p_2)$, donde $p_{S^\perp}$ es la proyección ortogonal sobre $S^\perp$.

Hemos demostrado entonces el siguiente resultado:

Proposición 9.26 *Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita y sean $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$, con S_1, S_2 subespacios de V y $p_1, p_2 \in V$, variedades lineales en V. Entonces $d(M_1, M_2) = \|p_{(S_1+S_2)^\perp}(p_1 - p_2)\|$.*

Ejemplo. Hallar la distancia entre las rectas L_1 y L_2 en $\mathbb{R}^3$, siendo

$$L_1 = < (1, 2, 1) > + (1, 7, 2) \quad \text{y} \quad L_2 = < (2, 1, 1) > + (0, 0, 1).$$

Consideremos el subespacio $S = < (1, 2, 1), (2, 1, 1) >$, que es la suma de los subespacios asociados a L_1 y L_2.

Se tiene que

$$S^\perp = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{array} \right. \right\} = < (-1, -1, 3) >.$$

Buscamos $u = p_{S^\perp}((1, 7, 2) - (0, 0, 1))$:

$$u = p_{S^\perp}(1, 7, 1) = \frac{\langle (1, 7, 1), (-1, -1, 3) \rangle}{\|(-1, -1, 3)\|^2} (-1, -1, 3) = \Big(\frac{5}{11}, \frac{5}{11}, \frac{-15}{11}\Big).$$

En consecuencia,

$$d(L_1, L_2) = \left\| \Big(\frac{5}{11}, \frac{5}{11}, \frac{-15}{11}\Big) \right\| = \frac{5\sqrt{11}}{11}.$$

9.4 Ejercicios

Ejercicio 1. Sea V un K-espacio vectorial y sean p, $q \in V$. Si M es la recta que pasa por p y q, probar la validez de las siguientes afirmaciones:

i) Si $M' \subseteq V$ es una variedad lineal tal que p, $q \in M'$ entonces $M \subseteq M'$.

ii) $M = \{\lambda.q + \mu.p \,/\, \lambda,\, \mu \in K \,;\, \lambda + \mu = 1\}$

Ejercicio 2. Probar que cada uno de los siguientes conjuntos son variedades lineales y calcular su dimensión:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_3 = 1 \text{ y } x_2 + x_3 = -2\}$

ii) $M_2 = \{(1, 2, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

iii) $M_3 = \{P \in \mathbb{Q}_3[X] \,/\, P'(2) = 1\}$

iv) $M_4 = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,/\, tr(A) = 5\}$

Ejercicio 3.

i) Sea $L \subseteq \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por los puntos $(2, -1, 0)$ y $(1, 3, -1)$. Hallar una variedad lineal M de dimensión 2 que contenga a L. ¿Es M única?

ii) Sea $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ y sea $L = <(0, 1, 1)> + (1, 1, 0)$. Hallar una variedad lineal $M \subseteq \mathbb{R}^3$ de dimensión 2 tal que $M \cap \Pi = L$.

Ejercicio 4. Determinar la dimensión de la variedad lineal

$$M = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + 3.x_3 = 0,\ 2.x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ -x_1 + x_2 + a.x_3 = 0\big\}$$

de acuerdo a los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. Hallar ecuaciones implícitas para las siguientes variedades lineales:

i) $M = <(1, 2, 1), (2, 0, 1)> + (1, 1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

ii) $M \subseteq \mathbb{R}^4$ la mínima variedad que contiene a $(1, 1, 2, 0)$, $(2, 1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 4, 1)$.

Ejercicio 6. Sea $L = <(2, 1, 1)> + (0, -1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

i) Hallar un plano Π tal que $0 \in \Pi$ y $L \subseteq \Pi$.

ii) ¿Existirá un plano Π' tal que $L \subseteq \Pi'$, $0 \in \Pi'$ y $(0, 0, 1) \in \Pi'$ simultáneamente?

Ejercicio 7.

i) Encontrar en $\mathbb{R}^3$ dos rectas alabeadas que pasen por $(1, 2, 1)$ y $(2, 1, 1)$ respectivamente.

ii) Encontrar en $\mathbb{R}^4$ dos planos alabeados que pasen por $(1, 1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1, 1)$ respectivamente.

iii) ¿Hay planos alabeados en $\mathbb{R}^3$? Más generalmente, si V es un K-espacio vectorial de dimensión n y M_1 y M_2 son variedades lineales alabeadas en V, ¿qué se puede decir de sus dimensiones?

Ejercicio 8.

i) Sea $S = < (2, -3) > \subseteq \mathbb{R}^2$. Hallar una recta $L \parallel S$ tal que $(1, -1) \in L$. Graficar.

ii) Sea $L_1 = < (2, 1, 0) > + (0, 0, 1)$. Hallar una recta $L_2 \parallel L_1$ que pase por el punto $(-1, 3, 0)$.

iii) Si L_1 y L_2 son las variedades de ii), hallar un plano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $L_1 \subseteq \Pi$ y $L_2 \subseteq \Pi$ simultáneamente. ¿Es Π único?

iv) Con las notaciones anteriores, hallar un plano $\Pi' \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $\Pi \cap \Pi' = L_1$.

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos, decidir si las variedades lineales M_1 y M_2 se cortan, son paralelas o alabeadas. En cada caso, hallar $M_1 \cap M_2$, $M_1 \vee M_2$ y calcular todas las dimensiones:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$
$M_2 = < (1, 0, 1) > + (0, 0, -3)$

ii) $M_1 = < (1, 2, 1, 0), (1, 0, 0, 1) > + (1, 2, 2, -1)$
$M_2 = < (1, 0, 1, 1), (2, 2, 1, 0) > + (-1, 4, 2, -3)$

iii) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 - 1 = x_3 + x_4 = 0\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 = x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0\}$

Ejercicio 10. Sean

$$M_1 = < (1, 1, 1) > + (0, 2, 0) \quad \text{y} \quad M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = x_1 - x_2 + x_3 = 1\}.$$

i) Hallar planos Π_1 y Π_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_1 \subseteq \Pi_1$, $M_2 \subseteq \Pi_2$ y $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ simultáneamente.

ii) Hallar $M_1 \cap M_2$ y $M_1 \vee M_2$ y calcular sus dimensiones.

Ejercicio 11. Sean

$$\begin{aligned} L_1 &= \big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 3.x_3 = 0\,,\ x_2 - x_3 = -2\big\} \quad \text{y} \\ L_2 &= \big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 6.x_3 = 1\,,\ x_2 + 2.x_3 = 0\big\}\,. \end{aligned}$$

Hallar una recta $L \subseteq \mathbb{R}^3$ que pase por el punto $(1,0,2)$ y corte a L_1 y a L_2.

Ejercicio 12. Sean $A = (1,1,2)$ y $B = (2,0,2)$. Sea $\Pi = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 = 2\}$. Hallar $C \in \Pi$ tal que A, B y C formen un triángulo equilátero. ¿La solución es única?

Ejercicio 13. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ las rectas dadas por las ecuaciones $L_1 : x_2 = 0$, $L_2 : x_2 = \alpha$ y $L_3 : x_2 = \beta$, con α y β dos números no nulos y distintos entre sí. Sean L y L' dos rectas transversales a L_1, L_2 y L_3. Probar que

$$\frac{d(L_1 \cap L, L_2 \cap L)}{d(L_2 \cap L, L_3 \cap L)} = \frac{d(L_1 \cap L', L_2 \cap L')}{d(L_2 \cap L', L_3 \cap L')}.$$

Este enunciado es una versión del *Teorema de Thales.*

Ejercicio 14. Dado el triángulo PQR, se llama *mediana correspondiente al vértice* P a la recta que pasa por dicho vértice y por el punto medio del lado $\overline{QR}$.

Se considera en $\mathbb{R}^2$ el triángulo cuyos vértices son $P = (0,0)$, $Q = (c,0)$ y $R = (a,b)$.

i) Probar que sus tres medianas se cortan en un punto M.

ii) Probar que si $d(M,P) = d(M,Q) = d(M,R)$, el triángulo PQR es equilátero.

Ejercicio 15. Un *paralelogramo* es un cuadrilátero tal que sus lados opuestos son paralelos.

i) Probar que si el cuadrilátero dado en $\mathbb{R}^2$ por los puntos $(0,0)$, (a,b), (c,d) y $(e,0)$ es un paralelogramo, el punto de intersección de sus diagonales es el punto medio de cada una de ellas.

ii) Bajo las mismas hipótesis de i), probar que si las diagonales son perpendiculares, los cuatro lados son iguales.

Ejercicio 16. Sean A_1, A_2 y A_3 en $\mathbb{R}^3$ tres puntos no alineados. Probar que el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, d(x,A_1) = d(x,A_2) = d(x,A_3)\}$$

es una recta ortogonal al plano que contiene a A_1, A_2 y A_3. Calcular S en el caso $A_1 = (1,-1,0)$, $A_2 = (0,1,1)$ y $A_3 = (1,1,2)$.

Ejercicio 17. Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal, para el producto interno canónico, sobre el subespacio $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$.

i) Encontrar una recta $L \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L) = (1,2,1)$. ¿Es única?

ii) Encontrar una recta $L_1 \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L_1) = L_2$ siendo $L_2 : \begin{cases} 2.x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$.

¿Es única?

Ejercicio 18. Hallar en $\mathbb{R}^n$ el complemento ortogonal a M que pasa por A, la proyección ortogonal de A sobre M y $d(A, M)$ en los siguientes casos:

i) $n = 2, \quad M : x_1 - x_2 = 2, \quad A = (2,3)$

ii) $n = 3, \quad M : \begin{cases} 3.x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}, \quad A = (1,0,0)$

iii) $n = 4, \quad M : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2.x_1 - 3.x_4 = 2 \end{cases}, \quad A = (0,2,0,-1)$

Ejercicio 19. Dado en $\mathbb{R}^2$ el triángulo de vértices $A = (2,-3)$, $B = (8,5)$ y $C = (14,11)$, hallar la longitud de la altura que pasa por el vértice A.

Ejercicio 20. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los puntos $O = (0,0)$, $P = (a,b)$ y $Q = (c,d)$. Dichos puntos forman un triángulo isósceles con base $\overline{PQ}$. Probar que la altura correspondiente a la base corta a ésta en su punto medio.

Ejercicio 21. Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A_1 = (1,-1,0)$ y $A_2 = (1,1,1)$. Encontrar tres hiperplanos H tales que $d(A_1, H) = d(A_2, H)$.

Ejercicio 22.

i) Calcular el ángulo entre las rectas de $\mathbb{R}^2$ definidas por $L_1 : x_1 - x_2 = 1$ y $L_2 : x_1 + x_2 = 3$.

ii) Hallar una recta L_3 tal que $\text{Ang}(L_1, L_2) = \text{Ang}(L_2, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

Ejercicio 23. Sea $L \subset \mathbb{R}^3$ la recta $L = < (1,-1,1) > + \ (2,1,0)$. Encontrar un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ tal que $(2,1,0) \in \Pi$ y $\text{Ang}(L, \Pi) = \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 24. Hallar la distancia entre M_1 y M_2 en los siguientes casos:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 + x_3 = 1\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 + x_3 = 3\}$

ii) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 = 1 \,,\, x_1 - x_3 = 0\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,,\, x_3 = 1\}$

iii) $M_1 = < (1,-1,0), (2,1,1) > + \ (1,0,0)$
$M_2 = \{(3,0,1)\}$

iv) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = -2 \,,\, x_2 - 2.x_4 = 2\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,,\, x_2 - 2.x_4 = -8 \,,\, x_1 - x_2 + x_4 = 5\}$

Ejercicio 25. Probar que si M_1 y M_2 son variedades lineales de $\mathbb{R}^n$ con $\dim M_1 \leq \dim M_2$ y $M_1 \parallel M_2$, entonces $d(M_1, M_2) = d(P, M_2)$ para todo $P \in M_1$.

Ejercicio 26. Sea en $\mathbb{R}^2$ la recta L que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(5, 3)$. Determinar una recta $L' \parallel L$ tal que $d(L, L') = 2$.

Ejercicio 27. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L = < (1, 1, 2) >$ y el punto $P = (1, 0, -2)$. Encontrar un plano H ortogonal a L tal que $d(P, H) = \sqrt{6}$.

Ejercicio 28. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L = < (1, 2, -2) > + (0, 2, 0)$ y el punto $P = (1, 2, 2)$. Encontrar ecuaciones implícitas de una recta L' ortogonal a L tal que $d(P, L') = 3$ y $L \cap L' = \emptyset$. ¿Es única?

Ejercicio 29. Sean

$$M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 + x_3 = 1\} \text{ y } M_2 = (1, 1, 1) + < (0, 1, 1), (1, 0, -2) >.$$

Hallar un plano H tal que $M_i \parallel H$ $(i = 1, 2)$ y $d(P_1, H) = d(P_2, H)$.

Ejercicio 30. Sea $L = < (3, 0, -4) > + (1, -1, 0)$. Encontrar una recta L' alabeada con L, tal que $d(L, L') = 2$.

Ejercicio 31.

i) Construir una rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(M_1) = M_2$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $M_1 = \{(1, 2, -1)\}, \quad M_2 = \{(-1, 2, 1)\}$

b) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 = 2,\ x_3 = 1\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 = 1,\ 3.x_2 - x_3 = -4\}$

c) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = 3\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = -3\}$

ii) Encontrar M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^3$ de igual dimensión tales que no haya ninguna rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla $f(M_1) = M_2$.

Ejercicio 32. Sean en $\mathbb{R}^3$ los planos Π_1 y Π_2 definidos por las ecuaciones:

$$\Pi_1 : x_2 - x_3 = 1 \qquad \text{y} \qquad \Pi_2 : x_2 + x_3 = -1.$$

Definir una transformación ortogonal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\Pi_1) = \Pi_2$ y $f(\Pi_2) = \Pi_1$.

Ejercicio 33. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sean Π_1 y Π_2 los planos en $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$\Pi_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 - x_2 + 2x_3 = k\} \quad \text{y} \quad \Pi_2 = < (1, 0, 1), (0, 1, 2) > + (1, -1, 1).$$

Determinar k para que exista una simetría $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\Pi_1) = \Pi_2$. Para ese valor de k hallar dicha simetría y calcular $f(\Pi_2)$.