Capítulo 8

Espacios vectoriales con producto interno

En este capítulo, se generalizarán las nociones geométricas de distancia y perpendicularidad, conocidas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, a otros espacios vectoriales. Sólo se considerarán espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$.

8.1 Producto interno

Algunas nociones geométricas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ pueden definirse a partir del producto escalar. La definición que sigue es una generalización del producto escalar a otros espacios vectoriales.

8.1.1 Definición y ejemplos

Definición 8.1 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (respectivamente $\mathbb{C}$). Un *producto interno sobre* V es una función $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ (respectivamente $\mathbb{C}$) que cumple:

i) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (respectivamente $\mathbb{C}$), y $v, w, z \in V$

- $\Phi(v + w, z) = \Phi(v, z) + \Phi(w, z)$
- $\Phi(\alpha.v, z) = \alpha.\,\Phi(v, z)$

ii) $\Phi(v, w) = \overline{\Phi(w, v)} \;\; \forall\, v, w \in V$.
(Notar que esta condición implica que para cada $v \in V$, $\Phi(v, v) = \overline{\Phi(v, v)}$, es decir que $\Phi(v, v) \in \mathbb{R}$.)

iii) $\Phi(v, v) > 0$ si $v \neq 0$.

Notación. Si Φ es un producto interno, escribiremos $\Phi(v, w) = \langle v, w \rangle$.

Definición 8.2 A un espacio vectorial real (respectivamente complejo) provisto de un producto interno se lo llama un *espacio euclídeo* (respectivamente *espacio unitario*).

Observación 8.3 De las condiciones i) y ii) de la definición de producto interno se deduce que si $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ (respectivamente $\mathbb{C}$) es un producto interno, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (respectivamente $\mathbb{C}$), y $v, w, z \in V$ vale:

$$\begin{aligned} \Phi(v, w + z) &= \Phi(v, w) + \Phi(v, z), \\ \Phi(v, \alpha.w) &= \overline{\alpha}\,.\Phi(v, w). \end{aligned}$$

Ejemplos. Se puede comprobar que las funciones Φ definidas a continuación son productos internos sobre los espacios vectoriales correspondientes:

- Producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$:

$$\Phi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

- Producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$:

$$\Phi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 \overline{y}_1 + \cdots + x_n \overline{y}_n.$$

- Dada $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, denotamos por $B^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ a la matriz transpuesta conjugada de B, es decir, a la matriz definida por $(B^*)_{ij} = \overline{B_{ji}}$. Se define $\Phi : \mathbb{C}^{m\times n} \times \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}$ como

$$\Phi(A, B) = \operatorname{tr}(A.B^*).$$

- Si $a < b \in \mathbb{R}$ y $C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \;/\; f \text{ continua}\}$, se define $\Phi : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ como

$$\Phi(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\; dx.$$

Dado un espacio vectorial V es posible definir distintos productos internos sobre V. En el ejemplo siguiente veremos una familia de productos internos en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + \alpha.\, x_2 y_2$$

Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales Φ es un producto interno.

Es inmediato verificar que, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumplen las condiciones i) y ii) de la definición de producto interno. Veamos para qué valores de α se cumple la condición iii). Se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) &= x_1^2 - 2x_1x_2 + \alpha x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + (\alpha - 1)x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (\alpha - 1)x_2^2 \end{aligned}$$

De esta igualdad se deduce que $\Phi(v, v) > 0 \;\forall\, v \neq 0 \iff \alpha > 1$.

En consecuencia, Φ es un producto interno si y sólo si $\alpha > 1$.

8.1.2 Norma de un vector

La noción que sigue generaliza la de longitud de un vector en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

Definición 8.4 Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (respectivamente $\mathbb{C}$) con producto interno y sea $v \in V$. Se define la *norma* de v asociada a $\langle , \rangle$ (y se nota $\|v\|$) como $\|v\| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Proposición 8.5 *(Propiedades de la norma.) Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno.*

i) Para cada $v \in V$, $\|v\| \geq 0$, y $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$.

ii) Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ (respectivamente $\mathbb{C}$) y $v \in V$. Entonces $\|\alpha.v\| = |\alpha|.\,\|v\|$.

iii) Desigualdad de Cauchy-Schwartz. *Si $v, w \in V$, entonces*

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|.\,\|w\|.$$

iv) Desigualdad triangular. *Si $v, w \in V$, entonces*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Demostración. Las propiedades *i)* e *ii)* se deducen inmediatamente de la definición de norma.

iii) Si $w = 0$, no hay nada que hacer. Supongamos entonces que $w \neq 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w,\ v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w \right\rangle \\
&= \left\langle v, v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w \right\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\left\langle w, v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w \right\rangle \\
&= \langle v, v\rangle - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\|w\|^2}\langle v, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\langle w, v\rangle + \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\|w\|^2}\,\langle w, w\rangle \\
&= \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2}
\end{aligned}$$

Esto implica que $|\langle v, w\rangle|^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2$, de donde se obtiene la desigualdad buscada.

iv) En primer lugar, observamos que

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \langle v + w,\ v + w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} + \langle w, w\rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle v, w\rangle + \|w\|^2.
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Entonces, teniendo en cuenta que $\text{Re}\langle v, w\rangle \leq |\langle v, w\rangle|$ y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, resulta que

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &\leq \|v\|^2 + 2\,|\langle v, w\rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\,\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$. □

La desigualdad de Cauchy-Schwartz vista en ciertos espacios vectoriales con producto interno nos permite obtener distintas propiedades:

Ejemplo. Sean $f, g \in C[a, b]$. Entonces

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)\ dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)\ dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En general, se puede definir una norma en un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ como una función $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ que cumpla las condiciones i), ii) y iv) de la proposición anterior. Una norma cualquiera en este sentido puede no provenir de un producto interno (es decir, puede no haber ningún producto interno tal que la norma asociada sea $\|\ \|$). Un ejemplo de esto es la norma infinito en $\mathbb{R}^n$, definida por $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

Dada una norma, se puede decidir si proviene o no de un producto interno, ya que éste se puede recuperar a partir de su norma asociada:

Proposición 8.6 *(Identidades de polarización.)*

i) *Sea $(V, \langle, \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno. Entonces para cada $v, w \in V$ vale:*

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\|v-w\|^2.$$

ii) *Sea $(V, \langle, \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno. Entonces para cada $v, w \in V$ vale:*

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\|v-w\|^2 + \frac{i}{4}\|v+iw\|^2 - \frac{i}{4}\|v-iw\|^2.$$

Demostración.

i) Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, entonces $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$ y $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$. Entonces

$$\frac{1}{4}\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\|v-w\|^2 = \frac{1}{2}\langle v, w\rangle - \left(\frac{-1}{2}\right)\langle v, w\rangle = \langle v, w\rangle.$$

ii) En forma análoga a lo hecho en *i)*, usando la identidad (8.1), resulta que si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, entonces

$$\frac{1}{4}\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\|v-w\|^2 = \mathrm{Re}\langle v, w\rangle.$$

Por otro lado, $\|v+iw\|^2 = \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle v, iw\rangle + \|iw\|^2 = \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Im}\langle v, w\rangle + \|w\|^2$ y, similarmente, $\|v-iw\|^2 = \|v\|^2 - 2\,\mathrm{Im}\langle v, w\rangle + \|w\|^2$, lo que implica que

$$\frac{i}{4}\|v+iw\|^2 - \frac{i}{4}\|v-iw\|^2 = i\,\mathrm{Im}\langle v, w\rangle.$$

La identidad del enunciado se obtiene haciendo $\langle v, w\rangle = \mathrm{Re}\langle v, w\rangle + i\,\mathrm{Im}\langle v, w\rangle$. □

Una norma cualquiera estará asociada a un producto interno si y sólo si la función que se obtiene mediante estas identidades resulta un producto interno. En lo que sigue, sólo se considerarán normas asociadas a productos internos.

8.1.3 Distancia entre vectores

A partir de la definición de norma de un vector, podemos definir la noción de distancia entre dos vectores.

Definición 8.7 Sea V un $\mathbb{R}$-(o $\mathbb{C}$-) espacio vectorial con producto interno $\langle\, ,\rangle$. Se define $d : V \times V \to \mathbb{R}$ como $d(v, w) = \|v - w\|$.

Utilizando las propiedades de la norma se puede verificar que la función d satisface las siguientes propiedades:

i) $d(v, w) \geq 0\ \forall\, v, w \in V$.

ii) $d(v, w) = 0 \iff v = w$.

iii) $d(v, w) = d(w, v)\ \forall\, v, w \in V$.

iv) $d(v, z) \leq d(v, w) + d(w, z)\ \forall\, v, w, z \in V$.

Dados vectores $v, w \in V$ se dice que $d(v, w)$ es la *distancia* entre v y w.

Dado un conjunto no vacío cualquiera X, puede definirse una distancia en X como cualquier función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que cumpla las propiedades i), ii), iii) y iv) anteriores. Hay distancias en espacios vectoriales que no provienen de ninguna norma. En lo que sigue, sólo trabajaremos con distancias asociadas a normas asociadas a productos internos.

8.1.4 Ángulo entre dos vectores

Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio euclídeo. La desigualdad de Cauchy-Schwartz establece que para todo par de vectores $v, w \in V$ se tiene que $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|.\|w\|$. Si $v, w \neq 0$, resulta entonces que

$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|.\|w\|} \leq 1.$$

Esto nos permite introducir la siguiente noción de ángulo entre dos vectores:

Definición 8.8 Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio euclídeo y sean $v, w \in V$ no nulos. Se define el *ángulo entre v y w* como el único número real $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|.\|w\|}$.

Observamos que si α es el ángulo entre v y w, entonces

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + 2.\cos(\alpha).\|v\|.\|w\| + \|w\|^2, \end{aligned}$$

que es la fórmula conocida como *teorema del coseno.*

8.1.5 Matriz de un producto interno

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita con un producto interno $\langle, \rangle$, fijada una base de V, vamos a construir una matriz asociada al producto interno y a dicha base.

Definición 8.9 Sea V un $\mathbb{R}$-(respectivamente $\mathbb{C}$-) espacio vectorial de dimensión finita, sea $\langle, \rangle$ un producto interno sobre V y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Se define la *matriz del producto interno $\langle, \rangle$ en la base B* como la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (respectivamente $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$) tal que

$$A_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle \qquad \forall\, 1 \leq i, j \leq n.$$

Notación. Escribiremos $|\langle, \rangle|_B$ para denotar la matriz del producto interno $\langle, \rangle$ en la base B.

Observación 8.10 Si A es la matriz de un producto interno, entonces $A_{ij} = \overline{A_{ji}}\ \forall\, i, j$.

Sin embargo, la condición $A_{ij} = \overline{A_{ji}}\ \forall\, i, j$ no es suficiente para que A sea la matriz de un producto interno. Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no puede ser la matriz de un producto interno en una base, ya que si v es el primer vector de la base, sería $\langle v, v\rangle = 0$.

Ejemplo. Para el producto interno en $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + \alpha\, x_2y_2 \qquad (\alpha > 1)$$

(ver página 190) y E la base canónica de $\mathbb{R}^2$, resulta

$$|\langle, \rangle|_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

La matriz de un producto interno en una base B nos permite calcular el producto interno entre cualquier par de vectores:

Proposición 8.11 *Sea V un $\mathbb{R}$-(o $\mathbb{C}$-) espacio vectorial de dimensión finita y sea $\langle, \rangle$ un producto interno sobre V. Sea B una base de V. Entonces, para cada $v, w \in V$, se tiene que*

$$\langle v, w \rangle = (v)_B . \, |\langle, \rangle|_B . \, \overline{(w)_B^t}.$$

Demostración. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Supongamos que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$. Entonces

$$\langle v, w \rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big\langle v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \overline{\beta_j} \langle v_i, v_j \rangle \Big).$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $(v)_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $(w)_B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, resulta que

$$(v)_B . \, |\langle, \rangle|_B . \, \overline{(w)_B^t} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(|\langle, \rangle|_B \overline{(w)_B^t} \Big)_{i1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \langle v_i, v_j \rangle \overline{\beta_j} \Big).$$

Luego $\langle v, w \rangle = (v)_B . \, |\langle, \rangle|_B . \, \overline{(w)_B^t}$. □

8.2 Ortogonalidad

En esta sección generalizaremos la noción conocida de perpendicularidad en $\mathbb{R}^2$ y algunas propiedades que se basan en esta noción, a espacios vectoriales con producto interno arbitrarios.

8.2.1 Conjuntos ortogonales y ortonormales

Definición 8.12 Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Dos vectores $v, w \in V$ se dicen *ortogonales* (o perpendiculares) si $\langle v, w \rangle = 0$.

Observación 8.13 *(Teorema de Pitágoras.)* Si $v, w \in V$ son vectores ortogonales, entonces $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Definición 8.14 Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Se dice que $\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$ es un conjunto *ortogonal* si $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \ \forall \, i \neq j$. El conjunto se dice *ortonormal* si es ortogonal y $\|v_i\| = 1$ para cada $1 \leq i \leq r$.

Ejemplos.

1. En $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) con el producto interno canónico, la base canónica es un conjunto ortonormal:
   - $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.
   - $\|e_i\|^2 = \langle e_i, e_i \rangle = 1$ para cada $1 \leq i \leq n$.
2. En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico, el conjunto $\{(1,1),(1,-1)\}$ es un conjunto ortogonal, pues $\langle (1,1),(1,-1)\rangle = 0$.

   Este conjunto no es ortonormal, ya que $\|(1,1)\| = \sqrt{2} \neq 1$ y $\|(1,-1)\| = \sqrt{2} \neq 1$. A partir de este conjunto podemos hallar uno que es ortonormal dividiendo cada uno de los vectores por su norma: $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$.

Si $(V, \langle , \rangle)$ es un espacio vectorial con producto interno, la matriz de $\langle , \rangle$ en una base ortogonal (u ortonormal) de V es particularmente simple:

Observación 8.15 Si $(V, \langle , \rangle)$ es un espacio vectorial de dimensión n con producto interno, entonces $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V ortogonal para $\langle , \rangle$ si y sólo si

$$|\langle , \rangle|_B = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}.$$

En particular, B es una base ortonormal de V si y sólo si $|\langle , \rangle|_B = I_n$.

Como consecuencia, si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de V se puede calcular fácilmente el producto interno entre dos vectores (y, en particular, la norma de un vector) a partir de sus coordenadas en la base B: si $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$, entonces:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} \quad \text{y} \quad \|v\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposición 8.16 *Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Sea $\{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto ortogonal de V con $v_i \neq 0$ para cada $1 \leq i \leq r$. Entonces $\{v_1, \dots, v_r\}$ es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = 0$. Entonces para cada $1 \leq j \leq r$,

$$0 = \langle 0, v_j \rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, v_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j . \|v_j\|^2,$$

y como $v_j \neq 0$, resulta que $\alpha_j = 0$.

En consecuencia, $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es linealmente independiente. $\square$

Si se tiene una base ortogonal de un subespacio, las coordenadas en esta base de cualquier vector del subespacio pueden encontrarse fácilmente usando el producto interno:

Proposición 8.17 *Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Sea $\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$ un conjunto ortogonal tal que $v_i \neq 0$ para cada $1 \leq i \leq r$ y sea $v \in < v_1, \ldots, v_r >$. Entonces*

$$v = \sum_{j=1}^{r} \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} . v_j .$$

Demostración. Si $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, v_i$, para cada $1 \leq j \leq r$ se tiene que

$$\langle v, v_j \rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, v_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle = \alpha_j \, \|v_j\|^2,$$

de donde se deduce, teniendo en cuenta que $v_j \neq 0$, que $\alpha_j = \dfrac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$. $\square$

Corolario 8.18 *Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto ortonormal de V. Entonces, para cada $v \in < v_1, \ldots, v_r >$, se tiene que*

$$v = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle . \, v_i .$$

Finalmente, combinando este resultado con la Observación 8.15, se obtiene:

Corolario 8.19 *Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto ortonormal de V. Entonces:*

i) Para $v, w \in < v_1, \ldots, v_r >$, $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle . \overline{\langle w, v_i \rangle}$.

ii) Para cada $v \in < v_1, \ldots, v_r >$, $\|v\| = \Big(\sum_{i=1}^{r} |\langle v, v_i \rangle|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$.

En lo que sigue, intentaremos encontrar bases ortonormales en un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Comenzaremos haciendo esto en un ejemplo.

Ejemplo. Se considera en $\mathbb{R}^2$ el producto interno definido por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + \alpha \, x_2 y_2 \qquad (\alpha > 1)$$

(ver página 190). Hallar una base de $\mathbb{R}^2$ ortonormal para este producto interno.

Elegimos un vector en $\mathbb{R}^2$, por ejemplo, $(1, 0)$. Buscamos un vector ortogonal a éste para el producto interno dado, es decir, un vector $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$0 = \langle (1, 0), (y_1, y_2) \rangle = y_1 - y_2,$$

por ejemplo, $(y_1, y_2) = (1, 1)$.

Entonces $\{(1, 0), (1, 1)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ y, por lo tanto, basta normalizar (es decir, dividir por la norma) cada uno de los vectores de esta base. Se tiene que

$$\begin{aligned} \|(1, 0)\| &= 1, \\ \|(1, 1)\| &= \langle (1, 1), (1, 1) \rangle^{\frac{1}{2}} = (1 - 1 - 1 + \alpha)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Luego, $B = \left\{(1, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\right)\right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ para el producto interno dado.

La proposición siguiente asegura que todo espacio vectorial de dimensión finita con producto interno tiene una base ortonormal. Más aún, su demostración da un procedimiento recursivo, conocido como el método de ortonormalización de Gram-Schmidt, que permite obtener una base ortonormal del espacio a partir de una base cualquiera del mismo.

Proposición 8.20 (Método de ortonormalización de Gram-Schmidt) *Sea* $(V, \langle, \rangle)$ *un espacio vectorial con producto interno y sea* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base de* V. *Existe un base ortonormal* $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ *de* V *tal que*

$$< v_1, \ldots, v_k > = < w_1, \ldots, w_k > \qquad \forall\, 1 \le k \le n.$$

Demostración. Se construirá una base ortogonal $\{z_1, \ldots, z_n\}$ de V que cumpla:

$$< z_1, \ldots, z_k > = < v_1, \ldots, v_k > \qquad \forall\, 1 \le k \le n.$$

Normalizando los vectores de esta base se obtendrá la base ortonormal buscada.

Construiremos los vectores de la base recursivamente:

- Tomamos $z_1 = v_1$, que satisface $< z_1 > = < v_1 >$.
- Buscamos $z_2 \in V$ con $\langle z_2, z_1 \rangle = 0$ y tal que $< z_1, z_2 > = < v_1, v_2 >$. Esta segunda condición vale si y sólo si z_2 es de la forma $z_2 = a.v_1 + b.v_2$ con $b \neq 0$. Podemos suponer entonces que $b = 1$, es decir, $z_2 = v_2 + a.v_1$ y buscar a de manera que se cumpla la primera condición:

  $$0 = \langle z_2, z_1 \rangle = \langle v_2 + av_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle + a.\langle v_1, v_1 \rangle,$$

  lo que implica que

  $$a = \frac{-\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}.$$

Luego, el vector

$$z_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}.v_1 = v_2 - \frac{\langle v_2, z_1\rangle}{\|z_1\|^2}.z_1$$

satisface las condiciones requeridas.

- Supongamos construidos $z_1, \dots, z_r \in V$ tales que

  (i) $\langle z_i, z_j\rangle = 0$ si $i \neq j$.

  (ii) $< z_1, \dots, z_k > = < v_1, \dots, v_k > \quad \forall\, 1 \leq k \leq r$.

  Consideramos el vector

$$z_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, z_i\rangle}{\|z_i\|^2}.z_i. \tag{8.2}$$

  Se tiene que:

  a) $< z_1, \dots, z_r, z_{r+1} > = < z_1, \dots, z_r, v_{r+1} > = < v_1, \dots, v_r, v_{r+1} >$,

  b) para cada $j \leq r$

$$\begin{aligned}
\langle z_{r+1}, z_j\rangle &= \left\langle v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, z_i\rangle}{\|z_i\|^2}.z_i, z_j \right\rangle \\
&= \langle v_{r+1}, z_j\rangle - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, z_i\rangle}{\|z_i\|^2}.\, \langle z_i, z_j\rangle \\
&= \langle v_{r+1}, z_j\rangle - \frac{\langle v_{r+1}, z_j\rangle}{\|z_j\|^2}.\, \langle z_j, z_j\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

  Luego, z_{r+1} satisface las condiciones requeridas.

De esta manera, al concluir el n-ésimo paso se obtiene una base ortogonal $\{z_1, \dots, z_n\}$ de V que además satisface $< z_1, \dots, z_k > = < v_1, \dots, v_k >$ para cada $1 \leq k \leq n$.

Finalmente, para cada $1 \leq i \leq n$ consideramos el vector $w_i = \dfrac{z_i}{\|z_i\|}$. Luego el conjunto $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ resulta una base ortonormal de V que cumple lo pedido. □

Corolario 8.21 *Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, y sea S un subespacio de V, $S \neq \{0\}$. Entonces existe una base ortonormal de V que contiene una base ortonormal de S.*

Demostración. Sea $\{s_1, \dots, s_r\}$ una base de S. Existen $v_{r+1}, \dots, v_n \in V$ tales que $B = \{s_1, \dots, s_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt a B se obtiene una base ortonormal $B' = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n\}$ de V que satisface

$$< w_1, \dots, w_r > = < s_1, \dots, s_r > = S.$$

En consecuencia, $\{w_1, \dots, w_r\}$ es una base ortonormal de S incluida en la base ortonormal B' de V. $\square$

Mostramos ahora el método de Gram-Schmidt en un ejemplo:

Ejemplo. Dada la base $B = \{(1, 0, i), (1, 1, 2 + i), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{C}^3$, ortonormalizarla usando el método de Gram-Schmidt.

Notaremos $v_1 = (1, 0, i)$, $v_2 = (1, 1, 2 + i)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$.

- Comenzamos tomando z_1 como el primer vector de la base: $z_1 = (1, 0, i)$.
- Construimos ahora z_2 aplicando la fórmula (8.2) para $r = 1$:

$$\begin{aligned} z_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, z_1\rangle}{\|z_1\|^2}.\, z_1 = (1, 1, 2 + i) - \frac{\langle (1, 1, 2 + i), (1, 0, i)\rangle}{\|(1, 0, i)\|^2}.\, (1, 0, i) \\ &= (1, 1, 2 + i) - (1 - i).\, (1, 0, i) \;=\; (i, 1, 1). \end{aligned}$$

- Finalmente, hallamos z_3 aplicando nuevalmente la fórmula (8.2) para $r = 2$:

$$\begin{aligned} z_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, z_1\rangle}{\|z_1\|^2}.z_1 - \frac{\langle v_3, z_2\rangle}{\|z_2\|^2}.z_2 \\ &= (0, 0, 1) - \frac{\langle (0, 0, 1), (1, 0, i)\rangle}{\|(1, 0, i)\|^2}.\, (1, 0, i) - \frac{\langle (0, 0, 1), (i, 1, 1)\rangle}{\|(i, 1, 1)\|^2}.\, (i, 1, 1) \\ &= (0, 0, 1) + \frac{i}{2}.\, (1, 0, i) - \frac{1}{3}.\, (i, 1, 1) \\ &= \Big(\frac{i}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6}\Big). \end{aligned}$$

El conjunto $\{z_1, z_2, z_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$. Dividiendo cada vector por su norma, obtenemos

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{z_1}{\|z_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\, (1, 0, i) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}\Big) \\ w_2 &= \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\, (i, 1, 1) = \Big(\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) \\ w_3 &= \frac{z_3}{\|z_3\|} = \sqrt{6}.\, \Big(\frac{i}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6}\Big) = \Big(\frac{\sqrt{6}i}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\Big) \end{aligned}$$

tales que $\{w_1, w_2, w_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^3$ que cumple $< v_1 > \;=\; < w_1 >$ y $< v_1, v_2 > = < w_1, w_2 >$.

8.2.2 Complemento ortogonal

Definición 8.22 Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno, y sea $S \subseteq V$ un conjunto. Se define el *complemento ortogonal* de S como

$$S^{\perp} = \{v \in V : \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall\, s \in S\}.$$

Observación 8.23 $S^{\perp}$ es un subespacio de V:

i) $0 \in S^{\perp}$, pues $\langle 0, s \rangle = 0$ para todo $s \in S$.

ii) Sean $v, w \in S^{\perp}$. Para cada $s \in S$, se tiene que $\langle v, s \rangle = 0$ y $\langle w, s \rangle = 0$, con lo que $\langle v + w, s \rangle = \langle v, s \rangle + \langle w, s \rangle = 0 + 0 = 0$. Luego, $v + w \in S^{\perp}$.

iii) Si $v \in S^{\perp}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), entonces para cada $s \in S$ vale $\langle \lambda.\, v, s \rangle = \lambda.\langle v, s \rangle = \lambda.\, 0 = 0$. Luego, $\lambda.\, v \in S^{\perp}$.

Ejemplos.

1. En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico:

$$\begin{aligned} \{(1,1)\}^{\perp} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \langle (x,y), (1,1) \rangle = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = 0\} \\ &= <(1,-1)> . \end{aligned}$$

2. En $\mathbb{C}^3$ con el producto interno canónico:

$$\begin{aligned} <(1, i, 1+i)>^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,/\, \langle (x,y,z), (\alpha, \alpha i, \alpha(1+i)) \rangle = 0 \;\forall\, \alpha \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,/\, \overline{\alpha}\,(x.1 + y(-i) + z(1-i)) = 0 \;\forall\, \alpha \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,/\, x - iy + (1-i)z = 0\} \\ &= <(i,1,0), (i-1,0,1)>. \end{aligned}$$

En el caso en que S es un *subespacio* de V, se tiene el siguiente resultado, cuya demostración provee un método para hallar $S^{\perp}$.

Proposición 8.24 *Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, y sea $S \subseteq V$ un subespacio. Entonces:*

i) $S \cap S^{\perp} = \{0\}$.

ii) $\dim(S) + \dim(S^{\perp}) = \dim V$.

En consecuencia, $S \oplus S^{\perp} = V$.

Demostración.

i) Sea $x \in S \cap S^{\perp}$. Como $x \in S^{\perp}$, para cada $s \in S$, se tiene que $\langle x, s\rangle = 0$. En particular, tomando $s = x \in S$, resulta que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0$, de donde $x = 0$.

ii) Sea $\{s_1, \ldots, s_r\}$ una base de S. Existen $v_{r+1}, \ldots, v_n \in V$ tales que

$$\{s_1, \ldots, s_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$$

es una base de V. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt a esta base se obtiene una base ortonormal de V, $B = \{w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_n\}$, que además cumple

$$< w_1, \ldots, w_r > = < s_1, \ldots, s_r > = S.$$

Sea $j > r$. Veamos que $w_j \in S^{\perp}$. Dado $s \in S$, existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tales que $s = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i w_i$. Entonces

$$\langle w_j, s\rangle = \Big\langle w_j, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i \Big\rangle = \sum_{i=1}^{r} \overline{\alpha_i} \langle w_j, w_i\rangle = 0,$$

ya que, como la base B es ortogonal y $j > r$, se tiene que $\langle w_j, w_i\rangle = 0$ para cada $1 \le i \le r$. En consecuencia, $w_j \in S^{\perp}$.

Se tiene entonces que $w_{r+1}, \ldots, w_n \in S^{\perp}$, con lo que $< w_{r+1}, \ldots, w_n > \subseteq S^{\perp}$ (pues $S^{\perp}$ es un subespacio) y, por lo tanto,

$$\dim(S^{\perp}) \ge \dim(< w_{r+1}, \ldots, w_n >) = n - r = n - \dim(S),$$

es decir, $\dim(S) + \dim(S^{\perp}) \ge n$. Por otro lado, como $S \cap S^{\perp} = \{0\}$,

$$\dim(S) + \dim(S^{\perp}) = \dim(S + S^{\perp}) \le \dim(V) = n.$$

Entonces $\dim(S) + \dim(S^{\perp}) = \dim(V)$. Más aún, de la demostración se deduce también que $S^{\perp} = < w_{r+1}, \ldots, w_n >$. □

Ejemplo. Sea $S = < (1, 0, i), (1, 1, 2 + i) > \subseteq \mathbb{C}^3$. En el ejemplo de la página 200, hallamos una base ortonormal $\{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{C}^3$ con la propiedad de que $\{w_1, w_2\}$ es una base de S. Entonces, la demostración del ítem *ii)* de la proposición anterior nos dice que $S^{\perp} = < w_3 > = \Big\langle \Big(\frac{\sqrt{6}i}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6} \Big) \Big\rangle$.

Proposición 8.25 *Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, y sea S un subespacio de V. Entonces $(S^{\perp})^{\perp} = S$.*

Demostración. Por definición, $(S^{\perp})^{\perp} = \{v \in V \,/\, \langle v, t\rangle = 0 \;\forall\, t \in S^{\perp}\}$.

Veamos que $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$: Sea $s \in S$. Para cada $t \in S^{\perp}$ se tiene que $\langle s, t\rangle = \overline{\langle t, s\rangle} = 0$, de donde se deduce que $s \in (S^{\perp})^{\perp}$.

Por otro lado, por la proposición anterior, $\dim((S^{\perp})^{\perp}) = \dim S$, y por lo tanto, vale la igualdad $S = (S^{\perp})^{\perp}$. $\square$

Ejemplo. Hallar el complemento ortogonal del subespacio

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + ix_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ (1-i)x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

para el producto interno canónico.

Observamos que la condición $x_1+ix_2+x_3-x_4 = 0$ puede reescribirse, utilizando el producto interno canónico de $\mathbb{C}^4$, en la forma $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1, -i, 1, -1)\rangle = 0$. Análogamente, la ecuación $(1 - i)x_2 + x_3 = 0$ puede reescribirse como $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (0, 1 + i, 1, 0)\rangle = 0$.

Concluimos entonces que $S = < (1, -i, 1, -1), (0, 1 + i, 1, 0) >^{\perp}$ y, por lo tanto, aplicando la proposición anterior resulta que

$$S^{\perp} = (< (1, -i, 1, -1), (0, 1 + i, 1, 0) >^{\perp})^{\perp} = < (1, -i, 1, -1), (0, 1 + i, 1, 0) >.$$

8.2.3 Proyección ortogonal

Dado un subespacio S de un espacio vectorial V de dimensión finita con producto interno, como $S \oplus S^{\perp} = V$, se puede considerar el proyector $p_S : V \to V$ cuya imagen es S y cuyo núcleo es $S^{\perp}$ (ver Sección 3.4).

Definición 8.26 Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea $S \subseteq V$ un subespacio. Se define la *proyección ortogonal sobre* S como la transformación lineal $p_S : V \to V$ que satisface:

$$\begin{array}{rcll} p_S(s) & = & s & \forall s \in S \\ p_S(t) & = & 0 & \forall t \in S^{\perp} \end{array}$$

Observamos que si $B = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de V tal que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una base de S y $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base de $S^{\perp}$, la proyección ortogonal sobre S es la única transformación lineal $p_S : V \to V$ que satisface:

$$p_S(v_i) = v_i \quad \forall\, 1 \le i \le r \qquad \text{y} \qquad p_S(v_i) = 0 \quad \forall\, r + 1 \le i \le n.$$

En consecuencia, para cada $v \in V$, recordando que $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle .\, v_i$, resulta que

$$p_S(v) = p_S\Big(\sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle .\, v_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle .\, p_S(v_i) = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i\rangle .\, v_i,$$

lo que nos da una expresión para $p_S(v)$ en términos de los vectores de la base ortonormal de S.

Ejemplo. Sea S el subespacio de $\mathbb{C}^3$ dado por $S = <(1,0,i),(1,1,2+i)>$. Hallar la proyección ortogonal $p_S : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$.

De acuerdo a lo calculado en el ejemplo de la página 200, el conjunto

$$B_S = \Big\{ \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}\Big), \Big(\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) \Big\}$$

es una base ortonormal de S. Entonces, para cada $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, vale

$$\begin{aligned} p_S(x) &= \Big\langle x, \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}\Big)\Big\rangle . \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}\Big) + \Big\langle x, \Big(\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big\rangle . \Big(\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) \\ &= \Big(\frac{x_1 - ix_3}{2}, 0, \frac{ix_1 + x_3}{2}\Big) + \Big(\frac{x_1 + ix_2 + ix_3}{3}, \frac{-ix_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{-ix_1 + x_2 + x_3}{3}\Big) \\ &= \Big(\frac{5}{6}\,x_1 + \frac{i}{3}\,x_2 - \frac{i}{6}\,x_3,\ \frac{-i}{3}\,x_1 + \frac{1}{3}\,x_2 + \frac{1}{3}\,x_3,\ \frac{i}{6}\,x_1 + \frac{1}{3}\,x_2 + \frac{5}{6}\,x_3\Big). \end{aligned}$$

Notar que si $\{w_1, \dots, w_r\}$ es una base ortogonal de S, de la fórmula hallada más arriba para p_S se desprende que $p_S(v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i$ para cada $v \in V$.

Observación 8.27 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea S un subespacio de V. Entonces $p_S + p_{S^\perp} = id_V$.*

En efecto, si $B = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de V tal que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una base de S y $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base de $S^\perp$, para cada $v \in V$ se tiene que $p_S(v) = \sum\limits_{i=1}^{r} \langle v, v_i\rangle . \, v_i$ y $p_{S^\perp}(v) = \sum\limits_{i=r+1}^{n} \langle v, v_i\rangle . \, v_i$. Entonces $p_S(v) + p_{S^\perp}(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle . \, v_i = v$.

8.2.4 Distancia de un punto a un subespacio

A continuación nos concentraremos en el estudio del siguiente problema: dado un subespacio S de un espacio vectorial V de dimensión finita con producto interno y un punto $p \in V$, encontrar, si es posible, el punto de S que se encuentra a menor distancia de p. Por ejemplo, si S es una recta en $\mathbb{R}^2$, dicho punto es el único $s \in S$ tal que el segmento de s a p es perpendicular a S. En lo que sigue, generalizamos esta idea a un espacio vectorial y un subespacio arbitrarios.

Comenzamos introduciendo el concepto de distancia de un punto a un conjunto.

Definición 8.28 Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y sea $S \subseteq V$. Para cada $v \in V$ se define la *distancia de v a S* como

$$d(v, S) = \inf\{d(v, s) : s \in S\} = \inf\{\|v - s\| : s \in S\}.$$

La proyección ortogonal nos permitirá resolver el problema enunciado al comienzo y calcular la distancia de un punto a un subespacio.

Proposición 8.29 *Sea* $(V, \langle , \rangle)$ *un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea* $S \subseteq V$ *un subespacio. Entonces para cada* $v \in V$*,* $d(v, S) = \|v - p_S(v)\|$*. En otras palabras, el punto de* S *a menor distancia de* v *es* $p_S(v)$*.*

Demostración. Sea $B = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V tal que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una base de S.

Sea $v \in V$. Se tiene que $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle .\, v_i$ y $p_S(v) = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i\rangle .\, v_i$. Por otro lado, para cada $s \in S$, vale $s = \sum_{i=1}^{r} \langle s, v_i\rangle . v_i$. Entonces

$$v - s = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle .\, v_i - \sum_{i=1}^{r} \langle s, v_i\rangle .\, v_i = \sum_{i=1}^{r} \langle v - s, v_i\rangle .\, v_i + \sum_{i=r+1}^{n} \langle v, v_i\rangle .\, v_i$$

y, en consecuencia,

$$\|v - s\|^2 = \sum_{i=1}^{r} |\langle v - s, v_i\rangle|^2 + \sum_{i=r+1}^{n} |\langle v, v_i\rangle|^2 \geq \sum_{i=r+1}^{n} |\langle v, v_i\rangle|^2.$$

Además, la igualdad vale si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{r} |\langle v - s, v_i\rangle|^2 = 0 \iff |\langle v - s, v_i\rangle| = 0 \ \forall\, 1 \leq i \leq r \iff \langle s, v_i\rangle = \langle v, v_i\rangle \ \forall\, 1 \leq i \leq r,$$

es decir, para

$$s = \sum_{i=1}^{r} \langle s, v_i\rangle . v_i = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i\rangle .\, v_i = p_S(v).$$

Luego, el punto de S a menor distancia de v es $p_S(v)$ y $d(v, S) = \|v - p_S(v)\|$. □

Como consecuencia de la Observación 8.27 y de la proposición anterior se deduce:

Observación 8.30 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea S un subespacio de V. Entonces, para cada $v \in V$, vale $d(v, S) = \|p_{S^\perp}(v)\|$.

Ejemplo. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Hallar la distancia de $(1, -1, 2)$ a S y el punto de S más cercano a $(1, 1, 2)$.

Sabemos que $d((1, -1, 2), S) = \|p_{S^\perp}(1, -1, 2)\|$. Calculamos entonces $p_{S^\perp}(1, -1, 2)$.

En primer lugar, observemos que $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, (2, 2, -1)\rangle = 0\} = < (2, 2, -1) >^\perp$, de donde $S^\perp = < (2, 2, -1) >$. Luego, $\{(2, 2, -1)\}$ es una base (ortogonal) de $S^\perp$. Entonces

$$p_{S^\perp}(1, -1, 2) = \frac{\langle (1, -1, 2), (2, 2, -1)\rangle}{\|(2, 2, -1)\|^2} .\, (2, 2, -1) = \frac{-2}{9} .\, (2, 2, -1) = \Big(\frac{-4}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{2}{9}\Big),$$

y
$$d((1,-1,2),S) = \|p_{S^\perp}(1,-1,2)\| = \left\| \left(\frac{-4}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{2}{9}\right) \right\| = \frac{2}{3}.$$

El punto de S más cercano a $(1,-1,2)$ es $p_S(1,-1,2)$, que podemos calcular como
$$p_S(1,-1,2) = (1,-1,2) - p_{S^\perp}(1,-1,2) = (1,-1,2) - \left(\frac{-4}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{2}{9}\right) = \left(\frac{13}{9}, \frac{-5}{9}, \frac{16}{9}\right).$$

8.3 Endomorfismos en espacios vectoriales con producto interno

8.3.1 Adjunta de una transformación lineal

En lo que sigue, le asociaremos a cada endomorfismo f de un espacio vectorial V de dimensión finita con producto interno, otra transformación lineal $f^* : V \to V$.

Definición 8.31 Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Se llama *adjunta de* f, y se nota f^*, a una transformación lineal $f^* : V \to V$ tal que
$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle \quad \forall\, v, w \in V.$$

Ejemplo. Consideremos $\mathbb{C}^2$ con el producto interno canónico. Sea $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación lineal definida por $f(x,y) = (x+iy, 2x-(1+i)y)$. Se tiene que
$$\begin{aligned}
\langle f(x,y), (z,w)\rangle &= \langle (x+iy, 2x-(1+i)y), (z,w)\rangle \\
&= (x+iy)\,\overline{z} + (2x-(1+i)y)\,\overline{w} \\
&= x\,(\overline{z}+2\overline{w}) + y\,(i\overline{z}-(1+i)\overline{w}) \\
&= x\,\overline{(z+2w)} + y\,\overline{(-iz+(-1+i)w)} \\
&= \langle (x,y), (z+2w, -iz+(-1+i)w)\rangle.
\end{aligned}$$

Entonces, la función $f^* : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $f^*(z,w) = (z+2w, -iz+(-1+i)w)$ satisface $\langle f(x,y),(z,w)\rangle = \langle (x,y), f^*(z,w)\rangle$ para todo par de vectores (x,y), (z,w) en $\mathbb{C}^2$.

Observar que, si E es la base canónica de $\mathbb{C}^2$, entonces
$$|f|_E = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |f^*|_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -i & -1+i \end{pmatrix},$$
y, por lo tanto, $|f^*|_E$ es la matriz transpuesta y conjugada de $|f|_E$.

El siguiente resultado prueba la existencia y unicidad de la adjunta para endomorfismos en espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno.

Proposición 8.32 *Sea* $(V, \langle , \rangle)$ *un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea* $f : V \to V$ *una transformación lineal. Entonces existe una única transformación lineal* $f^* : V \to V$ *que satisface* $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle \; \forall\, v, w \in V$.

Demostración.
Unicidad. Supongamos que $f^* : V \to V$ y $\widetilde{f^*} : V \to V$ son dos transformaciones lineales que verifican la propiedad del enunciado.

Fijemos $w \in V$. Para cada $v \in V$, se tiene que

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle \quad \text{y} \quad \langle f(v), w\rangle = \langle v, \widetilde{f^*}(w)\rangle.$$

Entonces $\langle v, f^*(w)\rangle - \langle v, \widetilde{f^*}(w)\rangle = 0$ para todo $v \in V$ o, equivalentemente,

$$\langle v, \, f^*(w) - \widetilde{f^*}(w)\rangle = 0 \quad \forall\, v \in V.$$

En particular, tomando $v = f^*(w) - \widetilde{f^*}(w)$ resulta que $\langle f^*(w) - \widetilde{f^*}(w), \, f^*(w) - \widetilde{f^*}(w)\rangle = 0$, lo que implica que $f^*(w) - \widetilde{f^*}(w) = 0$. Luego, $f^*(w) = \widetilde{f^*}(w)$.

Como esto vale para cada $w \in V$, concluimos que $f^* = \widetilde{f^*}$.

Existencia. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Si existe $f^* : V \to V$ con las condiciones del enunciado, para cada $w \in V$ debe cumplirse

$$f^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle f^*(w), v_i\rangle \, v_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle v_i, f^*(w)\rangle} \, v_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle f(v_i), w\rangle} \, v_i = \sum_{i=1}^{n} \langle w, f(v_i)\rangle \, v_i.$$

Definimos entonces $f^* : V \to V$ como $f^*(w) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle w, f(v_i)\rangle \, v_i$.

Veamos que la función f^* que definimos es una transformación lineal que cumple la propiedad del enunciado:

- f^* es una transformación lineal:

  – Para $w, w' \in V$, se tiene que

$$\begin{aligned} f^*(w + w') &= \sum_{i=1}^{n} \langle w + w', f(v_i)\rangle \, v_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} (\langle w, f(v_i)\rangle + \langle w', f(v_i)\rangle) \, v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle w, f(v_i)\rangle \, v_i + \sum_{i=1}^{n} \langle w', f(v_i)\rangle \, v_i \;=\; f^*(w) + f^*(w'). \end{aligned}$$

  – Para $\lambda \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$), $w \in V$, vale

$$f^*(\lambda\, w) = \sum_{i=1}^{n} \langle \lambda w, f(v_i)\rangle \, v_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda \, \langle w, f(v_i)\rangle \, v_i = \lambda \, f^*(w).$$

- Para todo par de vectores $v, w \in V$, vale $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle$:

  Sean $v, w \in V$. Se tiene que $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle\, v_i$ y entonces $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle\, f(v_i)$. Observamos que

  $$\langle f(v), w\rangle \;=\; \Big\langle \sum_{i=1}^{n}\langle v, v_i\rangle f(v_i),\, w\Big\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle v, v_i\rangle\,\langle f(v_i), w\rangle.$$

  Por otro lado,

  $$\begin{aligned}\langle v, f^*(w)\rangle &= \Big\langle \sum_{i=1}^{n}\langle v, v_i\rangle\, v_i,\, \sum_{j=1}^{n}\langle w, f(v_j)\rangle\, v_j\Big\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle v, v_i\rangle\Big\langle v_i,\, \sum_{j=1}^{n}\langle w, f(v_j)\rangle\, v_j\Big\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle v, v_i\rangle\Big(\sum_{j=1}^{n}\overline{\langle w, f(v_j)\rangle}\langle v_i, v_j\rangle\Big) = \sum_{i=1}^{n}\langle v, v_i\rangle\overline{\langle w, f(v_i)\rangle} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle v, v_i\rangle\,\langle f(v_i), w\rangle.\end{aligned}$$

  Concluimos entonces que $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle$. □

A partir de la matriz de un endomorfismo $f : V \to V$ en una base ortonormal de V, puede obtenerse fácilmente la matriz de su adjunta en la misma base:

Proposición 8.33 *Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Sea B una base ortonormal de V. Entonces $|f^*|_B = (|f|_B)^*$.*

Demostración. Supongamos que $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es la base ortonormal dada de V. Entonces, para cada $1 \le i, j \le n$,

$$(|f^*|_B)_{ij} = \langle f^*(v_j), v_i\rangle = \overline{\langle v_i, f^*(v_j)\rangle} = \overline{\langle f(v_i), v_j\rangle} = (\overline{|f|_B})_{ji} = ((|f|_B)^*)_{ij},$$

de donde concluimos que $|f^*|_B = (|f|_B)^*$. □

Este resultado puede utilizarse para hallar la adjunta de una transformación lineal:

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (x + iy - iz, (2 + i)x + iy + z, (1 + i)y + 2z).$$

Hallar f^* para el producto interno canónico de $\mathbb{C}^3$.

Consideremos la base canónica E de $\mathbb{C}^3$, que es una base ortonormal para el producto interno canónico. Se tiene que

$$|f|_E = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 2+i & i & 1 \\ 0 & 1+i & 2 \end{pmatrix}.$$

Por la proposición anterior,

$$|f^*|_E = (|f|_E)^* = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ -i & -i & 1-i \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego, $f^*(x, y, z) = (x + (2 - i)y, -ix - iy + (1 - i)z, ix + y + 2z)$.

8.3.2 Transformaciones autoadjuntas y matrices hermitianas

En esta sección estudiaremos una clase particular de transformaciones lineales en espacios con producto interno: las transformaciones lineales $f : V \to V$ cuya adjunta coincide con f.

Definición 8.34 Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Se dice que f es *autoadjunta* si $f^* = f$.

Esta definición puede reescribirse en términos de la transformación lineal y el producto interno del espacio considerado:

Observación 8.35 Una transformación lineal $f : V \to V$ es autoadjunta si y sólo si

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \qquad \forall\, x, y \in V.$$

En lo que sigue veremos que la matriz de una transformación lineal autoadjunta en una base ortonormal tiene cierta estructura particular. Más precisamente, las matrices involucradas serán del siguiente tipo:

Definición 8.36 Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *simétrica* si $A_{ij} = A_{ji}$ $\forall\, 1 \le i, j \le n$ o, equivalentemente, si $A = A^t$. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice *hermitiana* si $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ $\forall\, 1 \le i, j \le n$ o, equivalentemente, si $A = A^*$.

Proposición 8.37 *Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Son equivalentes:*

i) f es autoadjunta.

ii) $\forall\, B$ base ortonormal de V, $|f|_B$ es hermitiana.

iii) $\exists\, B$ base ortonormal de V tal que $|f|_B$ es hermitiana.

Demostración. La equivalencia de los tres enunciados se deduce de la Proposición 8.33 y la definición de transformación lineal autoadjunta. □

Diagonalización de transformaciones lineales autoadjuntas

A continuación nos concentraremos en el estudio de la diagonalización de transformaciones lineales autoadjuntas. Probaremos que si $f : V \to V$ es una transformación lineal autoadjunta, entonces f es diagonalizable. Más aún, veremos que existe una base ortonormal de V formada por autovectores de f y que todos sus autovalores son reales.

Comenzamos con el estudio de los autovalores:

Proposición 8.38 *Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal autoadjunta. Entonces, el polinomio característico de f tiene todas sus raíces en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Consideraremos por separado los casos en que f está definida en un $\mathbb{C}$-espacio vectorial o en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

- Si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial:

  Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ una raíz de $\mathcal{X}_f$. Entonces, λ es un autovalor de f. Sea $v \in V$ un autovector de f de autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$. Se tiene que

  $$\lambda \,.\, \|v\|^2 = \lambda \,.\, \langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle f(v), v\rangle = \langle v, f(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda} \,.\, \|v\|^2.$$

  Como $\|v\| \neq 0$, resulta que $\lambda = \bar{\lambda}$, es decir, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial:

  Sea B una base ortonormal de V y sea $A = |f|_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Como f es autoadjunta, A es una matriz simétrica.

  Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es raíz del polinomio característico de f, entonces $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor de A considerada como matriz en $\mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces existe $x \in \mathbb{C}^n$ autovector de A asociado al autovalor λ. Si consideramos $\mathbb{C}^n$ con el producto interno canónico, entonces

  $$\lambda \,.\, \|x\|^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda} \,.\, \|x\|^2,$$

  de donde $\lambda = \bar{\lambda}$ y, por lo tanto $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Esta proposición nos dice, en particular:

Observación 8.39 Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermitiana. Entonces todas las raíces del polinomio característico de A son reales.

Probamos ahora un resultado sobre diagonalización de transformaciones lineales autoadjuntas:

Teorema 8.40 *Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal autoadjunta. Entonces existe una base ortonormal B de V tal que $|f|_B$ es diagonal real.*

Demostración. Por inducción en $n = \dim V$:

Para $n = 1$, el resultado es inmediato.

Sea $n = \dim V > 1$ y supongamos que la propiedad vale para transformaciones lineales autoadjuntas definidas en espacios de dimensión $n - 1$.

Sea $f : V \to V$ una transformación lineal autoadjunta.

Por la proposición anterior, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de f. Sea v un autovector asociado al autovalor λ y sea $w = \frac{v}{\|v\|}$, que es un autovector de norma 1 asociado al mismo autovalor.

Sea $S = < w >^\perp$. Se tiene que S es un subespacio de V con $\dim S = n - 1$. Además, S es f-invariante, puesto que para cada $x \in S$ se tiene que

$$\langle f(x), w\rangle = \langle x, f(w)\rangle = \langle x, \lambda w\rangle = \lambda\langle x, w\rangle = 0,$$

de donde $f(x) \in < w >^\perp = S$.

Consideremos S con el producto interno obtenido por la restricción a S del producto interno de V, y la transformación lineal $f_{|S} : S \to S$, que resulta autoadjunta. Por hipótesis inductiva, existe una base ortonormal B' de S tal que $|f_{|S}|_{B'}$ es diagonal real.

Sea $B = \{w\} \cup B'$. Entonces, B es una base ortonormal de V y

$$|f|_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & |f_{|S}|_{B'} \end{pmatrix}$$

es una matriz diagonal real. $\square$

A partir de este teorema es posible deducir un resultado análogo sobre diagonalización de matrices hermitianas:

Observación 8.41 Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermitiana. Entonces, si se considera $\mathbb{C}^n$ con el producto interno canónico, la transformación lineal $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, definida por $f_A(x) = A.x$, es autoadjunta y, si E es la base canónica de $\mathbb{C}^n$, $|f_A|_E = A$.

Por la proposición anterior, existe una base ortonormal B de $\mathbb{C}^n$ tal que $|f_A|_B = D$ es diagonal real. Entonces

$$C(B, E)^{-1}. A. C(B, E) = D.$$

Además, como E y B son bases ortonormales de $\mathbb{C}^n$, la matriz de cambio de base satisface:

$$(C(B, E)^{-1})_{ij} = C(E, B)_{ij} = \langle e_j, v_i\rangle = \overline{\langle v_i, e_j\rangle} = \overline{C(B, E)_{ji}} = (C(B, E)^*)_{ij}$$

para todo $1 \le i, j \le n$. En consecuencia, $C(B, E)^{-1} = C(B, E)^*$.

Análogamente, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica, la transformación lineal $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es autoadjunta para el producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$ y, por lo tanto, existe una base ortonormal B de $\mathbb{R}^n$ tal que $|f_A|_B = D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonal. En este caso, la matriz de cambio de base que da la igualdad $C(B, E)^{-1}. A. C(B, E) = D$ cumple: $C(B, E)^{-1} = C(B, E)^t$.

Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 8.42 Una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice *unitaria* si es inversible y $U^{-1} = U^*$. Una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *ortogonal* si es inversible y $O^{-1} = O^t$.

Utilizando esta definición, la Observación 8.41 puede resumirse como sigue:

Corolario 8.43 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermitiana. Entonces existe una matriz unitaria $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $C^*.A.C$ es diagonal real.*

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Entonces existe una matriz ortogonal $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $O^t.A.O$ es diagonal.

El hecho que la matriz de cambio de base de una base ortonormal B de $\mathbb{C}^n$ (respectivamente $\mathbb{R}^n$) a la base canónica de $\mathbb{C}^n$ (respectivamente $\mathbb{R}^n$) es una matriz unitaria (respectivamente ortogonal) vale también para dos bases ortonormales cualesquiera:

Observación 8.44 Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sean B y B' bases ortonormales de V. Entonces $C(B, B')$ es una matriz unitaria (u ortogonal).

Supongamos que $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$. Entonces, para cada $1 \le i, j \le n$, vale

$$(C(B, B')^{-1})_{ij} = C(B', B)_{ij} = \langle w_j, v_i\rangle = \overline{\langle v_i, w_j\rangle} = \overline{C(B, B')_{ji}} = (C(B, B')^*)_{ij},$$

de donde $C(B, B')^{-1} = C(B, B')^*$, es decir, $C(B, B')$ es una matriz unitaria.

8.3.3 Transformaciones unitarias y ortogonales

En esta sección estudiaremos los endormorfismos de un espacio vectorial $(V, \langle, \rangle)$ que preservan el producto interno y, en particular, las distancias entre vectores. El siguiente teorema caracteriza dichos endomorfismos.

Teorema 8.45 *Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Son equivalentes:*

i) Existe una base ortonormal B de V tal que $f(B)$ es una base ortonormal de V.

ii) $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle \ \forall\, v, w \in V$.

iii) Para toda base ortonormal B de V, $f(B)$ es una base ortonormal de V.

iv) $\|f(v)\| = \|v\| \ \forall\, v \in V$.

v) $f^* \circ f = f \circ f^* = id_V$.

Definición 8.46 Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Una transformación lineal $f : V \to V$ que cumple las condiciones equivalentes del Teorema 8.45 se dice *unitaria* si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, u *ortogonal* si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Demostración del Teorema 8.45. Probaremos que $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$, $ii) \Leftrightarrow iv)$ y $ii) \Leftrightarrow v)$.

$i) \Rightarrow ii)$ Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V tal que $f(B) = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es también una base ortonormal de V. Entonces, si $v, w \in V$ con $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$, como B y $f(B)$ son bases ortonormales de V, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} \\ \langle f(v), f(w)\rangle &= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j f(v_j) \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}, \end{aligned}$$

de donde $\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Consideramos el conjunto $f(B) = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle f(v_i), f(v_i)\rangle &= \langle v_i, v_i\rangle = 1 \quad \forall\, 1 \le i \le n \\ \langle f(v_i), f(v_j)\rangle &= \langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad \forall\, 1 \le i, j \le n,\ i \ne j. \end{aligned}$$

Luego, $f(B)$ es una base ortonormal de V.

$iii) \Rightarrow i)$ No hay nada que probar.

$ii) \Rightarrow iv)$ Para cada $v \in V$, se tiene que $\|f(v)\| = \langle f(v), f(v)\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}} = \|v\|$, donde la segunda igualdad es consecuencia de la hipótesis *ii)*.

$iv) \Rightarrow ii)$ Sean $v, w \in V$. Aplicando la primera de las identidades de polarización (ver Proposición 8.6) resulta, si V es un espacio vectorial real,

$$\begin{aligned} \langle f(v), f(w)\rangle &= \frac{1}{4}\|f(v) + f(w)\|^2 - \frac{1}{4}\|f(v) - f(w)\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|f(v + w)\|^2 - \frac{1}{4}\|f(v - w)\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|v + w\|^2 - \frac{1}{4}\|v - w\|^2 \\ &= \langle v, w\rangle. \end{aligned}$$

En el caso en que V es un espacio vectorial complejo, la igualdad se prueba análogamente utilizando la segunda de las identidades de polarización.

$ii) \Rightarrow v)$ Sea $v \in V$. Para cada $w \in V$, se tiene que

$$\langle f^* \circ f(v),\, w\rangle = \langle f^*(f(v)),\, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle,$$

lo que implica que $\langle f^* \circ f(v) - v,\, w\rangle = 0$. Tomando $w = f^* \circ f(v) - v$, resulta que $\langle f^* \circ f(v) - v, f^* \circ f(v) - v\rangle = 0$, de donde concluimos que $f^* \circ f(v) = v$.

En consecuencia, $f^* \circ f = id_V$. Como V es de dimensión finita, esto implica que también vale $f \circ f^* = id_V$.

$v) \Rightarrow ii)$ Para $v, w \in V$, se tiene que $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, f^*(f(w))\rangle = \langle v,\, f^* \circ f(w)\rangle = \langle v,\, id_V(w)\rangle = \langle v, w\rangle$. □

La proposición siguiente nos da la relación entre transformaciones lineales unitarias (ortogonales) y matrices unitarias (ortogonales).

Proposición 8.47 *Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea B una base ortonormal de V. Sea $f : V \to V$ una trasformación lineal. Entonces*

$$f \text{ es unitaria (ortogonal)} \iff |f|_B \text{ es unitaria (ortogonal).}$$

Demostración. Haremos la demostración para transformaciones lineales y matrices unitarias (el otro caso es totalmente análogo). Sea $n = \dim V$.

($\Rightarrow$) Si f es unitaria, entonces $f^* \circ f = f \circ f^* = id_V$. Para una base ortonormal B de V se tiene que

$$I_n = |f^* \circ f|_B = |f^*|_B \cdot |f|_B = (|f|_B)^* \cdot |f|_B.$$

En consecuencia, $|f|_B$ es inversible y $(|f|_B)^{-1} = (|f|_B)^*$, con lo que es una matriz unitaria.

($\Leftarrow$) Si $|f|_B$ es unitaria, $|f|_B^{-1} = (|f|_B)^*$, de donde resulta que $|f^* \circ f|_B = |f \circ f^*|_B = I_n$ y, por lo tanto, $f^* \circ f = f \circ f^* = id_V$. □

8.3.4 Clasificación de transformaciones ortogonales

Para terminar, estudiaremos más en detalle las transformaciones ortogonales en un espacio euclídeo V. Veremos que dada $f : V \to V$ ortogonal, existe una base ortonormal de V en la que la matriz de f tiene cierta estructura particular. Esto nos permitirá clasificar las transformaciones ortogonales.

A lo largo de esta sección, V denotará un espacio euclídeo, es decir, un espacio vectorial real de dimensión finita con producto interno.

En primer lugar, probamos dos resultados acerca de los autovalores de una transformación ortogonal y de sus subespacios invariantes.

Lema 8.48 *Sea $f : V \to V$ una transformación lineal ortogonal y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor de f. Entonces $\lambda = \pm 1$.*

Demostración. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de f, existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda.v$. Como f es ortogonal vale $\|f(v)\| = \|v\|$. Entonces

$$\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda.v\| = |\lambda|.\|v\|,$$

de donde resulta que $|\lambda| = 1$ puesto que $v \neq 0$. Luego, $\lambda = \pm 1$. □

Lema 8.49 *Sea $f : V \to V$ una transformación lineal ortogonal. Sea $S \subseteq V$ un subespacio f-invariante. Entonces $S^\perp$ es f-invariante.*

Demostración. Sea $x \in S^\perp$. Veamos que $f(x) \in S^\perp$: Sea $s \in S$. Se tiene que $f_{|S} : S \to S$ es una transformación lineal ortogonal, lo que implica que es un isomorfismo. Entonces existe $\widetilde{s} \in S$ tal que $s = f(\widetilde{s})$ y, en consecuencia,

$$\langle f(x), s\rangle = \langle f(x), f(\widetilde{s})\rangle = \langle x, \widetilde{s}\rangle = 0.$$

En conclusión, $\langle f(x), s\rangle = 0$ para todo $s \in S$. Luego, $f(x) \in S^\perp$. □

Clasificación de transformaciones ortogonales en un espacio de dimensión 2

En lo que sigue, daremos una caracterización para las trasformaciones lineales ortogonales definidas en espacios vectoriales de dimensión 2. En particular, clasificaremos las transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$.

Sea V un espacio euclídeo con $\dim V = 2$ y sea $f : V \to V$ una transformación lineal ortogonal.

Sea $B = \{v_1, v_2\}$ una base ortonormal de V. Entonces $\{f(v_1), f(v_2)\}$ es una base ortonormal de V y, si

$$f(v_1) = \alpha v_1 + \beta v_2 \quad \text{y} \quad f(v_2) = \alpha' v_1 + \beta' v_2,$$

resulta que $\{(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, es decir,

$$\|(\alpha, \beta)\| = \|(\alpha', \beta')\| = 1 \quad \text{y} \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0.$$

De estas condiciones se desprende que $\alpha^2+\beta^2 = 1$ y que $(\alpha', \beta') = (-\beta, \alpha)$ o $(\alpha', \beta') = (\beta, -\alpha)$. En consecuencia, la matriz de f en la base B es de alguna de las dos formas siguientes:

$$(1)\ \ |f|_B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad (2)\ \ |f|_B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

(1) En este caso se tiene que $\mathcal{X}_f = (X - \alpha)^2 + \beta^2 = X^2 - 2\alpha X + 1$.
Si $\alpha = \pm 1$, entonces $f = \pm id_V$. Si no, $\mathcal{X}_f$ no tiene raíces reales.
Por otro lado, como $\|(\alpha, \beta)\| = 1$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \operatorname{sen}\theta$. Luego

$$|f|_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Eventualmente cambiando la base $\{v_1, v_2\}$ por $\{v_1, -v_2\}$ se puede tomar $\theta \in [0, \pi]$.

(2) Como $|f|_B$ es simétrica, existe una base ortonormal B' de V tal que $|f|_{B'}$ es diagonal. Puesto que $\mathcal{X}_f = (X-\alpha)(X+\alpha) - \beta^2 = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ se puede tomar B' tal que

$$|f|_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que si $B' = \{w_1, w_2\}$ entonces $f(w_1) = w_1$ y $f(w_2) = -w_2$.

En el caso en que $V = \mathbb{R}^2$, clasificaremos las transformaciones lineales ortogonales en los siguientes tipos:

Definición 8.50 i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal ortogonal. Se dice que f es una *rotación* si $\det(f) = 1$.

ii) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación ortogonal. Sea $H \subseteq \mathbb{R}^2$ un subespacio de dimensión 1. Se dice que f es una *simetría respecto de* H si $f_{|_H} = id_H$ y $f_{|_{H^\perp}} = -id_{H^\perp}$.

De nuestro análisis anterior se deduce que:

Observación 8.51 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal ortogonal. Entonces f es una rotación o f es una simetría.

Vimos que si f es una transformación ortogonal, existe una base ortonormal $B = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad |f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En el primer caso, $\det(|f|_B) = 1$, con lo cual, f es una rotación.

En el segundo caso, $f(v_1) = v_1$ y $f(v_2) = -v_2$. Además, $< v_1 >^\perp = < v_2 >$. Luego, f es una simetría respecto del subespacio $< v_1 >$.

Ejemplos.

1. Hallar la simetría $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto de la recta L de ecuación $x + y = 0$.

   Tenemos que $L = < (1,-1) >$ y $L^\perp = < (1,1) >$. Definimos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en la base $\{(1,-1),(1,1)\}$ como sigue:

   $$\begin{aligned} f(1,-1) &= (1,-1) \\ f(1,\ 1) &= (-1,-1). \end{aligned}$$

   Entonces $f_{|_L} = id_L$ y $f_{|_{L^\perp}} = -id_{L^\perp}$, lo que dice que f es la simetría respecto de la recta L.

   Se tiene que $f(x,y) = (-y,-x)$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Hallar una rotación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(2,1) = (1,2)$.

   En primer lugar, observemos que $\|f(2,1)\| = \|(1,2)\| = \sqrt{5} = \|(2,1)\|$ (recordar que una transformación ortogonal debe cumplir $\|f(v)\| = \|v\|$ para cada vector v).

   Vemos a definir f en una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Para esto, consideramos el vector $\frac{(2,1)}{\|(2,1)\|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ y construimos una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ que lo contiene:

   $$B = \Big\{ \Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big), \Big(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big) \Big\}.$$

   La condición $f(2,1) = (1,2)$ equivale a $f(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. Escribimos este vector como combinación lineal de la base B:

   $$\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{4}{5}\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) + \frac{3}{5}\Big(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big).$$

   Esto implica que la primera columna de la matriz $|f|_B$ de una transformación lineal f que verifique las condiciones del enunciado es $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})^t$. Teniendo en cuenta la estructura de la matriz de una rotación en una base ortonormal, concluimos que debe ser

   $$|f|_B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

   En consecuencia, debe ser

   $$f\Big(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{-3}{5}\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) + \frac{4}{5}\Big(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big) = \Big(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big).$$

   Consideramos entonces la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como:

   $$\begin{aligned} f\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) &= \Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big) \\ f\Big(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big) &= \Big(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big). \end{aligned}$$

   Observamos que f es una transformación ortogonal, puesto que la imagen por f de una base ortonormal es una base ortonormal. Además, f es una rotación, porque $\det(|f|_B) = 1$. La condición $f(2,1) = (1,2)$ se deduce de la definición en el primer vector de la base.

Clasificación de transformaciones ortogonales en un espacio de dimensión 3

En lo que sigue, daremos una caracterización de las transformaciones ortogonales definidas en un espacio euclídeo V de dimensión 3.

En el caso en que $V = \mathbb{R}^3$, para hacer esta clasificación nos interesarán particularmente las transformaciones lineales ortogonales que introducimos en la definición siguiente.

Definición 8.52 i) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal ortogonal. Se dice que f es una *rotación* si $\det(f) = 1$.

ii) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal. Sea $H \subseteq \mathbb{R}^3$ un subespacio de dimensión 2. Se dice que f es una *simetría respecto de* H si $f_{|_H} = id_H$ y $f_{|_{H^\perp}} = -id_{H^\perp}$.

Sea V un espacio euclídeo con $\dim V = 3$ y sea $f : V \to V$ una transformación lineal ortogonal.

Se tiene que $\mathcal{X}_f \in \mathbb{R}[X]$ y $\mathrm{gr}\mathcal{X}_f = 3$. Entonces, $\mathcal{X}_f$ tiene una raíz en $\mathbb{R}$, es decir, f tiene un autovalor real λ. Por el Lema 8.48, $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.

- Si $\lambda = 1$ es autovalor de f:

  Sea v_1 un autovector de f asociado al autovalor 1 con $\|v_1\| = 1$ (si $\|v_1\| \neq 1$, lo dividimos por su norma). Entonces $S = < v_1 >$ es un subespacio invariante por f. Por el Lema 8.49, $S^\perp$ es f-invariante.

  Consideremos $S^\perp$ con el producto interno inducido por el producto interno de V. Entonces $f_{|_{S^\perp}} : S^\perp \to S^\perp$ es una transformación ortogonal en un espacio euclídeo con $\dim S^\perp = 2$. En consecuencia, existe una base ortonormal $B_1 = \{v_2, v_3\}$ de $S^\perp$ tal que vale alguna de las dos igualdades siguientes:

  (1) $|f_{|_{S^\perp}}|_{B_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, con $\theta \in [0, \pi]$,

  (2) $|f_{|_{S^\perp}}|_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

  Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Entonces B es una base ortonormal de V y vale alguna de las dos igualdades siguientes:

  (1) $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, con $\theta \in [0, \pi]$,

  (2) $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

  En particular, vemos que si $V = \mathbb{R}^3$:

  – Si la matriz $|f|_B$ es como en (1), entonces f es una rotación. En este caso, al subespacio $< v_1 >$ se lo llama el *eje* de la rotación.

  – Si la matriz $|f|_B$ es como en (2), entonces f es una simetría respecto del subespacio $H = < v_1, v_2 >$.

- Si $\lambda = 1$ no es autovalor de f, entonces $\lambda = -1$ lo es. Sea v_1 un autovector de f de autovalor -1 con $\|v_1\| = 1$, y sea $S = < v_1 >$. De manera análoga a lo hecho en el caso anterior, se considera $S^\perp$, que es un subespacio f-invariante de dimensión 2, y la restricción $f_{|_{S^\perp}} : S^\perp \to S^\perp$ resulta una transformación lineal ortogonal. Como 1 no es autovalor de f, existe una base ortonormal $B_1 = \{v_2, v_3\}$ de $S^\perp$ tal que

$$|f_{|_{S^\perp}}|_{B_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{con } \theta \in (0, \pi].$$

Entonces $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de V tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{con } \theta \in (0, \pi].$$

Vemos que en el caso en que $V = \mathbb{R}^3$, f es una rotación compuesta con una simetría, puesto que:

$$|f|_B = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{simetría}} . \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{rotación}} .$$

Resumimos los resultados obtenidos sobre transformaciones lineales ortogonales en $\mathbb{R}^3$:

Observación 8.53 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal ortogonal. Entonces f es una rotación o una simetría o una composición de una simetría y una rotación.

Ejemplo. Definir una rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,1,0) = (0,1,1)$ y tal que el eje de la rotación sea ortogonal a $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$.

Sea $H = <(1,1,0),(0,1,1)>$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 que contiene a $(1,1,0)$ y a $(0,1,1)$.

Consideremos $H^\perp = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0\} = <(1,-1,1)>$. Queremos definir f de manera que $H^\perp$ sea el eje de la rotación, es decir, que $f_{|_{H^\perp}} = id_{H^\perp}$.

En primer lugar, construimos una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base de $H^\perp$ y una base de H:

$$B = \Big\{ \underbrace{\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)}_{\text{base de } H^\perp}, \underbrace{\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big), \Big(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\Big)}_{\text{base de } H} \Big\}.$$

Definimos f en los primeros vectores de la base como sigue:

(a) $f\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$

(b) $f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big) = \Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big) + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\Big)$

De esta manera, tendremos que la matriz de f en la base B es de la forma

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & \frac{1}{2} & * \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & * \end{pmatrix}$$

Para que la matriz tenga la estructura del ítem (1) de la página 218, definimos

$$(c) \quad f\Big(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big) = \frac{-\sqrt{3}}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\Big).$$

En conclusión, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal definida por (a), (b) y (c). La condición (b) implica que $f(1,1,0) = (0,1,1)$. Además, para la base ortonormal B considerada, se tiene que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

de donde se desprende que f es una rotación.

Clasificación general de transformaciones lineales ortogonales

A continuación generalizamos lo hecho en espacios de dimensión 2 y 3 al caso general de una transformación lineal ortogonal definida en un espacio euclídeo V de dimensión finita arbitraria.

Teorema 8.54 *Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal ortogonal. Entonces existe una base ortonormal B de V tal que*

$$|f|_B = \begin{pmatrix} I_{n_1} & & & & & & \\ & -I_{n_2} & & & & & \\ & & \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & & & \\ & & \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \cos\theta_r & -\operatorname{sen}\theta_r \\ & & & & & \operatorname{sen}\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

con $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ y $\theta_i \in (0, \pi)$ para cada $1 \leq i \leq r$ (donde todos los coeficientes de la matriz cuyos valores no están indicados son cero).

Demostración. Por inducción en $n = \dim V$.

Ya vimos que el resultado vale para $\dim V = 2$.

Sea $n > 2$ y supongamos que el resultado vale para transformaciones ortogonales definidas en espacios de dimensión menor que n. Sea V un espacio euclídeo tal que $\dim V = n$ y sea $f : V \to V$ una transformación lineal ortogonal. Por el Lema 8.48, sabemos que los posibles autovalores de f son 1 y -1.

- Si $\lambda = 1$ es autovalor de f:

  Sea v_1 una autovector de f de autovalor 1 tal que $\|v_1\| = 1$ (si $\|v_1\| \neq 1$, lo dividimos por su norma). Entonces $S = < v_1 >$ es un subespacio de V invariante por f, de donde $S^\perp$ también es invariante por f.

  Consideremos $f_1 = f_{|_{S^\perp}} : S^\perp \to S^\perp$, que es una transformación lineal ortogonal definida en un espacio euclídeo de dimensión $n-1$ (considerando en $S^\perp$ la restricción del producto interno de V). Por hipótesis inductiva, existe una base ortonormal B_1 de $S^\perp$ tal que $|f_1|_{B_1}$ es de la forma (8.3).

  Tomando $B = \{v_1\} \cup B_1$, se obtiene una base ortonormal de V tal que

  $$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times(n-1)} \\ 0_{(n-1)\times 1} & |f_1|_{B_1} \end{pmatrix},$$

  que es de la forma (8.3).

- Si $\lambda = 1$ no es autovalor de f, pero $\lambda = -1$ sí lo es:

  Tomando un autovector v_1 de autovalor -1 con $\|v_1\| = 1$ y procediendo como en el caso anterior, resulta que existe una base ortonormal B de V tal que la matriz $|f|_B$ es de la forma (8.3) con $n_1 = 0$ (es decir, sin unos en la diagonal).

- Si f no tiene autovalores reales:

  En este caso, el polinomio minimal de f tiene la forma $m_f = P_1.P_2 \dots P_r$, donde para cada $1 \leq i \leq r$, $P_i \in \mathbb{R}[X]$ es un polinomio irreducible de grado 2. Se tiene que

  $$0 = m_f(f) = P_1(f) \circ P_2(f) \circ \dots \circ P_r(f).$$

  Entonces, si definimos $Q = P_2 \dots P_r \in \mathbb{R}[X]$, vale $Q(f) = P_2(f) \circ \dots \circ P_r(f)$ y, por lo tanto,

  $$(P_1(f) \circ Q(f))(v) = 0 \quad \forall\, v \in V.$$

  Como $Q \mid m_f$ y $Q \neq m_f$, existe $w \in V$ tal que $Q(f)(w) \neq 0$. Sea $v = Q(f)(w)$ y sea $S = < v, f(v) >$. Observamos que S es f-invariante, puesto que $P_1(f)(v) = 0$ y $\mathrm{gr}(P_1) = 2$. Además, v no es autovector de f puesto que f no tiene autovalores, con lo que $\dim(S) = 2$.

  Consideremos la restricción $f_1 = f_{|_S} : S \to S$, que es una transformación lineal ortogonal sin autovalores reales definida sobre un espacio euclídeo de dimensión 2. Entonces existe una base ortonormal B_S de S tal que

  $$|f_1|_{B_S} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \theta_1 \in (0, \pi).$$

Dado que S es f-invariante y f es ortogonal, entonces $S^\perp$ es f-invariante. Sea $f_2 = f_{|_{S^\perp}} : S^\perp \to S^\perp$ la restricción, que es una transformación ortogonal definida sobre un espacio euclídeo con $\dim S^\perp = n-2$. Por hipótesis inductiva, existe una base ortonormal $B_{S^\perp}$ de $S^\perp$ tal que la matriz $|f_2|_{B_{S^\perp}}$ tiene la forma (8.3). Además, como f no tiene autovalores reales, f_2 tampoco los tiene, y por lo tanto en esta matriz no aparecen 1 ni -1 en la diagonal. Luego

$$|f_2|_{B_{S^\perp}} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 & & & \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos\theta_r & -\operatorname{sen}\theta_r \\ & & & \operatorname{sen}\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix}$$

con $\theta_i \in (0, \pi)$ para todo $2 \le i \le r$.

En consecuencia, tomando $B = B_S \cup B_{S^\perp}$ se obtiene una base ortonormal de V tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} |f_1|_{B_S} & 0 \\ 0 & |f_2|_{B_{S^\perp}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & & & \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos\theta_r & -\operatorname{sen}\theta_r \\ & & & \operatorname{sen}\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix}$$

con $\theta_i \in (0, \pi)$ para cada $1 \le i \le r$. □

8.4 Ejercicios

Ejercicio 1. Sea V un espacio vectorial y sea $\langle , \rangle$ un producto interno sobre V. Probar:

i) $\langle x,\, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

ii) $\langle x,\, cy\rangle = \bar{c}\,.\,\langle x, y\rangle$

iii) $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle \;\forall\, x \in V \;\Rightarrow\; y = z$

Ejercicio 2. Sea $\big(V, \langle\, , \,\rangle\big)$ un espacio vectorial con producto interno. Probar que $|\langle x, y\rangle| = \|x\|.\|y\|$ si y sólo si $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Ejercicio 3. Sea V un espacio vectorial. Demostrar que la suma de dos productos internos sobre V es un producto interno sobre V.

Ejercicio 4. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea d la distancia asociada. Demostrar que:

i) $d(x, y) \ge 0$

ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ejercicio 5. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$

iii) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

iv) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_2 - x_1.\overline{y}_2 - x_2.\overline{y}_1$

v) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + (1 + i).x_1.\overline{y}_2 + (1 + i).x_2.\overline{y}_1 + 3.x_2.\overline{y}_2$

vi) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = x_1.\overline{y}_1 - i.x_1.\overline{y}_2 + i.x_2.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2$

vii) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_3.\overline{y}_3 - x_1.\overline{y}_3 - x_3.\overline{y}_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

viii) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K$, $\Phi(x, y) = 3.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_1.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 6. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = y.A.x^t$. Probar que Φ es un producto interno sobre $\mathbb{R}^2$ si y sólo si $A = A^t$, $A_{11} > 0$ y $\det(A) > 0$.

Ejercicio 7. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ es

$$\Phi(x, y) = a.x_1.y_1 + b.x_1.y_2 + b.x_2.y_1 + b.x_2.y_2 + (1 + b).x_3.y_3$$

un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 8. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

i) $\langle , \rangle : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K$, $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

ii) $\langle , \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \to \mathbb{R}$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\, dx$

iii) $\langle , \rangle : K^n \times K^n \to K$, $\langle x, y\rangle = \overline{y}.\, Q^*.Q.\, x^t$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
donde $Q \in K^{n\times n}$ es una matriz inversible.

iv) $\langle , \rangle_T : V \times V \to K$, $\langle x, y\rangle_T = \langle T(x), T(y)\rangle$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
donde V y W son espacios vectoriales sobre K, $\langle\, , \,\rangle$ es un producto interno sobre W y $T : V \to W$ es un monomorfismo.

Ejercicio 9. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \dots, X^n\}$.

Ejercicio 10.

i) Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = x_1.y_1 - 2.x_1.y_2 - 2.x_2.y_1 + 6.x_2.y_2$.

  a) Probar que Φ es un producto interno.

  b) Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para Φ.

ii) Encontrar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 5. vi).

Ejercicio 11. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V.

i) Probar que existe un único producto interno en V para el cual B resulta ortonormal.

ii) Hallarlo en los casos

  a) $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$

  b) $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1, i), (-1, i)\}$

  c) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

  d) $V = \mathbb{C}^3$ y $B = \{(1, i, 1), (0, 0, 1), (0, 1, i)\}$

Ejercicio 12. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$ para el producto interno canónico.

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S_2 = < (1, 2, 1) >$

  a) Para el producto interno canónico.

  b) Para el producto interno definido por $\langle x, y\rangle = x_1.y_1 + 2.x_2.y_2 + x_3.y_3 - x_1.y_2 - x_2.y_1$.

iii) $V = \mathbb{C}^3$, $\quad S_3 = < (i, 1, 1), (-1, 0, i) >$
para el producto interno $\langle , \rangle_T$ definido en el Ejercicio 8. iv) con $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$

$$T(x) = \begin{pmatrix} i & -1+i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & i+1 & i \end{pmatrix} . x^t \quad \text{y} \quad \langle , \rangle \text{ el producto interno canónico sobre } \mathbb{C}^3.$$

iv) $V = \mathbb{C}^4$, $\quad S_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 + 2i.x_2 - x_3 + (1+i).x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i).x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$
para el producto interno $\langle x, y\rangle = x_1.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3 + 3.x_4.\overline{y}_4$.

v) $V = \mathbb{R}^4$, $\quad S_5 = < (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) >$
para el producto interno canónico.

Ejercicio 13.

i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para cada uno de los productos internos considerados.

ii) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.

iii) Hallar el punto de S_5 más cercano a $(0, 1, 1, 0)$.

Ejercicio 14. Sean S_1, S_2 y S_3 los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$S_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2.x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2.x_1 + 2.x_4 = 0 \end{cases} \qquad S_3 : \{2.x_1 + x_2 + 2.x_3 = 0$$

Encontrar una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $v_i \in S_i$ $(i = 1, 2, 3)$. ¿Por qué este problema tiene solución?

Ejercicio 15. Se define $\langle, \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ como

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big).g\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

i) Probar que $\langle, \rangle$ es un producto interno.

ii) Para $n = 2$, calcular $< X >^{\perp}$.

Ejercicio 16.

i) Se considera $\mathbb{C}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = tr(A.B^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

ii) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\, dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S =< 1 >$.

iii) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\, dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.

   Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S =< 1, x, x^2, x^3, \operatorname{sen}(\pi x) >$.

iv) Se considera $C[0, \pi]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} f(x).g(x)\; dx$.

   a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $B = \{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$.

   b) Sea S el subespacio de $C[0, \pi]$ generado por B. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

Ejercicio 17. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$. Sea $W \subseteq V$ un subespacio de dimensión finita de V. Probar que si $x \notin W$, entonces existe $y \in V$ tal que $y \in W^\perp$ y $\langle x, y\rangle \neq 0$.

Ejercicio 18. *Cálculo de volúmenes.* Consideremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno canónico $\langle , \rangle$.

El área del paralelogramo $P(v_1, v_2)$ que definen dos vectores v_1 y v_2 linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ se puede calcular con la fórmula "base por altura", o sea, $\|v_1\|.\, \|p_{<v_1>^\perp}(v_2)\|$.

El volumen del paralelepípedo $P(v_1, v_2, v_3)$ que definen tres vectores v_1, v_2, v_3 linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ sería "área de la base por altura", o sea,

$$\|v_1\|.\, \|p_{<v_1>^\perp(v_2)}\|.\, \|p_{<v_1,v_2>^\perp}(v_3)\|.$$

Si esto se generaliza a k vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$, el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ sería

$$\|v_1\|.\, \|p_{<v_1>^\perp}(v_2)\|.\, \|p_{<v_1,v_2>^\perp}(v_3)\| \dots \|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\|.$$

Se define entonces recursivamente el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{cases} \operatorname{vol}(P(v_1)) = \|v_1\| \\ \operatorname{vol}(P(v_1, \dots, v_k)) = \operatorname{vol}(P(v_1, \dots, v_{k-1})).\, \|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\| \quad \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Vamos a probar que el volumen del paralelepípedo definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_n$ en $\mathbb{R}^n$ es igual a $|\det(A)|$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$.

i) Dados $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ se define $G(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ como $G(v_1, \dots, v_k)_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$. Probar que:

   a) Si $v_k \in < v_1, \dots, v_{k-1} >$, entonces $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = 0$.
   b) Si $v_k \in < v_1, \dots, v_{k-1} >^\perp$, entonces $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})).\, \|v_k\|^2$.
   c) $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})).\, \|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\|^2$.

ii) Probar que, si $v_1, \dots, v_k$ son vectores linealmente independientes,

$$\big(\operatorname{vol}(P(v_1, \dots, v_k))\big)^2 = \det(G(v_1, \dots, v_k)).$$

iii) Sean $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$. Probar que $G(v_1, \dots, v_n) = A^t. A$. Deducir que $\operatorname{vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(A)|$.

iv) Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores $(2, 1)$ y $(-4, 5)$ en $\mathbb{R}^2$. Calcular el volumen del paralelepípedo definido por $(1, 1, 3)$, $(1, 2, -1)$ y $(1, 4, 1)$ en $\mathbb{R}^3$.

v) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. Si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, probar que
$$\mathrm{vol}(P(f(v_1), \dots, f(v_n))) = |\det f|.\,\mathrm{vol}(P(v_1, \dots, v_n)).$$

Ejercicio 19. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

ii) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (2.x_1 + (1 - i).x_2, x_2 + (3 + 2i).x_3, x_1 + i.x_2 + x_3)$

iii) $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}, \quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iv) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], \quad f(p) = p' \quad$ (donde $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x).q(x)\, dx$).

v) $P \in GL(n, \mathbb{C}), \quad f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n},\ f(A) = P^{-1}.A.P \quad$ (donde $\langle A, B \rangle = tr(A.B^*)$).

vi) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad \mu_f(p) = f.p \quad$ donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x).q(x)dx$

Ejercicio 20. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Sean f_1 y f_2 endomorfismos de V y sea k un escalar. Probar:

i) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$

ii) $(k.f_1)^* = \overline{k}.f_1^*$

iii) $(f_1 \circ f_2)^* = (f_2)^* \circ (f_1)^*$

iv) Si f_1 es un isomorfismo, entonces f_1^* es un isomorfismo y $(f_1^*)^{-1} = (f_1^{-1})^*$

v) $((f_1)^*)^* = f_1$

vi) $f_1^* \circ f_1 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$

Ejercicio 21. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal. Probar que $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Nu}(f))^\perp$.

Ejercicio 22. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por
$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y).$$
Hallar un producto interno $\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que f sea autoadjunta para $\langle, \rangle$.

Ejercicio 23. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea S un subespacio de V. Probar que la proyección ortogonal $P : V \to V$ sobre S es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

Ejercicio 24.

i) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $O.A.O^t$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

ii) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U.A.U^*$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 25. Encontrar una base ortonormal B de $\mathbb{R}^2$ tal que $|f|_B$ y $|g|_B$ sean diagonales si las matrices de f y de g en la base canónica son:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: ver el Ejercicio 31 de la Sección 6.5.

Ejercicio 26. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea $f : V \to V$ una transformación lineal.

Definición: Se dice que f es *normal* si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

i) Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal.

ii) Probar que si f es normal valen las siguientes afirmaciones:

   a) $\|f(v)\| = \|f^*(v)\| \quad \forall\, v \in V$. En particular, $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Nu}(f^*)$.
   b) $\forall\, \lambda \in \mathbb{C},\ f - \lambda.\, id_V$ es normal.
   c) Si v es un autovector de f de autovalor λ, entonces v es un autovector de f^* de autovalor $\overline{\lambda}$.
   d) $E_\lambda = \{v \in V \,/\, f(v) = \lambda.v\}$ es f^*-invariante.

iii) Probar que si f es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores.

Sugerencia: observar que $(E_\lambda)^\perp$ es f-invariante y f^*-invariante.

iv) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$. Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que *no* sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 27. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.

Ejercicio 28. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

Ejercicio 29. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

i) Probar que f es una rotación.

ii) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Ejercicio 30. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama *isometría* si verifica que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^n.$$

i) Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría tal que $f(0) = 0$, f resulta una transformación lineal y además f es ortogonal.

ii) Deducir que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría si y sólo si existen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformación ortogonal y $v \in \mathbb{R}^n$ tales que $f(x) = g(x) + v$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.