Capítulo 7

Forma de Jordan

En este capítulo continuaremos estudiando la estructura de los endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión finita.

Veremos que si V es un K-espacio vectorial de dimensión finita y f es un endomorfismo de V, bajo ciertas condiciones, existe una base de V en la cual la matriz de f es de una forma particular que nos permite clasificar los endomorfismos y también trabajar más fácilmente con ellos. Esto, en particular, resuelve el problema de decidir si dos matrices complejas son semejantes o no, o sea si son las matrices de la misma transformación lineal en distintas bases.

Comenzaremos estudiando algunos casos particulares y luego extenderemos los resultados obtenidos al caso general.

7.1 Transformaciones lineales nilpotentes

7.1.1 Definiciones y propiedades básicas

Empezamos con el caso en que la transformación lineal tenga como polinomio característico a una potencia de X (notar que en este caso, usando el Teorema de Hamilton-Cayley, el polinomio minimal de la transformación lineal también es una potencia de X y su único autovalor es el 0). Esto significa que existe una potencia de f que da cero, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 7.1 Sea V un K-espacio vectorial. Una transformación lineal $f : V \to V$ se dice *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ veces}} = 0$.

Análogamente, se dice que una matriz $A \in K^{n\times n}$ es *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.

Observación 7.2 Si V es un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ una transformación lineal, entonces f es nilpotente si y sólo si para cualquier base B de V, $|f|_B$

es una matriz nilpotente.

Definición 7.3 Sea $f : V \to V$ una transformación lineal nilpotente. Se define el *índice de nilpotencia* de f como $\min\{j \in \mathbb{N} \ / \ f^j = 0\}$.

Análogamente, se define el índice de nilpotencia de una matriz nilpotente $A \in K^{n\times n}$ como $\min\{j \in \mathbb{N} \ / \ A^j = 0\}$.

Lema 7.4 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Entonces f es nilpotente de índice k si y sólo si $m_f = X^k$.*

Demostración. Si f es nilpotente de índice k, se tiene que $f^k = 0$ y $f^{k-1} \neq 0$. La primera condición implica que el polinomio X^k anula a f, y en consecuencia, $m_f \mid X^k$. Luego, $m_f = X^j$ para algún $j \leq k$. Ahora, como $f^{k-1} \neq 0$, resulta que $m_f = X^k$.

Recíprocamente, es claro que si $m_f = X^k$, entonces $f^k = 0$ y $f^{k-1} \neq 0$, con lo cual f es nilpotente de índice k. □

Notar que, con las mismas hipótesis del lema anterior, como el grado del polinomio minimal de f es siempre menor o igual que la dimensión n de V, tendremos que f es nilpotente si y sólo si $f^n = 0$ (comparar con el Ejercicio 14 de la Sección 3.8).

Proposición 7.5 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ una transformación lineal nilpotente de índice k. Entonces*

$$\{0\} \subset \mathrm{Nu}(f) \subset \mathrm{Nu}(f^2) \subset \ldots \subset \mathrm{Nu}(f^k) = V$$

y todas las inclusiones son estrictas.

Demostración. Siendo k el índice de nilpotencia de f, se tiene que $f^k = 0$, de donde $\mathrm{Nu}(f^k) = V$. Además, es claro que valen las inclusiones. Veamos que son estrictas.

En primer lugar, observamos que si $\mathrm{Nu}(f^i) = \mathrm{Nu}(f^{i+1})$ para algún $i \in \mathbb{N}_0$, entonces $\mathrm{Nu}(f^{i+1}) = \mathrm{Nu}(f^{i+2})$: Si $v \in \mathrm{Nu}(f^{i+2})$, se tiene que $f^{i+2}(v) = 0$, de donde $f^{i+1}(f(v)) = 0$. Luego, $f(v) \in \mathrm{Nu}(f^{i+1})$ y, como por hipótesis $\mathrm{Nu}(f^{i+1}) = \mathrm{Nu}(f^i)$, entonces $f(v) \in \mathrm{Nu}(f^i)$. Esto dice que $f^{i+1}(v) = f^i(f(v)) = 0$, es decir, $v \in \mathrm{Nu}(f^{i+1})$.

Luego, si $\mathrm{Nu}(f^{i_0}) = \mathrm{Nu}(f^{i_0+1})$ para algún $i_0 \in \mathbb{N}_0$, se tiene que $\mathrm{Nu}(f^i) = \mathrm{Nu}(f^{i+1})$ para todo $i \geq i_0$. Pero como el índice de nilpotencia de f es k, $\mathrm{Nu}(f^{k-1}) \neq V = \mathrm{Nu}(f^k)$, y en consecuencia debe ser $i_0 \geq k$. □

Notación. Para cada matriz $A \in K^{n\times n}$, notaremos $\mathrm{Nu}(A)$ al núcleo de la transformación lineal $f_A : K^n \to K^n$ definida por $f_A(x) = A.x$, es decir, al conjunto $\{x \in K^n : A.x = 0\}$.

Con esta notación, como consecuencia de la Proposición 7.5 se tiene que si $A \in K^{n\times n}$ es una matriz nilpotente de índice k, entonces

$$\{0\} \subset \mathrm{Nu}(A) \subset \mathrm{Nu}(A^2) \subset \ldots \subset \mathrm{Nu}(A^k) = K^n$$

y todas las inclusiones son estrictas.

7.1.2 Existencia de forma de Jordan para una transformación lineal nilpotente

Comenzamos estudiando un caso particular de endomorfismos nilpotentes: los de índice de nilpotencia máximo (o sea, aquéllos en los que el polinomio minimal coincide con el característico):

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ una transformación lineal nilpotente de índice n (es decir, $m_f = \mathcal{X}_f = X^n$).

Sea $v \in V$ tal que $f^{n-1}(v) \neq 0$, es decir $v \in V - \mathrm{Nu}(f^{n-1})$ (existe un elemento con esta propiedad porque por hipótesis $f^{n-1} \neq 0$). Como m_v divide a $m_f = X^n$, resulta que $m_v = X^k$ con $1 \leq k \leq n$. Como $f^{n-1}(v) \neq 0$, resulta que $m_v = X^n$ y, por lo tanto, el conjunto

$$B = \{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v)\}$$

es una base de V. Además,

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este tipo de matrices aparecerá en nuestra clasificación y les daremos un nombre:

Definición 7.6 Sea $J \in K^{n\times n}$. Se dice que J es un *bloque de Jordan nilpotente* si

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación probaremos que para cualquier transformación lineal nilpotente $f : V \to V$, donde V es un K-espacio vectorial de dimensión n, es posible encontrar una base donde la matriz esté formada únicamente por bloques de Jordan nilpotentes ubicados sobre la diagonal y ceros en los demás lugares.

Teorema 7.7 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, y sea $f : V \to V$ una transformación lineal nilpotente de índice k. Entonces existe una base B de V tal que*

$$|f|_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

donde, para cada $1 \leq i \leq r$, $J_i \in K^{n_i\times n_i}$ es un bloque de Jordan nilpotente y $k = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$.

Para la demostración de este teorema, usaremos el siguiente resultado técnico:

Lema 7.8 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal y sea $i \in \mathbb{N}$. Sea $\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$ un conjunto linealmente independiente tal que* $\mathrm{Nu}(f^i) \cap < v_1, \ldots, v_r > = \{0\}$. *Entonces $\{f(v_1), \ldots, f(v_r)\}$ es linealmente independiente y* $\mathrm{Nu}(f^{i-1}) \cap < f(v_1), \ldots, f(v_r) > = \{0\}$.

Demostración. Supongamos que $v = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_r f(v_r) \in \mathrm{Nu}(f^{i-1})$. Entonces

$$0 = f^{i-1}(v) = f^i(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r),$$

de donde $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r \in \mathrm{Nu}(f^i)$. Como $\mathrm{Nu}(f^i) \cap < v_1, \ldots, v_r > = \{0\}$, resulta que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0$, y como $v_1, \ldots, v_r$ son linealmente independientes, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$.

Luego, $v = 0$.

De la misma demostración se deduce que si $\alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_r f(v_r) = 0$, entonces $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$, con lo cual $\{f(v_1), \ldots, f(v_r)\}$ es linealmente independiente. $\square$

Demostración del Teorema 7.7. Como f es nilpotente de índice k se tiene que

$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Nu}(f) \subsetneq \mathrm{Nu}(f^2) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Nu}(f^{k-1}) \subsetneq \mathrm{Nu}(f^k) = V.$$

Lo que haremos a continuación es construir conjuntos de vectores en $\mathrm{Nu}(f^j)$ recursivamente, comenzando en $j = k$ hasta $j = 1$, utilizando el lema anterior y de forma tal que la unión de esos conjuntos sea una base de V.

Sea B_{k-1} una base de $\mathrm{Nu}(f^{k-1})$, y sea

$$C_k = \{v_1^{(k)}, \ldots, v_{r_k}^{(k)}\} \subset \mathrm{Nu}(f^k) = V$$

un conjunto linealmente independiente tal que $B_{k-1} \cup C_k$ es una base de $\mathrm{Nu}(f^k) = V$. Por construcción, C_k es un conjunto linealmente independiente y

$$\mathrm{Nu}(f^{k-1}) \oplus < C_k > = \mathrm{Nu}(f^k) = V.$$

Para fijar ideas, hagamos el paso siguiente de la recursión:

Por el lema anterior $f(C_k) \subset \mathrm{Nu}(f^{k-1})$ es un conjunto linealmente independiente tal que $\mathrm{Nu}(f^{k-2}) \cap f(C_k) = \{0\}$. Sea B_{k-2} una base de $\mathrm{Nu}(f^{k-2})$. Completamos el conjunto linealmente independiente $B_{k-2} \cup f(C_k)$ a una base de $\mathrm{Nu}(f^{k-1})$ con $\{v_1^{(k-1)}, \ldots, v_{r_{k-1}}^{(k-1)}\}$. Luego, si llamamos

$$C_{k-1} = f(C_k) \cup \{v_1^{(k-1)}, \ldots, v_{r_{k-1}}^{(k-1)}\} \subset \mathrm{Nu}(f^{k-1}),$$

tenemos que C_{k-1} es un conjunto linealmente independiente y vale

$$\mathrm{Nu}(f^{k-2}) \oplus < C_{k-1} > = \mathrm{Nu}(f^{k-1}).$$

Notar que, por lo tanto,

$$\mathrm{Nu}(f^{k-2}) \oplus < C_{k-1} > \oplus < C_k > = V.$$

Pasemos ahora al paso j-ésimo de la recursión:

Sea j con $1 \le j < k$. Supongamos construidos los conjuntos linealmente independientes $C_{j+1} \subset \mathrm{Nu}(f^{j+1}), \dots, C_k \subset \mathrm{Nu}(f^k)$ tales que $f(C_h) \subset C_{h-1}\ \forall\, j+2 \le h \le k$, $\mathrm{Nu}(f^j) \oplus < C_{j+1} > = \mathrm{Nu}(f^{j+1})$ y

$$\mathrm{Nu}(f^j) \oplus < C_{j+1} > \oplus \dots \oplus < C_k > = V.$$

Por el lema anterior, $f(C_{j+1}) \subset \mathrm{Nu}(f^j)$ es un conjunto linealmente independiente y $\mathrm{Nu}(f^{j-1}) \cap < f(C_{j+1}) > = \{0\}$. Consideremos una base B_{j-1} de $\mathrm{Nu}(f^{j-1})$. Entonces $B_{j-1} \cup f(C_{j+1}) \subset \mathrm{Nu}(f^j)$ es un conjunto linealmente independiente y, por lo tanto, existen $v_1^{(j)}, \dots, v_{r_j}^{(j)} \in \mathrm{Nu}(f^j)$ tales que $B_{j-1} \cup f(C_{j+1}) \cup \{v_1^{(j)}, \dots, v_{r_j}^{(j)}\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(f^j)$. Sea

$$C_j = f(C_{j+1}) \cup \{v_1^{(j)}, \dots, v_{r_j}^{(j)}\} \subset \mathrm{Nu}(f^j).$$

Es claro que $C_j \subset \mathrm{Nu}(f^j)$ es un conjunto linealmente independiente (puesto que, por construcción, es un subconjunto de una base de $\mathrm{Nu}(f^j)$) y que

$$\mathrm{Nu}(f^{j-1}) \oplus < C_j > = \mathrm{Nu}(f^j).$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Nu}(f^{j-1}) \oplus < C_j > \oplus \dots \oplus < C_k > = V.$$

Al terminar la recursión tendremos que

$$< C_1 > \oplus \dots \oplus < C_k > = V,$$

y como cada conjunto C_j para cada $1 \le j \le k$ es linealmente independiente, resulta que $\bigcup_{j=1}^{k} C_j$ es una base de V.

Consideremos la base B de V obtenida reordenando esta base como sigue:

$$\begin{aligned} B \;=\; & \{v_1^{(k)}, f(v_1^{(k)}), \dots, f^{k-1}(v_1^{(k)}), \dots, v_{r_k}^{(k)}, f(v_{r_k}^{(k)}), \dots, f^{k-1}(v_{r_k}^{(k)}), \dots, \\ & v_1^{(j)}, f(v_1^{(j)}), \dots, f^{j-1}(v_1^{(j)}), \dots, v_{r_j}^{(j)}, f(v_{r_j}^{(j)}), \dots, f^{j-1}(v_{r_j}^{(j)}), \dots, v_1^{(1)}, \dots, v_{r_1}^{(1)}\}. \end{aligned}$$

Se puede verificar que $|f|_B$ tiene la forma del enunciado del Teorema. □

Definición 7.9 Una matriz $A \in K^{n\times n}$ se dice una *forma de Jordan nilpotente* si

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

con $J_i \in K^{n_i\times n_i}$ bloques de Jordan nilpotentes $(1 \le i \le r)$ y $n_1 \ge n_2 \ge \dots \ge n_r$.

El Teorema 7.7 nos dice entonces que para todo endomorfismo nilpotente $f : V \to V$, donde V es un K-espacio vectorial de dimensión finita, existe una base B de V tal que $|f|_B$ es una forma de Jordan nilpotente. A una tal base B la llamaremos una *base de Jordan para* f y a la matriz $|f|_B$, una *forma de Jordan para* f.

Aplicando este teorema a la transformación lineal $f_A : K^n \to K^n$ asociada a una matriz $A \in K^{n\times n}$, obtenemos el análogo para matrices:

Teorema 7.10 *Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz nilpotente. Entonces A es semejante a una forma de Jordan nilpotente.*

A una base B de K^n tal que $|f_A|_B = J_A$ es una forma de Jordan nilpotente la llamaremos una *base de Jordan para* A, y a la matriz J_A una *forma de Jordan para* A.

Ejemplo. Hallar una forma de Jordan y una base de Jordan para $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\mathcal{X}_A = X^6$, A es una matriz nilpotente.

Calculemos m_A, que será de la forma $m_A = X^k$ para algún k con $1 \le k \le 6$. Como

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A^3 = 0,$$

resulta que $m_A = X^3$.

Sea $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^6$. Entonces,

$$B_1 = \{e_3, e_4, e_6\}, \quad B_2 = \{e_3, e_4, e_6, e_2, e_5\} \quad \text{y} \quad B_3 = \{e_3, e_4, e_6, e_2, e_5, e_1\}$$

son bases de $\text{Nu}(A)$, $\text{Nu}(A^2)$ y $\text{Nu}(A^3)$ respectivamente.

Construimos una base de Jordan para A siguiendo la demostración del Teorema 7.7 (donde la transformación lineal nilpotente que consideramos es $f_A : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$): Tenemos que

$$\{0\} \subsetneq \text{Nu}(A) \subsetneq \text{Nu}(A^2) \subsetneq \text{Nu}(A^3) = \mathbb{R}^6.$$

Extendemos la base B_2 de $\text{Nu}(A^2)$ a una base de $\text{Nu}(A^3) = \mathbb{R}^6$, por ejemplo, agregando el vector e_1 que completa B_3. Consideramos $A.e_1 = (0, 1, -1, 0, -1, 1) \in \text{Nu}(A^2)$. Se tiene:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \subsetneq & \text{Nu}(A) & \subsetneq & \text{Nu}(A^2) & \subsetneq & \text{Nu}(A^3) & = \mathbb{R}^6 \\ & & & & A.e_1 & & e_1 & \end{array}$$

Ahora consideramos la base B_1 de $\mathrm{Nu}(A)$, tomamos el conjunto $B_1 \cup \{A.e_1\} \subset \mathrm{Nu}(A^2)$, y extendemos este conjunto a una base de $\mathrm{Nu}(A^2)$. Para esto podemos elegir, por ejemplo, el vector $e_5 \in \mathrm{Nu}(A^2)$. Multiplicando por A los vectores $A.e_1$ y e_5 se obtiene el conjunto linealmente independiente $\{A^2e_1, A.e_5\} = \{(0,0,-1,0,0,1),(0,0,0,1,0,-1)\} \subset \mathrm{Nu}(A^2)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A) & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A^2) & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A^3) & = \mathbb{R}^6 \\ & & A^2.e_1 & & A.e_1 & & e_1 & \\ & & A.e_5 & & e_5 & & & \end{array}$$

Finalmente, extendemos el conjunto $\{A^2.e_1, A.e_5\}$ a una base de $\mathrm{Nu}(A)$, por ejemplo, con el vector e_3. Obtenemos:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A) & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A^2) & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A^3) & = \mathbb{R}^6 \\ & & A^2.e_1 & & A.e_1 & & e_1 & \\ & & A.e_5 & & e_5 & & & \\ & & e_3 & & & & & \end{array}$$

Entonces, una base de Jordan para A es

$$\begin{aligned} B &= \{e_1,\, A.e_1,\, A^2.e_1,\, e_5,\, A.e_5,\, e_3\} \\ &= \{(1,0,0,0,0,0),(0,1,-1,0,-1,1),(0,0,-1,0,0,1),(0,0,0,0,1,0), \\ &\quad (0,0,0,1,0,-1),(0,0,1,0,0,0)\}. \end{aligned}$$

y una forma de Jordan de A es $J_A = |f_A|_B$, es decir:

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.1.3 Unicidad de la forma de Jordan nilpotente. Semejanza

A continuación probaremos que la forma de Jordan de una transformación lineal nilpotente es única. Este resultado, junto con la existencia de forma de Jordan para matrices nilpotentes probada en la sección anterior, nos permitirá resolver el problema de decidir si dos matrices nilpotentes son semejantes o no.

La demostración de la unicidad consiste en mostrar que la cantidad de bloques de Jordan de cada tamaño que aparecen en una forma de Jordan de una transformación lineal f está unívocamente determinada por f.

Comenzamos probando un resultado auxiliar.

Lema 7.11 Sea $J \in K^{m\times m}$ un bloque de Jordan nilpotente. Entonces $\mathrm{rg}(J^i) = m - i$ para cada $1 \leq i \leq m$.

Demostración. Se puede verificar inductivamente que $J^i = (e_{i+1}^t \mid \dots \mid e_m^t \mid 0 \mid \dots \mid 0)$, donde e_j denota el j-ésimo vector de la base canónica de K^n (es decir que al elevar un bloque de Jordan nilpotente a la i, los unos bajan $i-1$ lugares).

En consecuencia, $\mathrm{rg}(J^i) = \dim < e_{i+1}, \dots, e_m > = m - i$. □

Este resultado nos permite calcular la cantidad de bloques de cada tamaño que aparecen en una forma de Jordan usando los rangos de las potencias de la matriz.

Proposición 7.12 *Sea $A \in K^{n\times n}$ una forma de Jordan nilpotente de índice k. Entonces el bloque de Jordan más grande que aparece en A es de tamaño $k \times k$. Además, para cada $0 \le i \le k-1$ la cantidad de bloques de Jordan nilpotentes de tamaño mayor que i que aparecen en A es*

$$b_i = \mathrm{rg}(A^i) - \mathrm{rg}(A^{i+1}).$$

En particular, la cantidad de bloques de Jordan que aparecen en A es $b_0 = n - \mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Nu}(A))$.

Demostración. Como el índice de nilpotencia de A es k, se tiene que $m_A = X^k$.

Sean $J_1, \dots, J_r$ los bloques de Jordan que aparecen en A con $J_\ell \in K^{n_\ell \times n_\ell}$ para cada $1 \le \ell \le r$ (ver Definición 7.9). Entonces

$$m_A = \mathrm{mcm}\{m_{J_1}, \dots, m_{J_r}\} = \mathrm{mcm}\{X^{n_1}, \dots, X^{n_r}\} = X^{n_1}.$$

Luego, $n_1 = k$, es decir, el bloque de Jordan más grande que aparece en A es de $k \times k$.

Para cada $1 \le i \le k$, sean c_i la cantidad de bloques de Jordan nilpotentes de tamaño $i \times i$ que aparecen en A y b_i la cantidad de bloques de tamaño mayor que i.

Si A está formada por r bloques de Jordan nilpotentes, resulta que $\mathrm{rg}(A) = n - r$ ya que este rango es la suma de los rangos de los distintos bloques de Jordan. En consecuencia, la cantidad de total de bloques de Jordan que forman A es $b_0 = n - \mathrm{rg}(A)$.

Sea $1 \le i \le k-1$. Observamos, por el lema anterior, que para un bloque de Jordan $J \in K^{j\times j}$ se tiene que $J^i = 0$ si $j \le i$ o $\mathrm{rg}(J^i) = j - i$ si $j > i$. Además, $\mathrm{rg}(A^i)$ es la suma de los rangos de los bloques que aparecen en la diagonal. En consecuencia

$$\mathrm{rg}(A^i) - \mathrm{rg}(A^{i+1}) = \sum_{j=i+1}^{k} c_j.(j-i) - \sum_{j=i+2}^{k} c_j.(j-(i+1)) = \sum_{j=i+1}^{k} c_j = b_i. \qquad \square$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Corolario 7.13 *Sea $A \in K^{n\times n}$ una forma de Jordan nilpotente de índice k. Entonces, para cada $1 \le i \le k$, la cantidad de bloques de Jordan nilpotentes de tamaño $i \times i$ que aparecen en A es*

$$c_i = \mathrm{rg}(A^{i+1}) - 2\,\mathrm{rg}(A^i) + \mathrm{rg}(A^{i-1}).$$

Demostración. Observamos que $c_k = b_{k-1} = \text{rg}(A^{k-1}) - \text{rg}(A^k) = \text{rg}(A^{k+1}) - 2\,\text{rg}(A^k) + \text{rg}(A^{k-1})$, puesto que $A^k = 0$.

Sea $1 \le i \le k-1$. Entonces

$$\begin{aligned} c_i &= b_{i-1} - b_i \\ &= (\text{rg}(A^{i-1}) - \text{rg}(A^i)) - (\text{rg}(A^i) - \text{rg}(A^{i+1})) \\ &= \text{rg}(A^{i+1}) - 2\,\text{rg}(A^i) + \text{rg}(A^{i-1}). \end{aligned}$$ □

Ejemplo. Decidir si existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{15\times 15}$ tal que $\text{rg}(A) = 10$, $\text{rg}(A^4) = 3$ y $\text{rg}(A^5) = 0$.

Si $\text{rg}(A^5) = 0$ y $\text{rg}(A^4) = 3$, entonces $A^5 = 0$ y $A^4 \neq 0$, de donde A es nilpotente de índice 5. Entonces A es semejante a una forma de Jordan nilpotente J_A cuyo bloque de tamaño más grande es de 5×5.

Ahora, por la Proposición 7.12, J_A tiene $\text{rg}(A^4) - \text{rg}(A^5) = 3$ bloques de 5×5 y, como $J_A \in \mathbb{R}^{15\times 15}$ éstos son los únicos bloques que aparecen.

Pero la cantidad de bloques de Jordan en J_A debe ser $15 - \text{rg}(A) = 15 - 10 = 5$, contradiciendo lo anterior.

Luego, no existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{15\times 15}$ que satisfaga las condiciones del enunciado.

El Corolario 7.13 nos permite probar el siguiente resultado:

Lema 7.14 *Sean J y J' formas de Jordan nilpotentes. Si $J \sim J'$, entonces $J = J'$.*

Demostración. Según lo que hemos visto, las cantidades de bloques de cada tamaño que aparecen en una forma de Jordan nilpotente sólo dependen de los rangos de sus potencias. Por otro lado, si $J \sim J'$, entonces para cada $1 \le i \le k$, se tiene que $\text{rg}(J^i) = \text{rg}((J')^i)$. En consecuencia, la cantidad de bloques de Jordan de cada tamaño es la misma en J que en J'. Luego, $J = J'$. □

A partir de este lema, se deduce la unicidad de la forma de Jordan en el caso nilpotente:

Teorema 7.15 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal nilpotente. Entonces existe una única forma de Jordan nilpotente $J \in K^{n\times n}$ tal que $|f|_B = J$ para alguna base B de V.*

Demostración. Si B y B' son bases de V tales que $|f|_B = J$ y $|f|_{B'} = J'$ con J y J' formas de Jordan nilpotentes, entonces $J \sim J'$ y, por el lema anterior, $J = J'$. □

Por lo tanto, se obtiene este resultado sobre semejanza de matrices nilpotentes:

Teorema 7.16 *Sean $A, B \in K^{n\times n}$ matrices nilpotentes. Sean J y J' formas de Jordan nilpotentes tales que $A \sim J$ y $B \sim J'$. Entonces*

$$A \sim B \iff J = J'.$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Si $A \sim B$, como por hipótesis $A \sim J$ y $B \sim J'$, teniendo en cuenta que $\sim$ es una relación de equivalencia, resulta que $J \sim J'$. Luego, por el Lema 7.14, $J = J'$.

($\Leftarrow$) Si $J = J'$, siendo $A \sim J$, $B \sim J'$ y por ser $\sim$ una relación de equivalencia, se deduce que $A \sim B$. □

Ejemplos.

1. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ dos matrices tales que $m_A = m_B = X^3$. Probar que $A \sim B$.

   Por el teorema anterior, el problema es equivalente a probar que A y B tienen la misma forma de Jordan. Luego, basta ver que existe una única forma de Jordan nilpotente $J \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $m_J = X^3$.

   Si $m_J = X^3$, entonces J tiene (al menos) un bloque de Jordan nilpotente de 3×3. Como $J \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, la única posibilidad es entonces que J esté formada por un bloque de 3×3 y otro de 1×1, es decir

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}\right).$$

2. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

   Observamos que $\mathcal{X}_A = X^7 = \mathcal{X}_B$, $m_A = X^3 = m_B$ y $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$, pero $A \not\sim B$ puesto que son dos formas de Jordan nilpotentes distintas.

7.2 Caso general

En esta sección generalizaremos lo anterior para endomorfismos en un K-espacio vectorial de dimensión finita cuyos polinomios minimales se factorizan linealmente (es decir, con todas sus raíces en K).

7.2.1 Forma de Jordan de una transformación lineal

Primero veremos un caso particular, en el que el polinomio minimal del endomorfismo se factoriza linealmente pero tiene una única raíz.

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $m_f = (X - \lambda)^k$ para algún $k \le n$. Se tiene entonces que $(f - \lambda.\, id_V)^k = 0$ y $(f - \lambda.\, id_V)^{k-1} \neq 0$, con lo cual $f - \lambda.\, id_V$ es nilpotente de índice k.

Por el Teorema 7.7, existe una base B de V tal que $|f - \lambda.\, id_V|_B \in K^{n\times n}$ es una forma de Jordan nilpotente, es decir,

$$|f - \lambda.\, id_V|_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

donde, para cada $1 \le i \le r$, $J_i \in K^{n_i\times n_i}$ es un bloque de Jordan nilpotente y $k = n_1 \ge n_2 \ge \ldots \ge n_r$.

Observamos que $|f|_B = |f - \lambda.\, id_V|_B + |\lambda.\, id_V|_B = |f - \lambda.\, id_V|_B + \lambda.\, I_n$, de donde

$$|f|_B = \begin{pmatrix} J(\lambda, n_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda, n_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda, n_r) \end{pmatrix}$$

donde, para cada $1 \le i \le r$,

$$J(\lambda, n_i) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{n_i\times n_i}$$

y $k = n_1 \ge n_2 \ge \ldots \ge n_r$.

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 7.17 Sea $\lambda \in K$. Se llama *bloque de Jordan asociado al autovalor* λ de tamaño n a la matriz $J(\lambda, n) \in K^{n\times n}$

$$J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

La idea de la forma de Jordan general es, como en el caso nilpotente, encontrar una base donde la matriz del endomorfismo considerado tenga una forma particular (bloques de Jordan en la diagonal).

La demostración de la existencia de forma de Jordan se basa en el siguiente lema, que permite descomponer el espacio en suma directa de subespacios invariantes, en cada uno de los cuales la transformación lineal tiene un solo autovalor.

Lema 7.18 *Sea V un K espacio vectorial de dimensión finita. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $m_f = P. Q$ con $(P, Q) = 1$. Entonces:*

- $\mathrm{Nu}(P(f))$ *y* $\mathrm{Nu}(Q(f))$ *son subespacios invariantes por f;*
- $V = \mathrm{Nu}(P(f)) \oplus \mathrm{Nu}(Q(f))$*;*
- $m_{f|_{\mathrm{Nu}(P(f))}} = P$ *y* $m_{f|_{\mathrm{Nu}(Q(f))}} = Q$*.*

Demostración.

- $\mathrm{Nu}(P(f))$ y $\mathrm{Nu}(Q(f))$ son invariantes por f:

  Sea $P = \sum\limits_{i=0}^{r} a_i X^i$ y sea $x \in \mathrm{Nu}(P(f))$. Entonces $P(f)(x) = 0$. Aplicando f se obtiene $f(P(f)(x)) = 0$. Luego

  $$0 = f\Big(\sum_{i=0}^{r} a_i f^i(x)\Big) = \sum_{i=0}^{r} a_i f^{i+1}(x) = \Big(\sum_{i=0}^{r} a_i f^i\Big)(f(x)),$$

  de donde $f(x) \in \mathrm{Nu}(P(f))$. Por lo tanto, $\mathrm{Nu}(P(f))$ es invariante por f.

  De la misma manera, $\mathrm{Nu}(Q(f))$ es invariante por f.

- $V = \mathrm{Nu}(P(f)) \oplus \mathrm{Nu}(Q(f))$:

  Puesto que $(P, Q) = 1$, existen $R, S \in K[X]$ tales que $1 = R.P + S.Q$, de donde

  $$id_V = R(f) \circ P(f) + S(f) \circ Q(f).$$

  Sea $x \in \mathrm{Nu}(P(f)) \cap \mathrm{Nu}(Q(f))$. Entonces

  $$x = id_V(x) = R(f)\big(P(f)(x)\big) + S(f)\big(Q(f)(x)\big) = R(f)(0) + S(f)(0) = 0.$$

  Luego, $\mathrm{Nu}(P(f)) \cap \mathrm{Nu}(Q(f)) = \{0\}$.

  Por otro lado, para cada $x \in V$ se tiene que

  $$x = (R(f) \circ P(f))(x) + (S(f) \circ Q(f))(x).$$

  Ahora, teniendo en cuenta que $Q(f) \circ R(f) = (Q. R)(f) = (R. Q)(f) = R(f) \circ Q(f)$, resulta que

  $$\begin{aligned} Q(f)((R(f) \circ P(f))(x)) &= (Q(f) \circ R(f) \circ P(f))(x) = R(f)\Big((Q(f) \circ P(f))(x)\Big) = \\ &= R(f)(m_f(f)(x)) = R(f)(0) = 0, \end{aligned}$$

de donde $(R(f) \circ P(f))(x) \in \mathrm{Nu}(Q(f))$. Análogamente, $(S(f) \circ Q(f))(x) \in \mathrm{Nu}(P(f))$. En consecuencia, $\mathrm{Nu}(P(f)) + \mathrm{Nu}(Q(f)) = V$.

- $m_{f_{|\mathrm{Nu}(P(f))}} = P$ y $m_{f_{|\mathrm{Nu}(Q(f))}} = Q$:
  Sean f_1 y f_2 las restricciones de f a $\mathrm{Nu}(P(f))$ y $\mathrm{Nu}(Q(f))$ respectivamente. Como $V = \mathrm{Nu}(P(f)) \oplus \mathrm{Nu}(Q(f))$, se tiene que $m_f = \mathrm{mcm}(m_{f_1}, m_{f_2})$.

  Si $P = \sum\limits_{i=0}^{r} a_i X^i$, para cada $x \in \mathrm{Nu}(P(f))$, se tiene que
  $$P(f_1)(x) = \Big(\sum_{i=0}^{r} a_i f_1^i\Big)(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i f_1^i(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i f^i(x) = P(f)(x) = 0,$$
  con lo cual $m_{f_1} \mid P$. Análogamente, $m_{f_2} \mid Q$.

  Como P y Q son coprimos, resulta que m_{f_1} y m_{f_2} también lo son y, por lo tanto,
  $$P.Q = m_f = \mathrm{mcm}(m_{f_1}, m_{f_2}) = m_{f_1}.m_{f_2}$$
  de donde $m_{f_1} = P$ y $m_{f_2} = Q$. □

Definición 7.19 Diremos que $J \in K^{n\times n}$ es una *matriz de Jordan* o una *forma de Jordan* si
$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_s \end{pmatrix}$$
donde, para cada $1 \le i \le s$, J_i es de la forma
$$J_i = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, n_1^{(i)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_i, n_2^{(i)}) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda_i, n_{r_i}^{(i)}) \end{pmatrix} \qquad \text{con } n_1^{(i)} \ge \ldots \ge n_{r_i}^{(i)}$$
y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, *o sea, cada* J_i *está formada por (varios) bloques de Jordan de autovalor* λ_i *ubicados sobre la diagonal.*

Demostremos ahora el resultado principal de esta sección:

Teorema 7.20 *Sea* V *un* K*-espacio vectorial de dimensión finita. Sea* $f : V \to V$ *una transformación lineal tal que* m_f *se factoriza linealmente sobre* K. *Entonces existe una base* B *de* V *tal que* $|f|_B$ *es una forma de Jordan.*

Con la notación anterior, a una base B con la propiedad del teorema la llamaremos una *base de Jordan para* f y a la matriz $|f|_B$ una *forma de Jordan para* f.

Demostración. Probaremos el teorema por inducción en $n = \dim V$.

Para $n = 1$, no hay nada que hacer.

Supongamos que el teorema vale para toda transformación lineal definida en un K-espacio vectorial de dimensión $m < n$ y sea $f : V \to V$ una transformación lineal definida en un K-espacio vectorial V de dimensión n.

Si $m_f = (X - \lambda)^k$, estamos en el caso analizado al comienzo de esta sección, para el que el teorema vale.

Supongamos entonces que f tiene al menos dos autovalores distintos. Si λ_1 es uno de los autovalores de f, entonces $m_f = (X - \lambda_1)^{k_1}.\, Q$ con $\mathrm{gr}(Q) \geq 1$ y $((X - \lambda_1)^{k_1}, Q) = 1$. Por el Lema 7.18, $\mathrm{Nu}\big((f - \lambda_1.\, id_V)^{k_1}\big)$ y $\mathrm{Nu}(Q(f))$ son subespacios f-invariantes de V y

$$V = \mathrm{Nu}((f - \lambda_1.\, id_V)^{k_1}) \oplus \mathrm{Nu}(Q(f)).$$

Además, como λ_1 es autovalor de f pero no el único, $\{0\} \subset \mathrm{Nu}\big((f - \lambda_1. id_V)^{k_1}\big) \subset V$ y las inclusiones son estrictas. En particular, $0 < \dim(\mathrm{Nu}((f - \lambda_1.\, id_V)^{k_1})) < \dim V = n$. Entonces también vale $0 < \dim \mathrm{Nu}(Q(f)) < \dim V = n$.

Consideremos las restricciones de f a $\mathrm{Nu}\big((f - \lambda_1.\, id_V)^{k_1}\big)$ y $\mathrm{Nu}(Q(f))$:

$$f_1 : \mathrm{Nu}((f - \lambda_1.\, id_V)^{k_1}) \to \mathrm{Nu}((f - \lambda_1.\, id_V)^{k_1}) \qquad \text{y} \qquad f_2 : \mathrm{Nu}(Q(f)) \to \mathrm{Nu}(Q(f)).$$

Por hipótesis inductiva, existen una base B_1 de $\mathrm{Nu}\big((f - \lambda_1.I)^{k_1}\big)$ y una base B_2 de $\mathrm{Nu}(Q(f))$, tales que $|f_1|_{B_1}$ y $|f_2|_{B_2}$ son formas de Jordan. Entonces, tomando $B = B_1 \cup B_2$ obtenemos una base de V tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} |f_1|_{B_1} & 0 \\ 0 & |f_2|_{B_2} \end{pmatrix}.$$

Observamos que, de acuerdo al Lema 7.18, $m_{f_1} = (X - \lambda_1)^{k_1}$ y $m_{f_2} = Q$. Entonces $|f_1|_{B_1}$ está formada por bloques de Jordan de autovalor λ_1 y, como λ_1 no es raíz de Q, $|f_2|_{B_2}$ está formada por bloques de Jordan de autovalor λ con $\lambda \neq \lambda_1$. En consecuencia, $|f|_B$ es una forma de Jordan. $\square$

Observemos que, con las notaciones del teorema anterior, si $m_f = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{k_i}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, la demostración nos permite dar una forma constructiva de obtener una forma de Jordan de f. Como

$$V = \mathrm{Nu}((f - \lambda_1.\, id_V)^{k_1}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Nu}((f - \lambda_r.\, id_V)^{k_r}),$$

podemos obtener una forma de Jordan para cada una de las restricciones de f a estos subespacios invariantes $\mathrm{Nu}((f - \lambda_i.\, id_V)^{k_i})$ y las bases de Jordan B_i correspondientes. Entonces $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$ resulta ser una base de V y $|f|_B$ resulta una forma de Jordan de f.

El resultado del teorema se puede enunciar también para matrices complejas.

Teorema 7.21 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces A es semejante a una forma de Jordan.*

A una base B de K^n tal que $|f_A|_B$ es una forma de Jordan, la llamaremos una *base de Jordan para A*, y a la matriz $|f_A|_B$ una *forma de Jordan para A*.

Demostración. Consideremos la transformación lineal $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definida por $f_A(x) = A.x$. Observamos que $m_{f_A} = m_A \in \mathbb{C}[X]$ se factoriza linealmente en $\mathbb{C}[X]$. Por el teorema anterior, existe entonces una base de $\mathbb{C}^n$ tal que la matriz $J_A = |f_A|_B$ es una forma de Jordan, semejante a A. □

Ejemplo. Hallar una forma de Jordan semejante a A y una base de Jordan para A, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Se tiene que $\mathcal{X}_A = (X-1)^2(X+1)^2$, luego los autovalores de A son 1 y -1.

Calculemos $m_A = \text{mcm}\{m_{e_1}, m_{e_2}, m_{e_3}, m_{e_4}\}$, donde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^4$:

Puesto que $A.e_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ (luego $\{e_1, A.e_1\}$ es l.i.) y $A^2 e_1 = e_1$, se tiene que $m_{e_1} = X^2 - 1$.

Por otro lado, $A.e_2 = -e_2$, con lo cual $m_{e_2} = X + 1$. De la misma manera, $m_{e_3} = X + 1$.

Finalmente, para e_4 tenemos que $A.e_4 = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 + e_4$ (y entonces $\{e_4, A.e_4\}$ es l.i.) y $A^2 e_4 = 4e_1 + 4e_2 + 4e_3 + e_4 = 2.\,A.e_4 - e_4$. Luego $m_{e_4} = X^2 - 2X + 1$.

En consecuencia, $m_A = \text{mcm}\{X^2-1, X+1, X^2-2X+1\} = (X-1)^2(X+1)$.

Sabemos entonces que

$$\mathbb{C}^4 = \text{Nu}((A-I)^2) \oplus \text{Nu}(A+I),$$

y si $f_1 : \text{Nu}((A-I)^2) \to \text{Nu}((A-I)^2)$ y $f_2 : \text{Nu}(A+I) \to \text{Nu}(A+I)$ son las restricciones de f_A a $\text{Nu}((A-I)^2)$ y $\text{Nu}(A+I)$ respectivamente, una forma de Jordan para A es

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

donde J_1 y J_2 son formas de Jordan de f_1 y f_2 respectivamente. Más aún, si B_1 y B_2 son bases de Jordan para f_1 y f_2, entonces $B = B_1 \cup B_2$ es una base de Jordan para A.

- Base y forma de Jordan de $f_1 : \text{Nu}((A-I)^2) \to \text{Nu}((A-I)^2)$.

  Se tiene que $m_{f_1} = (X-1)^2$, luego $f_1 - id_{\text{Nu}((A-I)^2)}$ es nilpotente de índice 2. Además

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde $\text{Nu}(A - I) = < (1,1,1,0) >$ y $\text{Nu}((A - I)^2) = < (1,1,1,0), (0,0,0,1) >$. Consideramos el vector $e_4 = (0,0,0,1)$ que extiende una base de $\text{Nu}(A - I)$ a una de $\text{Nu}((A - I)^2)$. Obtenemos

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \subsetneq & \text{Nu}(A-I) & \subsetneq & \text{Nu}((A-I)^2) \\ & & (A-I).e_4 & & e_4 \end{array}$$

Luego, una base de Jordan para f_1 es $B_1 = \{e_4, (A - I).e_4\} = \{(0,0,0,1), (2,2,2,0)\}$ y su forma de Jordan es

$$|f_1|_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Base y forma de Jordan de $f_2 : \text{Nu}(A + I) \to \text{Nu}(A + I)$.

  Sabemos que $m_{f_2} = X - 1$, luego f_2 es diagonalizable. Se tiene que

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Luego, una base de $\text{Nu}(A + I)$ (que será también una base de Jordan para f_2) es $B_2 = \{(0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ y la forma de Jordan de f_2 es

$$|f_2|_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, una base de Jordan para A es

$$B = B_1 \cup B_2 = \{(0,0,0,1), (2,2,2,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$$

y una forma de Jordan semejante a A es

$$J_A = \begin{pmatrix} \begin{array}{|cc|cc} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c|}{-1} & 0 \\ \cline{3-4} 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c|}{-1} \\ \cline{4-4} \end{array} \end{pmatrix}.$$

7.2.2 Unicidad de la forma de Jordan

Veremos ahora que la forma de Jordan asociada a una transformación lineal $f : V \to V$, donde V es un K-espacio vectorial de dimensión finita, es única salvo por el orden en que aparecen los bloques de Jordan correspondientes a autovalores distintos.

Teorema 7.22 *Sea V un K espacio vectorial de dimensión n, y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que m_f se factoriza linealmente sobre K. Entonces existe una única forma de Jordan $J \in K^{n\times n}$ (salvo por el orden de sus bloques) tal que para alguna base B de V, $|f|_B = J$.*

Demostración. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V tal que $|f|_B$ es una forma de Jordan $J \in K^{n\times n}$,

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

donde para cada $1 \le i \le s$, $J_i(\lambda_i) \in K^{d_i\times d_i}$ denota la matriz formada por todos los bloques de Jordan de autovalor λ_i que aparecen en J y $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

Se tiene que $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_J = \prod\limits_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{d_i}$. Entonces $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ son los autovalores de f y, para cada $1 \le i \le s$, $d_i = \text{mult}(\lambda_i, \mathcal{X}_f)$.

Ahora, para cada $1 \le i \le s$, se tiene que $m_{J_i(\lambda_i)} = (X - \lambda_i)^{k_i}$ para algún $1 \le k_i \le d_i$. Entonces $m_f = m_J = \prod\limits_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{k_i}$, con lo que, para cada $1 \le i \le s$, $k_i = \text{mult}(\lambda_i, m_f)$.

Sea λ uno de los autovalores de f y sea $k = \text{mult}(\lambda, m_f)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda = \lambda_1$. Observamos que

$$J - \lambda.\, I_n = \begin{pmatrix} J_1(0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2 - \lambda) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_s(\lambda_s - \lambda) \end{pmatrix},$$

de donde

$$(J - \lambda.\, I_n)^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (J_2(\lambda_2 - \lambda))^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & (J_s(\lambda_s - \lambda))^k \end{pmatrix}$$

Puesto que $(J_i(\lambda_i - \lambda))^k$ es inversible para cada $2 \le i \le s$, entonces $\text{Nu}\big((J - \lambda I_n)^k\big) = \, < e_1, \ldots, e_{d_1} >$. Teniendo en cuenta que $J = |f|_B$, resulta que $J - \lambda.I_n = |f - \lambda.id_V|_B$, con lo que

$$\text{Nu}((f - \lambda.\, id_V)^k) = \, < v_1, \ldots, v_{d_1} >.$$

Consideremos la restricción

$$f_1 = (f - \lambda.\, id_V)_{|_{\text{Nu}((f-\lambda.\, id_V)^k)}} : \text{Nu}((f - \lambda.\, id_V)^k) \to \text{Nu}((f - \lambda.\, id_V)^k).$$

La restricción f_1 resulta una transformación lineal nilpotente y, por lo tanto, tiene una única forma de Jordan nilpotente J_1 asociada.

Sea $B_1 = \{v_1, \ldots, v_{d_1}\}$, que como vimos, es una base de $\text{Nu}\big((f - \lambda.\, id_V)^k\big)$. Observamos que

$$|f_1|_{B_1} = \Big| f_{|_{\text{Nu}(f-\lambda.\, id_V)^k}} \Big|_{B_1} - \lambda.I_{d_1} = J_1(0).$$

Como $J_1(0)$ es una forma de Jordan nilpotente, debe ser *la* forma de Jordan J_1 de f_1.

En consecuencia, $J_1(\lambda_1) = J_1 + \lambda_1.I_{d_1}$ está unívocamente determinada por f. (Notar que el subespacio invariante $\mathrm{Nu}((f - \lambda.\, id_V)^k)$ y la restricción $f_1 = (f - \lambda.\, id_V)_{|_{\mathrm{Nu}((f-\lambda.\, id_V)^k)}}$ sólo dependen de f y no de una base.)

Haciendo lo mismo para cada λ_i con $1 \le i \le s$, resulta que, $J_i(\lambda_i) \in K^{d_i \times d_i}$ satisface:

$$J_i(\lambda_i) = J_i + \lambda_i.\, I_{d_i},$$

donde $d_i = \mathrm{mult}(\lambda_i, \mathcal{X}_f)$ y, si $k_i = \mathrm{mult}(\lambda_i, m_f)$, J_i es la forma de Jordan nilpotente de la restricción

$$(f - \lambda_i.\, id_V)_{|_{\mathrm{Nu}((f-\lambda_i.\, id_V)^{k_i})}} : \mathrm{Nu}((f - \lambda_i.\, id_V)^{k_i}) \to \mathrm{Nu}((f - \lambda_i.\, id_V)^{k_i}).$$

Por lo tanto, la forma de Jordan de f está unívocamente determinada por f (salvo el orden de los bloques correspondientes a los distintos autovalores de f). $\square$

El hecho que todo polinomio se factorice linealmente en $\mathbb{C}[X]$ nos permite demostrar el siguiente resultado sobre semejanza de matrices en $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Teorema 7.23 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y sean J_A y J_B las formas de Jordan de A y B respectivamente. Entonces*

$$A \sim B \iff J_A = J_B \quad \textit{(salvo el orden de los bloques).}$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Sabemos que $A \sim J_A$ y $B \sim J_B$. Si $A \sim B$, como $\sim$ es una relación de equivalencia, resulta que $J_A \sim J_B$. Entonces existe una transformación lineal $f : K^n \to K^n$ y bases B_1 y B_2 de K^n tales que $|f|_{B_1} = J_A$ y $|f|_{B_2} = J_B$.

Por el teorema anterior, la forma de Jordan de una transformación lineal es única salvo el orden de los bloques correspondientes a los distintos autovalores. Luego $J_A = J_B$ salvo el orden de los bloques.

($\Leftarrow$) Se deduce inmediatamente de que $\sim$ es una relación de equivalencia. $\square$

Ejemplo. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Probar que $A \sim B \iff \mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$ y $m_A = m_B$. ¿Vale el mismo resultado para matrices en $\mathbb{C}^{4\times 4}$?

Ya sabemos que vale ($\Rightarrow$). Probemos la otra implicación. Por el Teorema 7.23, A y B son semejantes si tienen la misma forma de Jordan (salvo el orden de los distintos autovalores). Luego, basta ver que la forma de Jordan de una matriz en $\mathbb{C}^{3\times 3}$ queda unívocamente determinada por su polinomio característico y su polinomio minimal.

Sea $J \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ una forma de Jordan. Entonces $\mathcal{X}_J$ es un polinomio mónico de grado 3 en $\mathbb{C}[X]$, luego puede escribirse de alguna de las siguientes formas:

(i) $\mathcal{X}_J = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

(ii) $\mathcal{X}_J = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(iii) $\mathcal{X}_J = (X-\lambda)^3$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Para cada una de las opciones anteriores, veremos que existe una única J para cada polinomio minimal posible.

(i) Si $\mathcal{X}_J = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, J es diagonalizable y, por lo tanto, tiene un bloque de 1×1 para cada autovalor. Luego (salvo el orden de los autovalores)

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si $\mathcal{X}_J = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $m_J = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$ o $m_J = \mathcal{X}_J$.

- Si $m_J = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$, J es diagonalizable y, por lo tanto, cada bloque en J es de 1×1. Luego
$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$
salvo el orden de los autovalores.
- Si $m_J = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$, entonces J tiene un bloque de 2×2 con autovalor λ_1 y uno de 1×1 con autovalor λ_2. Luego (salvo el orden de los autovalores),
$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Si $\mathcal{X}_J = (X-\lambda)^3$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $m_J = (X-\lambda)^k$ para $k = 1, 2$ o 3.

- Si $m_J = (X-\lambda)$, entonces J es diagonalizable y sólo tiene bloques de 1×1, es decir,
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
- Si $m_J = (X-\lambda)^2$, entonces el bloque más grande de J es de 2×2, luego sólo puede tener un bloque de 2×2 y uno de 1×1:
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Si $m_J = (X-\lambda)^3$, entonces J tiene un bloque de 3×3 y, por lo tanto
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

El resultado no vale en $\mathbb{C}^{4\times 4}$. Por ejemplo, las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
verifican $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = X^4$ y $m_A = m_B = X^2$, pero $A \not\sim B$, porque son dos formas de Jordan distintas.

7.3 Aplicación: Cálculo de las potencias de una matriz

En diversas aplicaciones, por ejemplo en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, surge la necesidad de calcular las potencias de una matriz dada. En esta sección veremos que esto puede hacerse utilizando la forma de Jordan de la matriz.

En primer lugar, observamos que es posible calcular las potencias de una matriz a partir de las potencias de una matriz semejante:

Si $A \sim B$, existe $C \in GL(n, K)$ tal que $A = C.\,B.\,C^{-1}$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, $A^k = C.\,B^k.\,C^{-1}$ (ver Observación 6.26).

A partir de esta observación vemos que, si una matriz $A \in K^{n\times n}$ es diagonalizable, entonces se puede calcular fácilmente A^k para cada $k \in \mathbb{N}$: Basta hallar $C \in GL(n, K)$ y $D \in K^{n\times n}$ diagonal tales que $A = C.\,D.\,C^{-1}$ y tener en cuenta que
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$
Utilizando la igualdad $A^k = C.\,D^k.\,C^{-1}$ se obtienen las potencias de A.

Consideremos ahora el caso de una matriz $A \in K^{n\times n}$ que no sea diagonalizable. Si
$$A \sim M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_r \end{pmatrix} \qquad \text{con } M_i \in K^{n_i\times n_i}\ (1 \le i \le r)$$

existe $C \in GL(n, K)$ tal que $A = C.M.C^{-1}$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, $A^k = C.\, M^k.\, C^{-1}$ y, multiplicando por bloques, resulta que

$$M^k = \begin{pmatrix} M_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_r^k \end{pmatrix}.$$

Por lo visto en las secciones anteriores, si m_A se factoriza linealmente en K, se puede hallar una matriz M (la forma de Jordan de A) en la que cada M_i es un bloque de Jordan de autovalor λ_i para algún $\lambda_i \in K$. Luego, para calcular las potencias de A basta poder calcular $J(\lambda, m)^k$.

Se puede probar inductivamente (ver Lema 7.11) que

$$J(0, m)^k = \begin{pmatrix} 0_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k} \\ & \\ I_{m-k} & 0_{(m-k)\times k} \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda \neq 0$, escribimos $J(\lambda, m) = \lambda.\, I_m + J(0, m)$. Puesto que $\lambda.\, I_m$ y $J(0, m)$ conmutan, podemos calcular las potencias de $\lambda.\, I_m + J(0, m)$ aplicando la fórmula del binomio de Newton:

$$\begin{aligned} J(\lambda, m)^k &= (\lambda.\, I_m + J(0, m))^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\lambda I_m)^{k-i}.\, J(0, m)^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i}.\, \begin{pmatrix} 0_{i\times(m-i)} & 0_{i\times i} \\ I_{m-i} & 0_{(m-i)\times i} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} 0_{i\times(m-i)} & 0_{i\times i} \\ \binom{k}{i}\lambda^{k-i}.\, I_{m-i} & 0_{(m-i)\times i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k & \ddots & & \vdots \\ \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{k}{m-1}\lambda^{k-(m-1)} & \dots & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Consideramos $\binom{k}{h} = 0$ si $h > k$.)

Esto nos da una fórmula para el cálculo de las potencias de un bloque de Jordan de autovalor λ. Usando las observaciones anteriores podemos calcular las potencias de A.

7.4 Ejercicios

Ejercicio 1. Dadas las matrices A y A' en $K^{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

i) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A'.

ii) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tal que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A'.

iii) Sea B una base de K^n y sea $f : K^n \to K^n$ tal que $|f|_B = A$. Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de K^n tales que $K^n = S \oplus T$.

Ejercicio 2. Sean A_i $(1 \le i \le 6)$ matrices en $\mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotentes tales que $m_{A_i} = X^3$ $(1 \le i \le 6)$. ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

Ejercicio 3. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ son matrices nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7\times 7}$?

Ejercicio 4. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{9\times 9}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \le j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

Ejercicio 6.

i) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

ii) Decidir si existe $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ tal que $m_A(X) = X^5$, $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^7$ una transformación lineal y sea B una base de $\mathbb{C}^7$ tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Hallar $\mathcal{X}_f$ y m_f.

ii) Sea λ un autovalor de f tal que $\text{mult}(\lambda, \mathcal{X}_f) = m$. Se definen $E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / f(v) = \lambda.v\}$ y $V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / (\lambda.Id - f)^m(v) = 0\} = \text{Nu}\big((\lambda.Id - f)^m\big)$.

¿Para qué autovalores λ de f se tiene que $E_\lambda = V_\lambda$?

iii) Para cada autovalor λ de f, ¿cuál es la menor potencia k tal que $V_\lambda = \text{Nu}\big((\lambda.Id - f)^k\big)$?

iv) Si λ es un autovalor de f, se nota f_λ a la restricción de f a V_λ. Calcular $\dim(\text{Im}(f_\lambda))$ y $\dim(\text{Im}(f_\lambda^2))$ para cada λ.

Ejercicio 8. Sea V un K-espacio vectorial, sea $f : V \to V$ una transformación lineal y sea $P \in K[X]$.

i) Probar que $\text{Nu}(P(f))$ e $\text{Im}(P(f))$ son subespacios invariantes por f.

ii) Probar que si un autovalor λ de f es raíz de P, entonces $E_\lambda \subseteq \text{Nu}(P(f))$.

iii) Probar que si un autovalor λ de f no es raíz de P, entonces $E_\lambda \subseteq \text{Im}(P(f))$.

Ejercicio 9. Hallar la forma y una base de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Para cada $a \in \mathbb{R}$, calcular $\mathcal{X}_A$, m_A y hallar la forma de Jordan de A.

ii) Para $a = 2$, hallar una base de Jordan para A.

Ejercicio 11. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = < e^x, x.e^x, x^2.e^x, e^{2x} >$. Sea $\delta : V \to V$ la transformación lineal definida por $\delta(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ.

Ejercicio 12. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Decidir si A y B son semejantes.

Ejercicio 13. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tales que $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X-1)^3.(X-3)^2$ y $m_A = m_B$. Decidir si, necesariamente, A es semejante a B.

Ejercicio 14. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2$; $\quad m_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$

ii) $\mathcal{X}_A(X) = (X-7)^5$; $\quad m_A(X) = (X-7)^2$

iii) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^7$; $\quad m_A(X) = (X-2)^3$

iv) $\mathcal{X}_A(X) = (X-3)^4(X-5)^4$; $\quad m_A(X) = (X-3)^2(X-5)^2$

Ejercicio 15. Sea $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

$$\begin{array}{llll} \text{rg}(A-\lambda_1.I) = 13, & \text{rg}(A-\lambda_1.I)^2 = 11, & \text{rg}(A-\lambda_1.I)^3 = 10, & \text{rg}(A-\lambda_1.I)^4 = 10, \\ \text{rg}(A-\lambda_2.I) = 13, & \text{rg}(A-\lambda_2.I)^2 = 11, & \text{rg}(A-\lambda_2.I)^3 = 10, & \text{rg}(A-\lambda_2.I)^4 = 9, \\ \text{rg}(A-\lambda_3.I) = 13, & \text{rg}(A-\lambda_3.I)^2 = 12, & \text{rg}(A-\lambda_3.I)^3 = 11. & \end{array}$$

Hallar su forma de Jordan.

Ejercicio 16. Dar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14\times 14}$ que verifica, simultáneamente:

$m_A = (X-\lambda_1)^2.(X-\lambda_2).(X-\lambda_3)^2.(X-\lambda_4)^3$ (con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$),

$\text{rg}(A-\lambda_1.I) = 11$, $\text{rg}(A-\lambda_1.I)^2 = 10$, $\text{rg}(A-\lambda_3.I) = 12$, $\text{rg}(A-\lambda_3.I)^2 = 10$ y

$\text{rg}(A-\lambda_4.I) = 13$.

Ejercicio 17. Hallar la forma de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & n-2 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 18. Sean $x,\, y \in \mathbb{C}^n$ y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = x_i.y_j$.

i) Calcular todos los autovalores y autovectores de A.

ii) Calcular las posibles formas de Jordan de A.

Ejercicio 19. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

Ejercicio 20. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ una matriz tal que $m_A = X^6$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

Ejercicio 21. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ tal que $B^2 = A$.

Ejercicio 22. Sean $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha\,,\ a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4.a_{n+1} - 4.a_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

Sugerencia: Ver el razonamiento del Ejercicio 8 de la Sección 6.5 e intentar modificarlo convenientemente utilizando el cálculo de potencias de una matriz de la Sección 7.3.

Ejercicio 23. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & 3\,x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) + x_2(t) \\ x_3'(t) & = & -x_2(t) + 2\,x_3(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 1$.

Sugerencia: Ver Ejercicio 9 de la Sección 6.5.