

Capítulo 5

Determinantes

Los determinantes aparecieron originalmente al tratar de resolver sistemas de ecuaciones lineales. A continuación vamos a dar una definición precisa de determinante y a relacionarlo, entre otras cosas, con la inversibilidad de matrices.

En el caso de matrices en $K^{2 \times 2}$, sabemos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es inversible si y sólo si $ad - bc \neq 0$ (ver Ejercicio 11, Sección 2.5). Este escalar $ad - bc$ se llama el determinante de la matriz A . Para $n > 2$, el determinante de una matriz en $K^{n \times n}$ es también un escalar que se calcula a partir de los coeficientes de la matriz.

5.1 Definición y ejemplos básicos

Existen distintas definiciones de determinante. La definición que daremos introduce al determinante como una función particular de $K^{n \times n}$ en K .

5.1.1 Funciones multilineales alternadas

En esta sección daremos la definición y estudiaremos algunas propiedades básicas de funciones multilineales y alternadas, las que nos permitirán definir el determinante.

Notación. Dada una matriz $A \in K^{n \times n}$ cuyas columnas son A_1, \dots, A_n escribiremos $A = (A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_n)$.

Definición 5.1 Una función $f : K^{n \times n} \rightarrow K$ se dice *multilineal alternada (por columnas)* si para cada $1 \leq i \leq n$:

- i) $f(A_1 \mid \dots \mid A_i + A'_i \mid \dots \mid A_n) = f(A_1 \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_n) + f(A_1 \mid \dots \mid A'_i \mid \dots \mid A_n)$.
- ii) $f(A_1 \mid \dots \mid \lambda A_i \mid \dots \mid A_n) = \lambda \cdot f(A_1 \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid A_n)$ para todo $\lambda \in K$.

iii) $f(A_1 | \dots | \underbrace{A_i}_{col. i} | \dots | \underbrace{A_i}_{col. j} | \dots | A_n) = 0$ para cada $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$ (es decir, si la matriz A tiene dos columnas iguales, $f(A) = 0$).

Notar que los ítems i) y ii) dicen que si $f : K^{n \times n} \rightarrow K$ es multilineal, para cada columna i , una vez fijados los valores de las columnas restantes, se obtiene una función lineal en la columna i .

Ejemplos.

1. $f : K^{1 \times 1} \rightarrow K$ es multilineal alternada si y sólo si f es lineal.

2. $f : K^{2 \times 2} \rightarrow K$ definida por $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ es multilineal alternada:

$$\begin{aligned} \text{i) } f \begin{pmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{pmatrix} &= (a+a')d - b(c+c') = ad - bc + a'd - bc' = \\ &= f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba la aditividad en la segunda columna.

ii) $f \begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{pmatrix} = \lambda ad - b\lambda c = \lambda(ad - bc) = \lambda \cdot f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ para todo $\lambda \in K$, y lo mismo vale en la segunda columna.

$$\text{iii) } f \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = ab - ba = 0.$$

En la siguiente proposición damos algunas de las propiedades básicas que verifica toda función multilineal alternada.

Proposición 5.2 Sea $f : K^{n \times n} \rightarrow K$ multilineal alternada. Entonces

$$\text{i) } f(A_1 | \dots | \underbrace{\vec{0}}_{col. i} | \dots | A_n) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

$$\text{ii) } f(A_1 | \dots | A_i | \dots | A_j | \dots | A_n) = -f(A_1 | \dots | \underbrace{A_j}_{col. i} | \dots | \underbrace{A_i}_{col. j} | \dots | A_n).$$

$$\text{iii) } f(A_1 | \dots | \underbrace{A_i + \alpha A_j}_{col. i} | \dots | A_j | \dots | A_n) = f(A_1 | \dots | A_i | \dots | A_j | \dots | A_n).$$

$$\text{iv) } \text{Si } A_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j A_j, \text{ entonces } f(A_1 | \dots | A_i | \dots | A_n) = 0.$$

Demostración.

$$i) f(A_1 | \dots | \vec{0} | \dots | A_n) = f(A_1 | \dots | 0 \cdot \vec{0} | \dots | A_n) = 0 \cdot f(A_1 | \dots | \vec{0} | \dots | A_n) = 0.$$

ii) Sea $A \in K^{n \times n}$. Consideremos la matriz que en las columnas i y j tiene la suma de las columnas i y j de A . Por la definición de función multilineal alternada se tiene que $f(A_1 | \dots | A_i + A_j | \dots | A_i + A_j | \dots | A_n) = 0$ y, por lo tanto, vale:

$$\begin{aligned} 0 &= f(A_1 | \dots | A_i | \dots | A_i + A_j | \dots | A_n) + \\ &\quad + f(A_1 | \dots | A_j | \dots | A_i + A_j | \dots | A_n) \\ &= f(A_1 | \dots | A_i | \dots | A_i | \dots | A_n) + f(A_1 | \dots | A_i | \dots | A_j | \dots | A_n) + \\ &\quad + f(A_1 | \dots | A_j | \dots | A_i | \dots | A_n) + f(A_1 | \dots | A_j | \dots | A_j | \dots | A_n) \\ &= f(A_1 | \dots | A_i | \dots | A_j | \dots | A_n) + f(A_1 | \dots | A_j | \dots | A_i | \dots | A_n), \end{aligned}$$

de donde

$$f(A_1 | \dots | A_i | \dots | A_j | \dots | A_n) = -f(A_1 | \dots | A_j | \dots | A_i | \dots | A_n).$$

iii) Se tiene que

$$\begin{aligned} f(A_1 | \dots | A_i + \alpha A_j | \dots | A_j | \dots | A_n) &= \\ &= f(A_1 | \dots | A_i | \dots | A_j | \dots | A_n) + \alpha f(A_1 | \dots | A_j | \dots | A_j | \dots | A_n) = \\ &= f(A_1 | \dots | A_i | \dots | A_j | \dots | A_n), \end{aligned}$$

donde la primera igualdad es consecuencia de i) y ii) de la Definición 5.1, y la tercera se deduce de iii) de dicha definición.

iv) Si $A_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j A_j$, entonces

$$\begin{aligned} f(A_1 | \dots | A_i | \dots | A_n) &= f(A_1 | \dots | \overbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j A_j}^{col. i} | \dots | A_n) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j f(A_1 | \dots | \underbrace{A_j}_{col. i} | \dots | A_n) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Podemos ahora caracterizar fácilmente *todas* las funciones multilineales alternadas de $K^{2 \times 2}$ en K y ver cómo puede definirse el determinante en este caso particular.

Ejemplo. Hallar todas las funciones multilineales alternadas $f : K^{2 \times 2} \rightarrow K$.

Si $f : K^{2 \times 2} \rightarrow K$ es multilinear alternada, entonces:

$$\begin{aligned}
 f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= f \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} && \text{(Def. 5.1 i) en primera columna} \\
 &= f \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \\
 &&& \text{(Def. 5.1 i) en segunda columna} \\
 &= f \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} && \text{(Prop. 5.2 i)} \\
 &= ad \cdot f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + cb \cdot f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} && \text{(Def. 5.1 ii)} \\
 &= (ad - cb) \cdot f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{(Prop. 5.2 ii)}
 \end{aligned}$$

Por otro lado, toda función de este tipo es multilinear alternada (comparar con el Ejemplo 2 de la página 108). Luego, todas las funciones multilineales alternadas $f : K^{2 \times 2} \rightarrow K$ son de la forma $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha(ad - bc)$ con $\alpha \in K$.

Vemos entonces que una forma posible de definir una función de $K^{2 \times 2}$ en K que coincide con lo que conocemos como determinante en dicha situación es como la única función f multilinear alternada tal que $f(I_2) = 1$.

En la próxima sección, generalizaremos lo que hemos visto en el ejemplo anterior para matrices en $K^{2 \times 2}$ a matrices en $K^{n \times n}$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.

5.1.2 Existencia y unicidad del determinante

El siguiente lema que relaciona una función multilinear alternada definida en $K^{(n+1) \times (n+1)}$ con otras definidas en $K^{n \times n}$ será la base para un argumento recursivo que nos permitirá probar la unicidad de la función determinante.

Lema 5.3 Sea $f : K^{(n+1) \times (n+1)} \rightarrow K$ una función multilinear alternada tal que $f(I_{n+1}) = \alpha$. Sea i con $1 \leq i \leq n+1$. Se define $f_i : K^{n \times n} \rightarrow K$ como

$$f_i(A) = f \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ i-1} & 0 & a_{1\ i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \dots & a_{i-1\ i-1} & 0 & a_{i-1\ i} & \dots & a_{i-1\ n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i1} & \dots & a_{i\ i-1} & 0 & a_{i\ i} & \dots & a_{i\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ i-1} & 0 & a_{n\ i} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{si } A = (a_{jl})_{1 \leq j, l \leq n}.$$

Entonces f_i es una función multilinear alternada y $f_i(I_n) = \alpha$.

Demostración. De la definición de f_i y del hecho que f es multilineal alternada, se deduce fácilmente que f_i es multilineal alternada.

Además, $f_i(I_n) = f(I_{n+1}) = \alpha$. □

Veamos cómo puede utilizarse este resultado para hallar una función multilineal alternada de $K^{3 \times 3}$ en K con un determinado valor sobre I_3 conociendo las funciones multilineales alternadas de $K^{2 \times 2}$ en K :

Ejemplo. Hallar $f : K^{3 \times 3} \rightarrow K$ multilineal alternada tal que $f(I_3) = 1$.

Supongamos que f satisface lo pedido. Entonces

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & k \\ g & h & i \end{pmatrix} &= a \cdot f \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & k \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + d \cdot f \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 1 & e & k \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + g \cdot f \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & k \\ 1 & h & i \end{pmatrix} \\ &= a \cdot f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & k \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + d \cdot f \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & i \end{pmatrix} + g \cdot f \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & k \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a \cdot f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & k \\ 0 & h & i \end{pmatrix} - d \cdot f \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & i \end{pmatrix} + g \cdot f \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= a \cdot f_1 \begin{pmatrix} e & k \\ h & i \end{pmatrix} - d \cdot f_2 \begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g \cdot f_3 \begin{pmatrix} b & c \\ e & k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por el lema anterior, $f_1, f_2, f_3 : K^{2 \times 2} \rightarrow K$ son funciones multilineales alternadas que en la identidad I_2 valen 1. Pero ya vimos, en un ejemplo anterior, que hay una única función que cumple esto, a saber, $f_0 : K^{2 \times 2} \rightarrow K$, definida por $f_0 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$. En consecuencia

$$f \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & k \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \cdot (ei - hk) - d \cdot (bi - hc) + g \cdot (bk - ce).$$

Además, esta f cumple lo pedido con lo cual resulta que es la única función multilineal alternada tal que $f(I_3) = 1$.

El siguiente teorema nos permite definir la noción de determinante en general.

Teorema 5.4 Sea $\alpha \in K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una única función multilineal alternada $f : K^{n \times n} \rightarrow K$ tal que $f(I_n) = \alpha$.

Definición 5.5 La única función multilineal alternada $f : K^{n \times n} \rightarrow K$ tal que $f(I_n) = 1$ se llama el *determinante de orden n* .

Demostración. Dada $A \in K^{(n+1) \times (n+1)}$, notaremos $A(i|j) \in K^{n \times n}$ a la matriz que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j de A .

Existencia. Por inducción en n .

Para $n = 1$, definimos $f : K^{1 \times 1} \rightarrow K$, $f(x) = \alpha \cdot x$, que es multilineal alternada y cumple $f(1) = \alpha$.

Supongamos que existe $g : K^{n \times n} \rightarrow K$ multilineal alternada tal que $g(I_n) = \alpha$. Definimos $f : K^{(n+1) \times (n+1)} \rightarrow K$ como

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{1i} \cdot g(A(1|i)) \quad \text{si } A = (a_{j\ell})_{1 \leq j, \ell \leq n+1}.$$

Veamos que f es multilineal alternada y que $f(I_{n+1}) = \alpha$.

i) Sean $A = (A_1 | \dots | A_k | \dots | A_{n+1})$, $A' = (A_1 | \dots | A'_k | \dots | A_{n+1})$ y $\tilde{A} = (A_1 | \dots | A_k + A'_k | \dots | A_{n+1})$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\tilde{A}) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{1i} g(\tilde{A}(1|i)) + (-1)^{k+1} (a_{1k} + a'_{1k}) g(\tilde{A}(1|k)) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{1i} g(A(1|i)) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{1i} g(A'(1|i)) + \\ &\quad + (-1)^{k+1} a_{1k} g(A(1|k)) + (-1)^{k+1} a'_{1k} g(A'(1|k)) \\ &= f(A) + f(A'). \end{aligned}$$

ii) Sea $A = (A_1 | \dots | A_k | \dots | A_{n+1})$ y sea $\tilde{A} = (A_1 | \dots | \lambda A_k | \dots | A_{n+1})$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\tilde{A}) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{1i} g(\tilde{A}(1|i)) + (-1)^{k+1} \lambda a_{1k} g(\tilde{A}(1|k)) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{1i} \lambda g(A(1|i)) + (-1)^{k+1} \lambda a_{1k} g(A(1|k)) \\ &= \lambda \cdot f(A). \end{aligned}$$

iii) Sea $A = (A_1 | \dots | A_j | \dots | A_j | \dots | A_{n+1})$, donde la k -ésima columna coincide con la j -ésima ($k > j$). Entonces

$$f(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k, j}}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{1i} g(A(1|i)) + (-1)^{j+1} a_{1j} g(A(1|j)) + (-1)^{k+1} a_{1j} g(A(1|k)).$$

Observamos que para cada $i \neq j, k$, la matriz $A(1|i)$ tiene dos columnas iguales, con lo que $g(A(1|i)) = 0$. Además $A(1|j)$ y $A(1|k)$ sólo difieren en la posición de una columna: la j -ésima columna de $A(1|k)$ es la $(k-1)$ -ésima columna de $A(1|j)$. En consecuencia, $A(1|j)$ puede obtenerse a partir de $A(1|k)$ mediante $k-1-j$ intercambios de columnas y por lo tanto, $g(A(1|k)) = (-1)^{k-1-j}g(A(1|j))$. Luego

$$\begin{aligned} f(A) &= (-1)^{j+1} a_{1j} g(A(1|j)) + (-1)^{k+1} a_{1j} (-1)^{k-1-j} g(A(1|j)) \\ &= ((-1)^{j+1} + (-1)^{2k-j}) a_{1j} g(A(1|j)) = 0. \end{aligned}$$

Esto prueba que f es multilineal alternada.

Calculemos $f(I_{n+1})$. Se tiene que

$$f(I_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} (I_{n+1})_{1i} \cdot g(I_{n+1}(1|i)) = (-1)^2 \cdot 1 \cdot g(I_n) = \alpha.$$

Unicidad. Por inducción en n .

Para $n = 1$, basta tener en cuenta que $f : K^{1 \times 1} \rightarrow K$ es multilineal alternada si y sólo si es lineal. Por la condición $f(1) = \alpha$, resulta que la única función con las condiciones requeridas es $f(x) = \alpha \cdot x$.

Supongamos que hay una única $g : K^{n \times n} \rightarrow K$ multilineal alternada con $g(I_n) = \alpha$.

Consideremos $f : K^{(n+1) \times (n+1)} \rightarrow K$ multilineal alternada tal que $f(I_{n+1}) = \alpha$. Sea $A = (a_{ij}) \in K^{(n+1) \times (n+1)}$. Por linealidad en la primer columna, se tiene que

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i1} \cdot f \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n+1} \\ 1 & a_{i2} & \dots & a_{in+1} \\ 0 & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

Restándole a la columna j la primer columna multiplicada por a_{ij} para $j = 2, \dots, n+1$, por la Proposición 5.2 iii) tenemos que

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i1} \cdot f \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} a_{i1} \cdot f \left(\begin{array}{ccccccc} a_{12} & \cdots & a_{1i} & 0 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-12} & \cdots & a_{i-1i} & 0 & a_{i-1i+1} & \cdots & a_{i-1n+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+12} & \cdots & a_{i+1i} & 0 & a_{i+1i+1} & \cdots & a_{i+1n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+12} & \cdots & a_{n+1i} & 0 & a_{n+1i+1} & \cdots & a_{n+1n+1} \end{array} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot f_i(A(i|1)).
\end{aligned}$$

Por el Lema 5.3, $f_i : K^{n \times n} \rightarrow K$ es una función multilineal alternada y $f_i(I_n) = \alpha$, luego debe ser $f_i = g$. Por lo tanto, $f(A)$ es necesariamente

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot g(A(i|1)),$$

de donde f es única. □

De la demostración anterior se deduce inmediatamente el siguiente resultado:

Corolario 5.6 *Sea $A \in K^{n \times n}$. Si para cada $r \in \mathbb{N}$, $\det : K^{r \times r} \rightarrow K$ denota la función determinante de orden r (quedando en claro por el contexto de qué función determinante se trata), entonces*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det(A(i|1)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{1i} \cdot \det(A(1|i)).$$

Las fórmulas recursivas para el cálculo del determinante de una matriz dadas en el corolario anterior se llaman el desarrollo del determinante por la primera columna y por la primera fila respectivamente.

Ejemplo. Calcular $\det(A)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Utilizando la fórmula del desarrollo por la primera fila del Corolario 5.6 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^5 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot \left((-1)^2 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1) \left((-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
& = 2 \cdot (0 + 1) + (-1)(-1) = 3.
\end{aligned}$$

5.2 Propiedades del determinante

En esta sección estudiaremos algunas propiedades básicas de los determinantes que facilitan su cálculo.

5.2.1 Determinante de la transpuesta de una matriz

La identidad enunciada en el Corolario 5.6 nos permite deducir el siguiente resultado:

Proposición 5.7 Sea $A \in K^{n \times n}$. Entonces $\det(A) = \det(A^t)$.

Demostración. Probaremos la igualdad por inducción en n :

Para $n = 1$, no hay nada que probar.

Supongamos que vale para n y sea $A = (a_{ij}) \in K^{(n+1) \times (n+1)}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\det(A^t) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} (A^t)_{1i} \det(A^t(1|i)) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A(1|i)^t) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A(i|1)) = \det(A). \quad \square
\end{aligned}$$

Observación 5.8 La definición de función multilineal alternada podría haberse dado en términos de las filas de las matrices, en lugar de respecto de las columnas, y se hubiese obtenido la misma función determinante.

5.2.2 Matrices triangulares

Un caso en el que es muy fácil calcular determinantes es el de las matrices triangulares. Lo veremos para matrices triangulares superiores, pero el mismo resultado vale para una matriz triangular inferior.

Proposición 5.9 Sea $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ una matriz triangular superior. Entonces $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

Demostración. Probaremos la validez de la fórmula por inducción en n :

Para $n = 1$, no hay nada que hacer.

Supongamos que vale para n y sea $A = (a_{ij}) \in K^{(n+1) \times (n+1)}$ una matriz triangular superior. Entonces

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A(i|1)) = a_{11} \det(A(1|1)),$$

puesto que por nuestra hipótesis sobre A , se tiene que $a_{i1} = 0$ para cada $i \geq 2$.

Ahora, la matriz $A(1|1) \in K^{n \times n}$ es triangular superior y entonces, por hipótesis inductiva, $\det(A(1|1)) = \prod_{j=1}^n (A(1|1))_{jj} = \prod_{i=2}^{n+1} a_{ii}$. En consecuencia,

$$\det(A) = a_{11} \det(A(1|1)) = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii},$$

que es lo que se quería probar. \square

Observación 5.10 Dado que el determinante es una función multilineal alternada por filas (ver Observación 5.8), podemos calcular el determinante de una matriz triangulándola, teniendo en cuenta el cambio del determinante de acuerdo a la operación elemental efectuada:

- $\det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ “Intercambiar dos filas”
cambia el signo del determinante.
- $\det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \lambda F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ “Multiplicar una fila por una constante no nula”
multiplica el determinante por esa constante.
- $\det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i + \lambda F_j \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ “Sumarle a una fila un múltiplo de otra”
no modifica el determinante.

El determinante de la matriz triangular obtenida es el producto de los elementos de su diagonal.

Ejemplo. Calcular $\det(A)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = 3. \end{aligned}$$

5.2.3 Desarrollo del determinante por una fila o columna

Veremos ahora fórmulas para el determinante análogas a las del Corolario 5.6 en las cuales la primera columna (o fila) de la matriz es reemplazada por cualquier otra columna o fila.

Sea $A \in K^{n \times n}$, $A = (a_{ij})$. Sean A_1, \dots, A_n las columnas de A . Observemos que se puede ubicar la j -ésima columna de A en el lugar de la primera, sin modificar el orden de las restantes, por medio de $j - 1$ intercambios de columnas. Entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{j-1} \det(A_j | A_1 | A_2 | \dots | A_{j-1} | A_{j+1} | \dots | A_n) \\ &= (-1)^{j-1} \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{ij} \det(A(i|j)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)), \end{aligned}$$

lo que da una fórmula para el desarrollo del determinante de una matriz por la j -ésima columna para $1 \leq j \leq n$ arbitrario. Usando que $\det(A) = \det(A^t)$, se prueba una fórmula para el desarrollo por la i -ésima fila para cualquier $1 \leq i \leq n$.

Hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 5.11 Sea $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) && \text{para todo } j \text{ con } 1 \leq j \leq n \\ \det(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) && \text{para todo } i \text{ con } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Ejemplo. Calcular $\det(A)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Desarrollando el determinante por la segunda columna, se obtiene:

$$\det(A) = (-1)^{1+2} \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y desarrollando por la tercera columna el determinante del miembro derecho,

$$\det(A) = 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = -2.$$

5.2.4 Determinante del producto de matrices

En esta sección estudiaremos cómo se comporta el determinante con respecto al producto de matrices. Para esto, probaremos en primer lugar un resultado sobre funciones multilineales alternadas que nos será de utilidad.

Proposición 5.12 Sea $f : K^{n \times n} \rightarrow K$ multilineal alternada tal que $f(I_n) = \alpha$. Entonces $f = \alpha \cdot \det$.

Demostración. Como consecuencia de que $\det : K^{n \times n} \rightarrow K$ es una función multilineal alternada, se tiene que $\alpha \cdot \det : K^{n \times n} \rightarrow K$ es multilineal alternada. Además, $(\alpha \cdot \det)(I_n) = \alpha$.

Por la unicidad de las funciones multilineales alternadas (ver Teorema 5.4), resulta que $f = \alpha \cdot \det$. \square

Proposición 5.13 Sean $A, B \in K^{n \times n}$. Entonces $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Demostración. Se define $f : K^{n \times n} \rightarrow K$ como $f(X) = \det(A \cdot X)$. Nuestro objetivo es probar que para cada $B \in K^{n \times n}$ se tiene que $f(B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Observamos que la función f es multilineal alternada y calculamos su valor en I_n :

i) Para i con $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} f(X_1 | \dots | X_i + X'_i | \dots | X_n) &= \det(A \cdot (X_1 | \dots | X_i + X'_i | \dots | X_n)) = \\ &= \det(AX_1 | \dots | AX_i + AX'_i | \dots | AX_n) = \\ &= \det(AX_1 | \dots | AX_i | \dots | AX_n) + \det(AX_1 | \dots | AX'_i | \dots | AX_n) = \\ &= f(X_1 | \dots | X_i | \dots | X_n) + f(X_1 | \dots | X'_i | \dots | X_n). \end{aligned}$$

ii) Para $\lambda \in K$, $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} f(X_1 | \dots | \lambda X_i | \dots | X_n) &= \det(A \cdot (X_1 | \dots | \lambda X_i | \dots | X_n)) = \\ &= \det(AX_1 | \dots | A \cdot \lambda X_i | \dots | AX_n) = \lambda \det(AX_1 | \dots | AX_i | \dots | AX_n) = \\ &= \lambda f(X_1 | \dots | X_i | \dots | X_n). \end{aligned}$$

iii) Para $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} f(X_1 | \dots | X_i | \dots | X_i | \dots | X_n) &= \det(A.(X_1 | \dots | X_i | \dots | X_i | \dots | X_n)) = \\ &= \det(AX_1 | \dots | AX_i | \dots | AX_i | \dots | AX_n) = 0. \end{aligned}$$

iv) $f(I_n) = \det(A.I_n) = \det(A)$.

Por la proposición anterior, resulta que $f = \det(A) \cdot \det$.

Luego, para cada $B \in K^{n \times n}$ se tiene que $\det(A.B) = f(B) = \det(A) \cdot \det(B)$. \square

5.3 Determinantes y matrices inversibles

El objetivo de esta sección es estudiar la relación entre determinantes e inversibilidad de matrices. Probaremos que una matriz $A \in K^{n \times n}$ es inversible si y sólo si su determinante es no nulo. A continuación, mostraremos que los determinantes pueden ser utilizados también para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

5.3.1 Inversibilidad de matrices

El siguiente resultado, cuya demostración se basa en la fórmula para el determinante de un producto de matrices vista en la sección anterior, caracteriza la inversibilidad de matrices por medio de determinantes:

Proposición 5.14 *Sea $A \in K^{n \times n}$. Entonces A es inversible si y sólo si $\det A \neq 0$.*

Demostración.

(\Rightarrow) Supongamos que $A \in K^{n \times n}$ es inversible. Entonces existe una matriz $B \in K^{n \times n}$ tal que $A.B = I_n$. Aplicando el resultado de la Proposición 5.13 se obtiene que

$$1 = \det(I_n) = \det(A.B) = \det(A) \cdot \det(B),$$

de donde se deduce que $\det(A) \neq 0$.

(\Leftarrow) Si $\det(A) \neq 0$, entonces las columnas de A son linealmente independientes (ver Proposición 5.2 iv)) y, por lo tanto, A es inversible (ver Ejercicio 17, Sección 2.5). \square

5.3.2 Adjunta de una matriz

Dada una matriz $A \in K^{n \times n}$, podemos asociarle una matriz, cuyos elementos se calculan a partir de determinantes de submatrices de A que, en el caso en que A sea inversible, nos permitirá obtener la inversa de A .

Definición 5.15 Sea $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Se llama *adjunta de A*, y se nota $\text{adj}(A)$, a la matriz $\text{adj}(A) \in K^{n \times n}$ definida por

$$(\text{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(j|i)).$$

Ejemplo. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces la adjunta de A es la matriz

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} +\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ +\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Si calculamos $A \cdot \text{adj}(A)$, tenemos que

$$A \cdot \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que $A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \text{adj}(A)$. Teniendo en cuenta que $\det(A) = 9$, resulta que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$.

En el ejemplo anterior obtuvimos una relación entre la matriz A , su adjunta y su determinante. La siguiente proposición muestra que lo mismo sucede en general.

Proposición 5.16 Sea $A \in K^{n \times n}$. Entonces $A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$. Luego, si $\det(A) \neq 0$, se tiene que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$.

Demostración. Sea $A \in K^{n \times n}$, $A = (a_{ij})$. Entonces

$$(A \cdot \text{adj}(A))_{k\ell} = \sum_{i=1}^n a_{ki} \cdot (\text{adj}(A))_{i\ell} = \sum_{i=1}^n a_{ki} (-1)^{i+\ell} \det(A(\ell|i)).$$

Si $k = \ell$, entonces $(A \cdot \text{adj}(A))_{\ell\ell} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+\ell} a_{\ell i} \det(A(\ell|i)) = \det(A)$, puesto que la sumatoria resulta ser el desarrollo de $\det(A)$ por la ℓ -ésima fila.

Por otro lado, si $k \neq \ell$, se tiene que $(A \cdot \text{adj}(A))_{k\ell} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+\ell} a_{ki} \det(A(\ell|i)) = 0$, puesto que se trata del desarrollo por la ℓ -ésima fila del determinante de la matriz $A^{(k\ell)}$ definida por

$$(A^{(k\ell)})_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq \ell \\ a_{kj} & \text{si } i = \ell \end{cases}$$

que tiene dos filas iguales.

La segunda parte de la proposición se deduce inmediatamente de la igualdad $A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$. \square

5.3.3 Regla de Cramer

Por último en esta sección presentaremos la regla de Cramer, que permite obtener la (única) solución de un sistema lineal no homogéneo cuya matriz asociada es inversible por medio de determinantes.

Proposición 5.17 (Regla de Cramer) *Sea $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ una matriz inversible, y sea $b \in K^{n \times 1}$. Entonces la (única) solución del sistema lineal $A \cdot x = b$ está dada por*

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ i-1} & b_1 & a_{1\ i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2\ i-1} & b_2 & a_{2\ i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ i-1} & b_n & a_{n\ i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A} \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Demostración. Multiplicando la ecuación $A \cdot x = b$ por $\text{adj}(A)$, se tiene que

$$\text{adj}(A) \cdot A \cdot x = \text{adj}(A) \cdot b.$$

Por la proposición anterior y el hecho que A es inversible, $\text{adj}(A) \cdot A = A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$. En consecuencia,

$$\det(A) \cdot x = \text{adj}(A) \cdot b.$$

Sea $1 \leq i \leq n$. Entonces, de la igualdad anterior, resulta que

$$\begin{aligned} \det(A) \cdot x_i &= (\text{adj}(A) \cdot b)_{i1} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \det(A(j|i)) b_j = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_j \det(A(j|i)) = \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ i-1} & b_1 & a_{1\ i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2\ i-1} & b_2 & a_{2\ i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ i-1} & b_n & a_{n\ i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde se deduce la fórmula del enunciado de la proposición. \square

La regla de Cramer en general no se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero es útil para derivar resultados teóricos sobre las soluciones de esta clase de sistemas.

Ejemplo. Sea $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ tal que $\det(A) = \pm 1$ y sea $b \in \mathbb{Z}^n$. Entonces el sistema lineal $A.x = b$ tiene solución en \mathbb{Z}^n .

Sea $x_0 \in \mathbb{Q}^n$ la solución del sistema $A.x = b$. Por la regla de Cramer, sabemos que cada coordenada de x_0 se obtiene como el cociente entre el determinante de una matriz cuyos coeficientes son coeficientes de A y de b , y el determinante de la matriz A . Como tanto los coeficientes de A como los de b son números enteros, el determinante que aparece en cada numerador es un número entero y, puesto que $\det(A) = \pm 1$, el cociente resulta entero. Luego $x_0 \in \mathbb{Z}^n$.

5.4 Cálculo de algunos determinantes

Ejemplo. Calcular el determinante de la matriz $A \in K^{n \times n}$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Probaremos, inductivamente, que $\det(A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$.

Para $n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} t & a_0 \\ -1 & t + a_1 \end{pmatrix} = t(t + a_1) + a_0 = t^2 + a_1t + a_0.$$

Supongamos que vale para toda matriz de este tipo en $K^{n \times n}$. Entonces, dada una matriz de esta forma en $K^{(n+1) \times (n+1)}$, desarrollando el determinante por la primera fila, y aplicando luego la hipótesis inductiva resulta que

$$\det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= t \cdot \det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t + a_n \end{pmatrix} + (-1)^{n+2} a_0 (-1)^n = \\
&= t \cdot (t^n + a_n t^{n-1} + \dots + a_1) + a_0 = t^{n+1} + a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0.
\end{aligned}$$

Ejemplo. Dados $k_1, \dots, k_n \in K$ se define la matriz de *Vandermonde*:

$$V(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & \dots & k_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & \dots & k_n^{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}.$$

$$\text{Entonces } \det(V(k_1, k_2, \dots, k_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (k_j - k_i).$$

Vamos a probarlo por inducción en n :

Para $n = 2$,

$$\det(V(k_1, k_2)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = k_2 - k_1,$$

y por lo tanto, la fórmula vale.

Supongamos ahora que vale para n y calculemos $\det(V(k_1, k_2, \dots, k_n, k_{n+1}))$. Se tiene que

$$\det(V(k_1, k_2, \dots, k_{n+1})) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & \dots & k_{n+1} \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & \dots & k_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^n & k_2^n & \dots & \dots & k_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Para $i = n, n-1, \dots, 2$ a la i -ésima fila de esta matriz le restamos k_1 veces la fila $i-1$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\det(V(k_1, k_2, \dots, k_{n+1})) = \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & k_2 - k_1 & k_3 - k_1 & \dots & k_{n+1} - k_1 \\ 0 & k_2^2 - k_1 k_2 & k_3^2 - k_1 k_3 & \dots & k_{n+1}^2 - k_1 k_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & k_2^n - k_1 k_2^{n-1} & k_3^n - k_1 k_3^{n-1} & \dots & k_{n+1}^n - k_1 k_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 - k_1 & k_3 - k_1 & \dots & k_{n+1} - k_1 \\ 0 & (k_2 - k_1)k_2 & (k_3 - k_1)k_3 & \dots & (k_{n+1} - k_1)k_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (k_2 - k_1)k_2^{n-1} & (k_3 - k_1)k_3^{n-1} & \dots & (k_{n+1} - k_1)k_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \prod_{j=2}^{n+1} (k_j - k_1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_2 & k_3 & \dots & k_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_2^{n-1} & k_3^{n-1} & \dots & k_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \prod_{j=2}^{n+1} (k_j - k_1) \cdot \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (k_j - k_i) \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (k_j - k_i).
\end{aligned}$$

Observación 5.18 Del ejemplo anterior se deduce que, si $k_1, \dots, k_n \in K$ son escalares distintos, la matriz $V(k_1, \dots, k_n) \in K^{n \times n}$ es inversible, pues su determinante es no nulo.

La matriz de Vandermonde se relaciona con el siguiente problema de interpolación: dados $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$ escalares *distintos*, y $\beta_0, \dots, \beta_n \in K$ escalares arbitrarios, hallar un polinomio $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ de grado menor o igual que n tal que $P(\alpha_i) = \beta_i$ para cada $0 \leq i \leq n$. Estas condiciones dan lugar a un sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes de P :

$$(V(\alpha_0, \dots, \alpha_n))^t \cdot x = \beta^t,$$

donde x_i ($0 \leq i \leq n$) representa el coeficiente de X^i en P y $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_n) \in K^{n+1}$.

Ahora, siendo $(V(\alpha_0, \dots, \alpha_n))^t$ una matriz inversible (por ser $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ escalares distintos), este sistema tiene solución única $(a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1}$, y el polinomio $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ cuyos coeficientes son las coordenadas de esta solución resulta ser el único polinomio de grado menor o igual que n que satisface $P(\alpha_i) = \beta_i$ para cada $0 \leq i \leq n$ (polinomio interpolador de Lagrange).

5.5 Rango de una matriz y determinante

De acuerdo a lo que hemos visto previamente, para decidir si una matriz es inversible, basta verificar si su determinante es no nulo. En esta sección veremos que, aún en el caso de una matriz A no inversible, es posible determinar el rango de A calculando determinantes de submatrices de A .

Definición 5.19 Sea $A \in K^{n \times m}$ y sean $1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq m$. Una *submatriz* de A en $K^{r \times s}$ es una matriz $B \in K^{r \times s}$ que se obtiene suprimiendo $n - r$ filas y $m - s$ columnas de A .

Ejemplo. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

- Una submatriz de A de 2×3 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, que se obtiene al suprimir la primera fila de A .
- Una submatriz de A de 2×2 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, que se obtiene al suprimir la tercera fila y la segunda columna de A .

La relación entre rango y submatrices con determinante no nulo viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 5.20 Sea $A \in K^{n \times m}$. Son equivalentes:

- i)* $\text{rg}(A) \geq r$.
- ii)* Existe $B \in K^{r \times r}$ submatriz de A con $\det(B) \neq 0$.

Demostración.

i) \Rightarrow ii) Si $\text{rg}(A) \geq r$, entonces existen r filas F_{i_1}, \dots, F_{i_r} ($i_1 < \dots < i_r$) de A que son linealmente independientes. Consideramos la submatriz A' de A formada por dichas filas. Se tiene que $A' \in K^{r \times m}$ y $\text{rg}(A') = r$. Esto último implica que A' tiene r columnas C_{j_1}, \dots, C_{j_r} ($j_1 < \dots < j_r$) linealmente independientes.

Sea $B \in K^{r \times r}$ la submatriz de A' cuyas columnas son C_{j_1}, \dots, C_{j_r} . Es claro que B es una submatriz de A y, como sus columnas son linealmente independientes, $\det(B) \neq 0$.

ii) \Rightarrow i) Supongamos que $B \in K^{r \times r}$ es una submatriz de A con determinante no nulo. Entonces, las columnas de B son linealmente independientes.

Consideremos la submatriz $A' \in K^{r \times m}$ de A que resulta de suprimir las mismas filas que para obtener B (pero sin suprimir ninguna columna). Entonces las columnas de B son algunas de las columnas de A' , con lo que $\text{rg}(A') \geq \text{rg}(B) = r$ y, por lo tanto, $\text{rg}(A') = r$, pues A' tiene r filas.

Finalmente, observemos que las filas de A son algunas de las filas de A' , de donde $\text{rg}(A) \geq \text{rg}(A') = r$. \square

De esta proposición se desprende el siguiente resultado que permite obtener el rango de una matriz estudiando los rangos de sus submatrices cuadradas.

Observación 5.21 Sea $A \in K^{n \times m}$ una matriz que posee una submatriz de $r \times r$ inversible, pero no posee ninguna submatriz de $(r+1) \times (r+1)$ inversible. Entonces $\text{rg}(A) = r$.

5.6 Otra fórmula para el determinante

Concluimos este capítulo dando una fórmula alternativa para el determinante.

Dada $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$, usando que el determinante es una función multilineal alternada por filas tenemos que

$$\det(A) = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} a_{1i_1} \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

donde e_{i_1} es el i_1 -ésimo vector de la base canónica de K^n . Repitiendo el procedimiento para todas las filas tenemos que

$$\det(A) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq n} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ e_{i_2} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Dado que, si una matriz tiene dos filas iguales, su determinante es cero, en la suma podemos quedarnos sólo con los determinantes de las matrices cuyas filas son los n vectores distintos de la base canónica, eventualmente cambiados de orden. Para facilitar la notación, daremos la siguiente

Definición 5.22 Sea $I_n = \{1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$. Una *permutación* de I_n es una función $\sigma : I_n \rightarrow I_n$ biyectiva. El conjunto de todas las permutaciones de I_n se nota S_n .

Luego,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ sólo depende de la permutación σ y siempre da

1 o -1 (ya que la matriz se obtiene intercambiando filas de la matriz I_n), podemos definir el *signo de la permutación* σ (que notaremos $\text{sg}(\sigma)$) como dicho determinante. Usando esta notación, tenemos:

Proposición 5.23 Sea $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Entonces

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Observación 5.24 Para calcular el signo de una permutación $\sigma \in S_n$ basta considerar la

matriz $\begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ y contar cuántos intercambios de filas se deben realizar para conseguir la

matriz I_n . Si el número de intercambios es r , el signo de la permutación será $(-1)^r$.

Nota. La definición de signo de una permutación puede darse independientemente de la definición de determinante. De esta forma, la identidad de la Proposición 5.23 nos da una función de $K^{n \times n}$ en K que puede probarse que es multilineal alternada y que en la identidad vale 1 y por lo tanto es la función determinante. Esto nos daría una definición no inductiva del determinante independiente de nuestra definición anterior.

5.7 Ejercicios

Ejercicio 1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

i) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

vi) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. Calcular el determinante de las matrices elementales definidas en la Sección 2.3.

Ejercicio 3. Calcular el determinante de $A \in K^{n \times n}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4.

- i) Si $A \in K^{n \times n}$, $B \in K^{m \times m}$ y $C \in K^{n \times m}$, sea $M \in K^{(n+m) \times (n+m)}$ la matriz de bloques definida por $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Probar que $\det(M) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- ii) Sean $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ y para cada i , $1 \leq i \leq n$, sea $A_i \in K^{r_i \times r_i}$. Se considera la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

Calcular $\det(M)$.

Ejercicio 5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6. Calcular inductivamente el determinante de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. (Cálculo alternativo para el determinante de la matriz de Vandermonde.) Dada la matriz

$$V(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & \dots & k_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & \dots & k_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

probar que $\det(V(k_1, k_2, \dots, k_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (k_j - k_i)$ de la siguiente forma: Sin perder generalidad se puede suponer que $k_i \neq k_j$ si $i \neq j$. Si se considera el determinante de $V(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, X)$ como polinomio en X , probar que k_1, \dots, k_{n-1} son sus raíces y factorizarlo.

Ejercicio 8. Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10. Dadas las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

probar que no existe ninguna matriz $C \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $A \cdot C = C \cdot B$. ¿Y si no se pide que C sea invertible?

Ejercicio 11. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y sea $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $B = (b_{ij})$, una matriz tal que $\det(A+B) = \det(A-B)$. Probar que B es invertible si y sólo si $b_{11} \neq b_{21}$.

Ejercicio 12.

i) Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}.$$

Probar que el sistema $A \cdot x = 0$ tiene solución única si y sólo si a, b, c y d no son todos iguales a cero.

ii) Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$.

Ejercicio 13. Sea $A \in K^{n \times n}$ y sea $\lambda \in K$. Probar que existe $x \in K^n$, $x \neq 0$, tal que $A.x = \lambda.x$ si y sólo si $\det(A - \lambda.I_n) = 0$.

Ejercicio 14. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos y no nulos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita.

Sugerencia: Derivar $n - 1$ veces la función $\sum_{i=1}^n c_i e^{\alpha_i x}$.

Ejercicio 15. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iv) } \begin{pmatrix} \cos & 0 & -\text{sen} \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} & 0 & \cos \end{pmatrix}$$

Ejercicio 16. Sea A una matriz inversible. Calcular $\det(\text{adj } A)$. ¿Qué pasa si A no es inversible?

Ejercicio 17.

i) Resolver los siguientes sistemas lineales sobre \mathbb{Q} empleando la regla de Cramer:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} 3.x_1 - x_2 = -3 \\ x_1 + 7.x_2 = 4 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 3.x_1 - 2.x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2.x_3 = 1 \\ 2.x_1 + x_2 + 4.x_3 = 2 \end{cases} \end{array} \quad \text{c) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2.x_2 - 4.x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 5.x_1 + x_2 - 3.x_3 + 2.x_4 = 0 \end{cases}$$

ii) Resolver el siguiente sistema lineal sobre \mathbb{Z}_7 empleando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ x + z = 6 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 18. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Se sabe que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & e & f \\ 5 & h & i \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} a & 2 & c \\ d & 4 & f \\ g & 10 & i \end{pmatrix} = 0, \quad \text{y} \quad \det \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ d & e & -2 \\ g & h & -5 \end{pmatrix} = 0.$$

Calcular $\det A$.

Ejercicio 19.

- i) Sea $A \in K^{3 \times 3}$ no inversible tal que $A_{11} \cdot A_{33} - A_{13} \cdot A_{31} \neq 0$. Calcular la dimensión de $S = \{x \in K^3 / A \cdot x = 0\}$.
- ii) Sea $A \in K^{n \times n}$ no inversible tal que $\text{adj}(A) \neq 0$. Calcular $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(\text{adj}(A))$.

Ejercicio 20.

- i) Sea $A = (a_{ij}) \in K^{6 \times 6}$. ¿Con qué signos aparecen los siguientes productos en $\det(A)$?
- a) $a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} \cdot a_{56} \cdot a_{14} \cdot a_{65}$
- b) $a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{14} \cdot a_{51} \cdot a_{66} \cdot a_{25}$
- ii) Sea $A = (a_{ij}) \in K^{5 \times 5}$. Elegir todos los posibles valores de j y de k tales que el producto $a_{1j} \cdot a_{32} \cdot a_{4k} \cdot a_{25} \cdot a_{53}$ aparezca en $\det(A)$ con signo +
- iii) Sea $A = (a_{ij}) \in K^{4 \times 4}$. Escribir todos los términos de $\det(A)$ que tengan al factor a_{23} y signo +
- iv) Sin calcular el determinante, calcular los coeficientes de X^4 y de X^3 en

$$\det \begin{pmatrix} 2X & X & 1 & 2 \\ 1 & X & 1 & -1 \\ 3 & 2 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{pmatrix}.$$

- v) Sin calcular el determinante, calcular el coeficiente de a^6 y el de b^6 en

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b & 1 & a \\ b & a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 21. Sean $A, B, C, D \in K^{n \times n}$. Sea $M \in K^{2n \times 2n}$ la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que si $A \in GL(n, K)$, $\det(M) = \det(A \cdot D - A \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B)$. Si además $A \cdot C = C \cdot A$ entonces $\det(M) = \det(A \cdot D - C \cdot B)$.