Capítulo 2

Matrices

En el capítulo anterior hemos utilizado matrices para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y hemos visto que, para $n, m \in \mathbb{N}$, el conjunto de las matrices de n filas y m columnas con coeficientes en un cuerpo K es un K-espacio vectorial. A continuación estudiaremos más en detalle estos conjuntos de matrices, así como también ciertas matrices particulares que nos serán de utilidad.

2.1 Definiciones y propiedades

Comenzaremos recordando algunas definiciones y propiedades estudiadas en el capítulo anterior.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. El conjunto de las matrices de n filas y m columnas con coeficientes en un cuerpo K es

$$K^{n\times m} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \ / \ a_{ij} \in K \ \forall \, 1 \le i \le n, \, 1 \le j \le m \right\}.$$

Para definir una matriz en $K^{n\times m}$ basta especificar, para cada $1 \le i \le n$ y cada $1 \le j \le m$, qué elemento de K se halla en el lugar ij (correspondiente a la intersección de la fila i y la columna j) de la matriz.

Ejemplo. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, y sean $1 \le k \le n$, $1 \le l \le m$. Se define la matriz $E^{kl} \in K^{n\times m}$ como

$$(E^{kl})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \, j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Estas matrices se llaman las *matrices canónicas* de $K^{n\times m}$.

Una primera observación que debemos hacer se refiere a cómo determinar si dos matrices (de las mismas dimensiones) son iguales:

Observación 2.1 Sean $A, B \in K^{n\times m}$. Entonces $A = B$ si y sólo si $A_{ij} = B_{ij}$ para cada $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$.

Podemos definir una operación (suma) en $K^{n\times m}$ y una acción de K en $K^{n\times m}$ que transforman a este conjunto en un K-espacio vectorial:

Definición 2.2 Se definen la *suma de matrices* y el *producto por escalares* como

$$\begin{array}{rcl} + & : & K^{n\times m} \times K^{n\times m} \to K^{n\times m},\ (A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \qquad (1 \le i \le n, 1 \le j \le m) \\ \cdot & : & K \times K^{n\times m} \to K^{n\times m},\ (\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda \cdot A_{ij} \qquad (1 \le i \le n, 1 \le j \le m). \end{array}$$

Es fácil verificar que $(K^{n\times m}, +, \cdot)$ es un K-espacio vectorial.

Definiremos ahora un producto que, dadas dos matrices A y B con coeficientes en K tales que *la cantidad de columnas de A es igual a la cantidad de filas de B*, calcula una nueva matriz C.

Definición 2.3 Sean $A \in K^{n\times m}$ y $B \in K^{m\times r}$. Se define el *producto de A por B* como la matriz $C \in K^{n\times r}$ tal que

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj} \qquad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le r.$$

Analizaremos ahora algunas propiedades del producto de matrices y su relación con la suma de matrices.

Proposición 2.4 *Propiedades del producto de matrices:*

1. *Propiedad asociativa: dadas $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times r}$ y $C \in K^{r\times s}$, se tiene que $(A.B).C = A.(B.C)$.*
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n \in K^{n\times n}$ definida por $(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ \ i = j \\ 0 & si\ \ i \ne j \end{cases}$. Entonces, si $A \in K^{n\times m}$, se verifica: $I_n.A = A.I_m = A$.*

   La matriz I_n se denomina matriz identidad *de $K^{n\times n}$.*
3. *Propiedades distributivas:*
   (a) *Si $A \in K^{n\times m}$ y $B, C \in K^{m\times r}$, entonces $A.(B + C) = A.B + A.C$.*
   (b) *Si $A, B \in K^{n\times m}$ y $C \in K^{m\times r}$, entonces $(A + B).C = A.C + B.C$.*

Demostración.

1. Observemos en primer lugar que si $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times r}$ y $C \in K^{r\times s}$, entonces $(A.B).C \in K^{n\times s}$ y $A.(B.C) \in K^{n\times s}$.

Para cada $1 \le i \le n$, $1 \le j \le s$, se tiene:

$$\big((A.B).C\big)_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{r} (A.B)_{i\alpha} C_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{r} \Big(\sum_{\beta=1}^{m} A_{i\beta} B_{\beta\alpha} \Big) C_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{r} \Big(\sum_{\beta=1}^{m} A_{i\beta} B_{\beta\alpha} C_{\alpha j} \Big) =$$

$$\sum_{\beta=1}^{m} \Big(\sum_{\alpha=1}^{r} A_{i\beta} B_{\beta\alpha} C_{\alpha j} \Big) = \sum_{\beta=1}^{m} A_{i\beta} \Big(\sum_{\alpha=1}^{r} B_{\beta\alpha} C_{\alpha j} \Big) = \sum_{\beta=1}^{m} A_{i\beta} (B.C)_{\beta j} = \big(A.(B.C)\big)_{ij}.$$

2. Sean $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$. Se tiene que

$$(I_n.A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (I_n)_{ik} A_{kj} = 1.A_{ij} = A_{ij}.$$

   De la misma manera, $(A.I_m)_{ij} = A_{ij}$ para cada $1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m$.

3. Queda como ejercicio. □

Observemos que, en particular, el producto de matrices está definido para cualquier par de matrices en $K^{n\times n}$ y, por lo tanto, se tiene una operación "producto" en $K^{n\times n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De la proposición anterior se deduce:

Proposición 2.5 $(K^{n\times n}, +, \cdot)$ *es un anillo.*

Si bien el producto de matrices comparte muchas de sus propiedades con el producto usual de números reales, hay propiedades que verifica éste que no son válidas para el producto de matrices:

Observación 2.6 Dos de las propiedades que no se cumplen para el producto de matrices son las siguientes:

- El producto de matrices *no* es conmutativo. Aún en el caso de matrices cuadradas, en el que siempre se pueden calcular $A.B$ y $B.A$, en general se tiene que $A.B \ne B.A$. Por ejemplo, para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que

$$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- El hecho que $A.B = 0$ *no* implica que $A = 0$ o $B = 0$. En el ejemplo anterior, $A \ne 0$, $B \ne 0$, pero $A.B = 0$.

El conjunto $K^{n\times n}$ resulta ser a la vez un anillo y un K-espacio vectorial. La noción que engloba a los conjuntos con estas características es la siguiente:

Definición 2.7 Sea K un cuerpo y sea A un conjunto con dos operaciones, $+$ y $\cdot$, y una acción $\cdot_K$ de K en A tales que

1. $(A, +, \cdot)$ es un anillo
2. $(A, +, \cdot_K)$ es un K-espacio vectorial
3. $(\lambda \cdot_K X) \cdot Y = \lambda \cdot_K (X \cdot Y) = X \cdot (\lambda \cdot_K Y) \quad \forall \lambda \in K \ \forall X, Y \in A$

Se dice entonces que A es una K-*álgebra*.

Observación 2.8 $(K^{n\times n}, +, \cdot_K, \cdot)$ es una K-álgebra.

Observamos que el producto de matrices nos permite escribir un sistema lineal de n ecuaciones con m incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \right.$$

en la forma

$$A.x = b,$$

donde $A \in K^{n\times m}$ es la matriz asociada al sistema, $x \in K^{m\times 1}$ se define como $x_{i1} = x_i$ (matriz de una columna cuyos elementos son las incógnitas del sistema), y $b \in K^{n\times 1}$ se define como $b_{j1} = b_j$ (matriz de una columna cuyos elementos son los resultados a los que están igualadas las ecuaciones). De esta manera, un sistema lineal puede verse como una única ecuación con una única incógnita x, pero que involucra matrices en lugar de escalares.

El hecho que la solución en K de la ecuación $a.x = b$ con $a, b \in K$, $a \neq 0$, se obtiene haciendo simplemente $x = a^{-1}b$, nos lleva a pensar que el sistema lineal $Ax = b$ podría resolverse análogamente como $x = A^{-1}b$ en caso de disponer de una matriz A^{-1} que sea una inversa de A para el producto de matrices. Éste será el tema a estudiar en la próxima sección.

Concluimos esta sección introduciendo dos nociones que nos serán de utilidad en lo sucesivo:

Definición 2.9 Sea $A \in K^{n\times m}$. Se llama matriz *transpuesta* de A, y se nota A^t, a la matriz $A^t \in K^{m\times n}$ definida por $(A^t)_{ij} = A_{ji}$ para cada $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Definición 2.10 Sea $A \in K^{n\times n}$. Se llama *traza* de la matriz A, y se nota $tr(A)$, al escalar $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$.

2.2 Matrices inversibles

No es cierto que todo elemento no nulo de $K^{n\times n}$ tenga inverso con respecto al producto. Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ no tiene inversa. En efecto, $A.B \neq I_2$ para toda matriz $B \in K^{2\times 2}$, puesto que $(A.B)_{22} = 0 \neq (I_2)_{22}$ para toda matriz $B \in K^{2\times 2}$.

En esta sección nos ocuparemos de las matrices que sí tienen inversa y veremos también cómo hallar la inversa de una matriz en el caso en que ésta exista.

Definición 2.11 Una matriz $A \in K^{n\times n}$ se dice *inversible* si existe una matriz $B \in K^{n\times n}$ tal que $A.B = B.A = I_n$.

Observemos que la matriz B de la definición es única. En efecto, si $A.B = B.A = I_n$ y $A.C = C.A = I_n$, entonces

$$B = I_n.B = (C.A).B = C.(A.B) = C.I_n = C.$$

Notación. $B = A^{-1}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideraremos el conjunto de todas las matrices inversibles en $K^{n\times n}$:

$$GL(n, K) = \{A \in K^{n\times n} \ / \ A \text{ es inversible}\}.$$

Nos interesa estudiar la estructura de este conjunto.

Proposición 2.12 *Para cada $n \in N$, se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si $A, B \in GL(n, K)$, entonces $A.B \in GL(n, K)$. Más aún, $(A.B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. En particular, el producto de matrices $\cdot$ es una operación en $GL(n, K)$.*
2. *$I_n \in GL(n, K)$.*
3. *Si $A \in GL(n, K)$, entonces $A^{-1} \in GL(n, K)$.*

Demostración.

1. Sean $A, B \in GL(n, K)$. Entonces existen A^{-1} y B^{-1}. Se tiene que

$$(A.B).(B^{-1}. A^{-1}) = I_n \quad \text{y} \quad (B^{-1}. A^{-1}).(A.B) = I_n.$$

   Entonces $A.B$ es inversible y $(A.B)^{-1} = B^{-1}. A^{-1}$.

2. Es consecuencia de que $I_n.I_n = I_n$.
3. De la definición de inversa se deduce inmediatamente que si $A \in GL(n, K)$, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$ y por lo tanto $A^{-1} \in GL(n, K)$. □

De la proposición anterior y la asociatividad del producto de matrices se deduce que:

Proposición 2.13 $(GL(n, K), \cdot)$ *es un grupo, que se denomina el* grupo lineal general (n, K).

Para concluir esta sección, veremos un método para determinar si una matriz en $K^{n\times n}$ es inversible y, en caso de serlo, encontrar su inversa. Lo describimos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Hallar, si es posible, A^{-1} siendo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Buscamos $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A.B = B.A = I_3$. Si $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, debe ser

$$A.\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta igualdad se traduce en los tres sistemas de ecuaciones siguientes:

$$A.\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A.\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ y} \qquad A.\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que podemos resolver simultáneamente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Entonces $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la igualdad $A.B = I_3$.

Observemos que, si buscamos una matriz C tal que $B.C = I_3$, bastaría con hacer los pasos anteriores, pero a la inversa, con lo que obtendríamos la matriz A.

Luego, $A.B = B.A = I_3$, es decir $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cómo decidir si una matriz es inversible y hallar su inversa:

- Dada $A \in K^{n\times n}$, se arma una matriz en $K^{n\times 2n}$ cuyas primeras n columnas corresponden a la matriz A y cuyas últimas n columnas están formadas por los n vectores de la base canónica de K^n.

Esto corresponde a plantear la ecuación $A.B = I_n$ con $B \in K^{n\times n}$, subdividirla en n sistemas lineales $A.B_i = e_i$, $1 \le i \le n$, igualando columna a columna, y escribir la matriz ampliada de los n sistemas.

- Si al triangular la matriz no aparece ningún cero en la diagonal, se pueden resolver los sistemas que resultan (que tienen solución única) y hallar entonces la inversa de A.

  Para esto se puede proceder como en el ejemplo anterior: al no aparecer ceros en la diagonal, se continúa aplicando operaciones elementales sobre las filas de la matriz de manera que en las primeras n columnas quede formada la matriz I_n. Entonces A^{-1} es la matriz que aparece en las últimas n columnas (esto puede probarse de la misma manera que se hizo en el ejemplo).

- Si al triangular la matriz aparece un cero en la diagonal, la matriz A no es inversible. En efecto, la presencia de un cero en la diagonal al triangular implica que el sistema homogéneo cuya matriz es A tiene solución no trivial, es decir, existe $x_0 \in K^n$ no nulo tal que $A.x_0 = 0$. Si A fuese inversible, multiplicando por A^{-1} resultaría $x_0 = A^{-1}.A.x_0 = 0$, contradiciendo que $x_0 \neq 0$.

2.3 Matrices elementales

El método de triangulación que hemos visto para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales se basa en la aplicación de ciertas operaciones elementales (ver Proposición 1.19) a las ecuaciones o, equivalentemente, a las filas de la matriz del sistema. Como veremos a continuación, cada una de estas operaciones puede verse como la multiplicación a izquierda de la matriz del sistema por una matriz conveniente.

A cada operación de filas en una matriz de $n \times n$, le asociaremos la matriz que se obtiene al aplicarle dicha operación a la matriz identidad I_n. Las matrices obtenidas de esta forma se denominan *matrices elementales*. Tendremos entonces tres familias de matrices elementales, correspondientes a los tres tipos de operaciones de filas permitidas. A continuación damos las definiciones precisas y estudiamos el comportamiento de las matrices elementales con respecto al producto.

Comenzamos definiendo las matrices que corresponden a la operacion *"Intercambiar dos ecuaciones"*.

1. Sean $1 \le i, j \le n$. Se define $P^{ij} \in K^{n\times n}$ como

   $$P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}.$$

   Observamos que P^{ij} es la matriz que resulta al intercambiar las filas i y j en la matriz I_n.

   Es fácil verificar que, dada $B \in K^{n\times n}$ el producto $P^{ij}B$ es la matriz que resulta al intercambiar en la matriz B las filas i y j.

   En particular, $P^{ij}.P^{ij} = I_n$, es decir que P^{ij} es inversible y ${P^{ij}}^{-1} = P^{ij}$.

Ahora introducimos las matrices elementales asociadas a la operación *"Multiplicar una ecuación por una constante no nula."*

2. Sea $a \in K$, $a \neq 0$, y sea $1 \leq i \leq n$. Se define $M_i(a) \in K^{n\times n}$ como

$$M_i(a) = I_n + (a-1).E^{ii}.$$

Observamos que $M_i(a)$ es la matriz que se obtiene al mutiplicar por a la i-ésima fila de la matriz I_n.

Dada $B \in K^{n\times n}$ se tiene que

$$\big(M_i(a).B\big)_{kj} = \begin{cases} B_{kj} & \text{si } k \neq i \\ a.B_{kj} & \text{si } k = i, \end{cases}$$

es decir, $M_i(a).B$ es la matriz que resulta al multiplicar por a la i-ésima fila de B.

En particular, $M_i(a).M_i(a^{-1}) = M_i(a^{-1}).M_i(a) = I_n$, de donde $M_i(a) \in GL(n, K)$ y $(M_i(a))^{-1} = M_i(a^{-1})$.

Finalmente, la tercera de las familias de matrices elementales es la que representa la operación *"Reemplazar una ecuación por ella misma más un múltiplo de otra."*

3. Sea $a \in K$ y sean $i \neq j$ con $1 \leq i, j \leq n$. Se define $T^{ij}(a) \in K^{n\times n}$ como

$$T^{ij}(a) = I_n + a.E^{ij},$$

la matriz que se obtiene de la matriz I_n al sumarle a la i-ésima fila, a por la fila j.

Si $B \in K^{n\times n}$, entonces

$$\big(T^{ij}(a).B\big)_{kl} = \begin{cases} B_{kl} & \text{si } k \neq i \\ B_{il} + a.B_{jl} & \text{si } k = i, \end{cases}$$

o sea que $T^{ij}(a).B$ es la matriz que se obtiene de B al sumarle a la i-ésima fila, a por la fila j.

En particular, se tiene que $T^{ij}(a).T^{ij}(-a) = T^{ij}(-a).T^{ij}(a) = I_n$, con lo que $T^{ij}(a) \in GL(n, K)$ y $(T^{ij}(a))^{-1} = T^{ij}(-a)$.

De las propiedades de las matrices elementales que hemos visto, se deduce que triangular una matriz mediante operaciones sobre sus filas es multiplicarla a izquierda por matrices elementales. En forma totalmente análoga, puede verse que multiplicar una matriz a derecha por matrices elementales corresponde a efectuar operaciones sobre las columnas de la matriz.

Observación 2.14 Sea $A \in K^{n\times n}$. Entonces existen matrices elementales $E_1, \dots, E_r \in K^{n\times n}$ tales que $E_r \dots E_1.A$ es triangular superior. Si además, $E_r \dots E_1.A$ *no* tiene ceros en la diagonal, existen matrices elementales $E_{r+1}, \dots, E_s$ tales que $E_s \dots E_{r+1}.E_r \dots E_1.A = I_n$. En consecuencia, A es producto de matrices elementales: $A = E_1^{-1} \dots E_s^{-1}$, y $A^{-1} = E_s \dots E_1$.

En particular, esta observación nos dice que si por medio de la aplicación de operaciones elementales a las filas de la matriz A obtenemos la matriz identidad I, entonces aplicando las mismas operaciones en las filas de I obtendremos A^{-1}.

Por otro lado, nos da un teorema de estructura para $GL(n, K)$: así como el Teorema Fundamental de la Aritmética en $\mathbb{Z}$ dice que todo número entero no nulo es producto de enteros *primos*, la observación anterior nos dice que toda matriz en $GL(n, K)$ es producto de matrices *elementales*.

2.4 Coordenadas

Dado un K-espacio vectorial V de dimensión n y fijada una base B de V, mediante el concepto de coordenadas de un vector en la base B podremos "identificar" cada elemento de V con un vector en K^n y trabajar entonces con elementos de K^n.

2.4.1 Coordenadas de un vector en una base

Definición 2.15 Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Dado $x \in V$, existen únicos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tales que $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ (ver Proposición 1.37). El vector $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ se llama el *vector de coordenadas de x en la base B* y será denotado por $(x)_B$.

Ejemplos.

i) Sea $V = \mathbb{R}_4[X]$ y sea $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ base de V.
Las coordenadas de $X^3 + 3X^2 - 1$ en la base B son $(X^3 + 3X^2 - 1)_B = (-1, 0, 3, 1, 0)$.
Sea $B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$. Entonces $(X^3 + 3X^2 - 1)_{B'} = (0, 1, 3, 0, -1)$.

ii) Sea $V = \mathbb{R}^3$ y sea $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la base canónica. Entonces para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $(x, y, z)_E = (x, y, z)$.

iii) Sea $V = \mathbb{R}^3$ y sea $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) = z.(1, 1, 1) + (y - z).(1, 1, 0) + (x - y).(1, 0, 0).$$

Entonces, $(x, y, z)_B = (z, y - z, x - y)$.

Observemos que el vector de coordenadas en la base B de un elemento de $\mathbb{R}^3$ se obtiene de su vector de coordenadas en la base canónica multiplicando éste por una matriz apropiada: Si $v \in \mathbb{R}^3$ tiene coordenadas (x, y, z) en la base canónica E, entonces

$$((v)_B)^t = \begin{pmatrix} z \\ y - z \\ x - y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{C(E,B)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C(E, B).\,((v)_E)^t\,.$$

2.4.2 Cambios de base

Dadas dos bases de un mismo K-espacio vectorial V de dimensión finita, cada elemento de V tiene asociados dos vectores de coordenadas (generalmente distintos), uno en cada una de las bases. Con la ayuda de cierta matriz, llamada de cambio de base, se pueden obtener las coordenadas de un vector con respecto a una base de V a partir de las coordenadas del vector en otra base.

Definición 2.16 Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, y sean $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases de V. Para cada $1 \le j \le n$, sean $\alpha_{ij} \in K$ $(1 \le i \le n)$ tales que $v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w_i$. Se llama *matriz de cambio de base de* B_1 *a* B_2, y se nota $C(B_1, B_2) \in K^{n\times n}$, a la matriz definida por $(C(B_1, B_2))_{ij} = \alpha_{ij}$ para cada $1 \le i, j \le n$.

En otros términos, la matriz de cambio de base $C(B_1, B_2) \in K^{n\times n}$ es la matriz cuya j-ésima columna son las coordenadas en la base B_2 del j-ésimo vector de la base B_1, para cada $1 \le j \le n$.

Ejemplo. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Consideremos las bases $B_1 = E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$. Para construir la matriz $C(B_1, B_2) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, comenzamos por escribir los elementos de B_1 como combinación lineal de los de B_2:

$$\begin{array}{rcl} (1,0,0) & = & 0.(1,1,1) + 0.(1,1,0) + 1.(1,0,0) \\ (0,1,0) & = & 0.(1,1,1) + 1.(1,1,0) + (-1).(1,0,0) \\ (0,0,1) & = & 1.(1,1,1) + (-1)(1,1,0) + 0.(1,0,0) \end{array}$$

Entonces, la matriz de cambio de base es:

$$C(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Comparar con el Ejemplo iii) de la sección anterior.)

La proposición siguiente muestra que la matriz de cambio de base cumple la propiedad que hemos mencionado al comienzo de esta sección.

Proposición 2.17 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, y sean B_1 y B_2 bases de V. Entonces, para cada $x \in V$,*

$$C(B_1, B_2).((x)_{B_1})^t = ((x)_{B_2})^t.$$

Demostración. Sean $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$. Supongamos que, para cada $1 \le j \le n$, $v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w_i$, con $\alpha_{ij} \in K$ para cada $1 \le i \le n$; es decir, $(C(B_1, B_2))_{ij} = \alpha_{ij}$ $(1 \le i, j \le n)$.

Sea $x \in V$. Si $x = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k v_k$, entonces para cada $1 \le h \le n$,

$$\Big(C(B_1, B_2).((x)_{B_1})^t\Big)_h = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{hr} a_r.$$

Si $b_h = \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha_{hr} a_r$ para cada $1 \le h \le n$, por la unicidad de las coordenadas en una base, para probar que $(x)_{B_2} = (b_1, \dots, b_n)$ basta ver que $x = \sum\limits_{h=1}^{n} b_h w_h$. Ahora,

$$\sum_{h=1}^{n} b_h w_h = \sum_{h=1}^{n} \Big(\sum_{r=1}^{n} \alpha_{hr} a_r\Big) w_h = \sum_{h=1}^{n} \Big(\sum_{r=1}^{n} \alpha_{hr} a_r w_h\Big) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \Big(\sum_{h=1}^{n} \alpha_{hr} a_r w_h\Big) = \sum_{r=1}^{n} a_r \Big(\sum_{h=1}^{n} \alpha_{hr} w_h\Big) = \sum_{r=1}^{n} a_r v_r = x,$$

que es lo que queríamos probar. □

Una pregunta que surge es la de la unicidad de la matriz de cambio de base: dadas dos bases B_1 y B_2, la matriz $C(B_1, B_2)$ que hemos definido transforma coordenadas en la base B_1 en coordenadas en la base B_2. ¿Existirá alguna otra matriz en $K^{n\times n}$ con esta misma propiedad? El resultado que probamos a continuación nos asegura que no.

Proposición 2.18 *Sean $A, A' \in K^{n\times n}$. Si $A.x = A'.x$ para todo $x \in K^n$, entonces $A = A'$.*

Demostración. Sea $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de K^n. Por hipótesis, $A.e_j = A'.e_j$ para cada $1 \le j \le n$. Pero

$$(A.e_j)_i = \sum_{h=1}^{n} A_{ih}(e_j)_h = A_{ij} \qquad \text{y} \qquad (A'.e_j)_i = \sum_{h=1}^{n} A'_{ih}(e_j)_h = A'_{ij}$$

para cada $1 \le i \le n$, de donde $A_{ij} = A'_{ij}$ para todo $1 \le i, j \le n$. Luego, $A = A'$. □

De las proposiciones anteriores se desprende:

Observación 2.19 Dadas dos bases B_1 y B_2 de un espacio vectorial V de dimensión n, la matriz $C(B_1, B_2)$ es la única matriz en $K^{n\times n}$ que verifica $C(B_1, B_2)((x)_{B_1})^t = ((x)_{B_2})^t$ para todo $x \in V$.

Esta observación dice que si una matriz A verifica $A.((x)_{B_1})^t = ((x)_{B_2})^t$ para todo $x \in V$, entonces necesariamente $A = C(B_1, B_2)$. Utilizando este resultado, es fácil probar las igualdades que enunciamos a continuación.

Corolario 2.20 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, y sean B_1, B_2 y B_3 bases de V. Entonces:*

1. $C(B_1, B_3) = C(B_2, B_3).C(B_1, B_2)$.
2. $C(B_2, B_1) = C(B_1, B_2)^{-1}$.

Para terminar, probaremos algunos resultados que relacionan matrices inversibles con cambios de base.

Proposición 2.21 *Sea $A \in GL(n, K)$. Existen bases B_1, B_2 de K^n tales que $A = C(B_1, B_2)$.*

Demostración. Supongamos que $A_{ij} = a_{ij}$ para cada $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$.

Sea $B_2 = E = \{e_1, \dots, e_n\}$, la base canónica de K^n, y sea $B_1 = \Big\{ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}.e_i, \dots, \sum\limits_{i=1}^{n} a_{in}.e_i \Big\}$.

Veamos que B_1 es una base de K^n, para lo cual basta ver que B_1 es un conjunto linealmente independiente. Supongamos que $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}.e_i \Big) = 0$. Entonces

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_j a_{ij} e_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} e_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} \Big) e_i,$$

de donde $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = 0$ para cada $1 \le i \le n$, o equivalentemente,

$$A. \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Como A es inversible, esto implica que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Luego B_1 es linealmente independiente y, en consecuencia, una base de $K^{n\times n}$.

Es claro que $C(B_1, E) = A$. □

Proposición 2.22 *Sea $A \in GL(n, K)$ y sea B una base de K^n. Entonces:*

i) Existe una base B_1 de K^n tal que $A = C(B_1, B)$.

ii) Existe una base B_2 de K^n tal que $A = C(B, B_2)$.

Demostración.

i) Se prueba en forma análoga a la proposición anterior, reemplazando la base canónica E por la base B dada.

ii) Por la parte *i)*, dadas $A^{-1} \in GL(n, K)$ y la base B de K^n, existe una base B_2 de K^n tal que $A^{-1} = C(B_2, B)$. En consecuencia, $A = C(B_2, B)^{-1} = C(B, B_2)$. □

2.5 Ejercicios

Ejercicio 1. Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $K^{n\times n}$ y calcular su dimensión.

i) $S_1 = \{A \in K^{n\times n} / A = A^t\}$ (matrices simétricas)

ii) $S_2 = \{A \in K^{n\times n} / A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas)

iii) $S_3 = \{A \in K^{n\times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores)

iv) $S_4 = \{A \in K^{n\times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales)

v) $S_5 = \{A \in K^{n\times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = A_{22} = ... = A_{nn}\}$ (matrices escalares)

vi) $S_6 = \{A \in K^{n\times n} / tr(A) = 0\}$

Ejercicio 2. Sean S_1, S_2, S_5 y S_6 los subespacios del ejercicio anterior.

i) Probar que $S_1 \oplus S_2 = K^{n\times n}$ si $2 \neq 0$ en K.

ii) Probar que $S_5 \oplus S_6 = K^{n\times n}$ si $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Ejercicio 3. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$. Probar:

i) Si $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$ con $B = (b_{ij})$ y, para $1 \leq j \leq r$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ (la columna j-ésima de B), entonces $A.B = (\, A.B_1 \mid \ldots \mid A.B_r)$ (es decir, $A.B_j$ es la columna j-ésima de $A.B$).

ii) *(Multiplicación de matrices por bloques.)*
Sean $A,\, A' \in K^{n\times n}$; $B,\, B' \in K^{n\times m}$; $C,\, C' \in K^{m\times n}$ y $D,\, D' \in K^{m\times m}$.
Sean $M,\, M' \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ definidas por $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$.
Entonces $M.M' = \begin{pmatrix} A.A' + B.C' & A.B' + B.D' \\ C.A' + D.C' & C.B' + D.D' \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.

i) Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el producto de matrices en $K^{n\times n}$ no es conmutativo.

ii) Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{n\times n} / A.B = B.A \ \ \forall\, B \in K^{n\times n}\}$.

iii) Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que el conjunto S de todas las matrices que conmutan con A es un subespacio de $K^{n\times n}$. Probar que $I_n \in S$ y que $A^j \in S \ \ \forall\, j \in \mathbb{N}$.

iv) Sea $A \in K^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Probar que el conjunto $\{I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2-1}\}$ es linealmente dependiente.

v) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in K^{n\times n}$ para que

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b) $A^2 - B^2 = (A-B).(A+B)$

vi) Probar que si A y $B \in K^{n\times n}$ no necesariamente vale $A^2.B^2 = (A.B)^2$

Ejercicio 5. Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$ $(n \geq 2)$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones:

i) $A.B = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$ ó $B = 0$

ii) $A.B = A.C$ y $A \neq 0 \;\Rightarrow\; B = C$

iii) $A.B = 0 \;\Rightarrow\; B.A = 0$

iv) $A^j = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$

v) $A^2 = A \;\Rightarrow\; A = 0$ ó $A = I_n$

Ejercicio 6. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que el conjunto $T = \{B \in K^{n\times n} / A.B = 0\}$ es un subespacio de $K^{n\times n}$. Si $S \subset K^n$ es el subespacio de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz asociada es A, probar que $\dim T = n.\dim S$.

Ejercicio 7. Sean $A, A' \in K^{m\times n}$; $B \in K^{n\times r}$; $D, D' \in K^{n\times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

i) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$

ii) $(\alpha.A)^t = \alpha.A^t$

iii) $(A.B)^t = B^t.A^t$

iv) $tr(D + D') = tr(D) + tr(D')$

v) $tr(\alpha.D) = \alpha.tr(D)$

vi) $tr(D.D') = tr(D'.D)$

Ejercicio 8. Sean A y $B \in K^{n\times n}$.

i) Probar que si A y B son triangulares superiores, $A.B$ es triangular superior.

ii) Probar que si A y B son diagonales, $A.B$ es diagonal.

iii) Probar que si A es estrictamente triangular superior (es decir, $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $A^n = 0$.

Ejercicio 9. Sea $A \in K^{n\times n}$.

i) Probar que $A.A^t$ y $A^t.A$ son simétricas. Encontrar un ejemplo donde $A.A^t \neq A^t.A$.

ii) El producto de dos matrices simétricas, ¿es una matriz simétrica?

iii) Si $K = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff A.A^t = 0 \iff tr(A.A^t) = 0$.

Ejercicio 10. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

i) Hallar b y $c \in \mathbb{R}$ tales que $A^2 + b.A + c.I_2 = 0$.

ii) Calcular $A^n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 11. Sea $A \in K^{2\times 2}$ con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y sea $\Delta = a.d - b.c$. Probar que, si $\Delta \neq 0$, $A \in GL(2, K)$ y $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} . \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ejercicio 12. Sea $A \in GL(n, K)$ y $B\,,\ C\ \in K^{n\times m}$. Probar:

i) $A.B = A.C \ \Rightarrow\ B = C$

ii) $A.B = 0 \ \Rightarrow\ B = 0$

Ejercicio 13. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

i) $A\,,\ B \in GL(n, K) \ \Rightarrow\ A + B \in GL(n, K)$

ii) $A \in GL(n, K) \iff A^t \in GL(n, K)$

iii) $tr(A) = 0 \ \Rightarrow\ A \notin GL(n, K)$

iv) A nilpotente (es decir, $\exists\, j \in \mathbb{N} \,/\, A^j = 0$) $\ \Rightarrow\ A \notin GL(n, K)$

Ejercicio 14. Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $b \in K^m$. Sea $H = \{x \in K^n \,/\, A.x = b\}$. Probar:

i) Si $C \in GL(m, K)$, entonces $H = \{x \in K^n \,/\, (C.A).x = C.b\}$.

ii) Si $m = n$ y $A \in GL(n, K)$, entonces H tiene un solo elemento. ¿Cuál es? (Notar que esto significa que si A es inversible, cualquier sistema lineal cuya matriz asociada sea A tiene solución única).

Ejercicio 15.

i) Sea $A = T^{12}(1) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Calcular A^{20} y $20.A$.

ii) Calcular $(P^{ij})^{15}$ y $(P^{ij})^{16}$.

iii) Sea $B = M_3(2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Calcular B^{20} y $20.B$.

Ejercicio 16. Averiguar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

v) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

iii) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

Ejercicio 17. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $b \in K^n$.

i) Probar que el sistema $A.x = b$ tiene solución única $\iff A \in GL(n, K)$.

ii) Probar que $A \in GL(n, K) \iff$ las filas de A son linealmente independientes $\iff$ las columnas de A son linealmente independientes.

Ejercicio 18. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que:

$$\exists\, B \in K^{n\times n} /\, B.A = I_n \iff A \in GL(n, K).$$

Deducir que $\exists\, B \in K^{n\times n} /\, A.B = I_n \iff A \in GL(n, K)$.

Ejercicio 19. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

i) $V = K^n$; $v = (x_1, \dots, x_n)$ y B la base canónica

ii) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, 2, -1)$ y $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$

iii) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, -1, 2)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$

iv) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$

v) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3\,,\, 1 + X\,,\, X^2 + 5\,,\, X^3 + X^2\}$

vi) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 20. Calcular $C(B,B')$ en los siguientes casos:

i) $V=\mathbb{R}^2,\ B=\{(1,1),(1,2)\}\,,\ B'=\{(-1,3),(2,5)\}$

ii) $V=\mathbb{R}^3,\ B=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}\,,\ B'=\{(-1,1,1),(2,0,1),(1,-1,3)\}$

iii) $V=\mathbb{R}^3,\ B=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}\,,\ B'=\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$

iv) $V=\mathbb{R}_2[X],\ B=\{3\,,\,1+X\,,\,X^2\}\,,\ B'=\{1\,,\,X+3\,,\,X^2+X\}$

v) $V=\mathbb{R}^4,\ B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\,,\ B'=\{v_3,v_1,v_4,v_2\}$

vi) $V=\mathbb{R}^{2\times 2},\ B=\{E^{11},\,E^{12},\,E^{21},\,E^{22}\}\,,$
$$B'=\left\{\begin{pmatrix}1&3\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\2&5\end{pmatrix}\right\}$$

Ejercicio 21. Dado $v\in V$ y las bases B y B', hallar las coordenadas de v respecto de B y utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B'.

i) $v=(2,3)$ y $B,\ B'$ como en el Ejercicio 20, i)

ii) $v=(-1,5,6)$ y $B,\ B'$ como en el Ejercicio 20, ii)

iii) $v=(-1,5,6)$ y $B,\ B'$ como en el Ejercicio 20, iii)

iv) $v=2.v_1+3.v_2-5.v_3+7.v_4$ y $B,\ B'$ como en el Ejercicio 20, v)

v) $v=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ y $B,\ B'$ como en el Ejercicio 20, vi)

Ejercicio 22. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sean B, B' y B'' bases de V.

i) Probar que $C(B,B'')=C(B',B'').\,C(B,B')$.

ii) Deducir que $C(B,B')\in GL(n,K)$ con $C(B,B')^{-1}=C(B',B)$.

Ejercicio 23. Dadas la matriz $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ y la base $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ de K^3, hallar una base B' tal que $M=C(B,B')$.

Ejercicio 24. Dadas la matriz $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ y la base $B'=\{v_1,v_2,v_3\}$ de K^3, hallar una base B tal que $M=C(B,B')$.