Teoría Geométrica de la Medida
Ejercicios

Ejercicio 29: (Clase 17, 21/06)

Probar que en $\mathbb{R}^n$, las medidas de Hausdorff h^s, con $0 \leq s < n$, no son de Radón.

Ejercicio 30: (Clase 17, 21/06)

Sea $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación ortogonal, es decir,

$$\langle Ox, Oy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Si $H^n = \frac{\alpha(n)}{2^n} h^n$, probar que

$$H^n(A) = H^n(O(A)) \quad \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n$$

y que

$$dim_H(A) = dim_H(O(A)) \quad \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Ejercicio 31: (Clase 17, 21/06)

Sea $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Si se define

$$\nu(A) := H^n(L(A)) \quad \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n,$$

demostrar que:

i) ν es una medida de Radón,

ii) ν es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue n-dimensional.

Ejercicio 32: (Clase 17, 21/06)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible Lebesgue y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $(n \leq m)$ una función Lipschitz.
Dado $k \in \mathbb{N}$, sea

$$B_k = \left\{ \frac{1}{2^k}\Big([0,1)^n + j\Big) : j \in \mathbb{Z}^n \right\},$$

el conjunto de los cubos diádicos de nivel k.
Si se definen las funciones $g_k : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, por

$$g_k(y) := \sum_{Q \in B_k} \chi_{f(A \cap Q)}(y),$$

y

$$g(y) := \lim_{k \to +\infty} g_k(y),$$

probar que

$$g(y) = H^0(A \cap f^{-1}(\{y\})).$$