Teoría Geométrica de la Medida
Ejercicios

Ejercicio 26: (Clase 14, 05/06)

Sea $A \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ expansiva, $D = \{k_1, \dots, k_q\}$ un conjunto de dígitos del cociente $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$ y Q el conjunto invariante asociado a $\phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_q\}$, donde $\varphi_i(x) = A^{-1}(x + k_i)$.

Si $F = \bigcup_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}(Q + \gamma)$, probar que existe $c > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $\exists\ x_0 \in F$ con $\|x_0 - x\| \leq c$.

Ejercicio 27: (Clase 14, 05/06)

Sea $A \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ expansiva y $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ compacto, con las siguientes propiedades:

i) $|Q \cap Q + \gamma| = 0$, si $\gamma \neq 0$,

ii) Existe un conjunto de dígitos $\{k_1, \dots, k_q\}$ tal que $AQ = \bigcup_{i=1}^q Q + k_i$,

iii) $\bigcup_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}(Q + \gamma) = \mathbb{R}^d$.

Si se define la sucesión de subconjuntos $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ como

$$V_0 = \overline{gen\{\chi_{Q+\gamma} : \gamma \in \mathbb{Z}^d\}} \quad \text{y} \quad V_j = D_A^j V_0,$$

donde $D_A(f) = |A|^{j/2} f(A^j.-)$, probar que

(a) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^d)$.

(b) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

Ejercicio 28: (Clase 14, 05/06)

Sea $A \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ expansiva, $D = \{k_1, \dots, d_q\}$ un conjunto de dígitos del cociente $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$ y Q el conjunto invariante asociado a $\phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_q\}$, donde $\varphi_i(x) = A^{-1}(x+k_i)$. Supongamos que $|Q| = 1$ y sean $\psi^1, \dots, \psi^{q-1}$ funciones de la forma $\psi^s = \sum_{k_i\in D} \alpha_i^s \chi_{Q+k_i}$ que verifican las siguientes propiedades:

i) $\psi^i \perp \psi^j$, si $i \neq j$,

ii) $\|\psi^s\|_2 = 1$ si $1 \leq s \leq q - 1$,

iii) $\int_{\mathbb{R}^d} \psi^j(x)dx = 0$, para todo $1 \leq j \leq q - 1$.

Probar que $\{q^{j/2}\psi^s(A^j x - \gamma) : j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \mathbb{Z}^d, s = 1, \dots, q - 1\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^d)$.