

CLAMI

CENTRO LATINOAMERICANO DE MATEMATICA E INFORMATICA

17

PRIMER ENCUENTRO
NACIONAL
DE
ANALISTAS

**PRIMER ENCUENTRO
NACIONAL
DE
ANALISTAS**

Centro Latinoamericano de Matemática e Informática (CLAMI)

1992

**PRIMER ENCUENTRO NACIONAL
DE ANALISTAS**

El Primer Encuentro Nacional de Analistas se realizó en Mendoza, Argentina, en la sede del CRICYT (Centro Regional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas "Mendoza") desde el 23 al 25 de abril de 1992.

El presente volumen contiene las conferencias pronunciadas por distinguidos analistas extranjeros y argentinos.

Agradecemos, especialmente, al Doctor Eduardo Zarattonello y al personal del CRICYT toda la cooperación prestada para la realización de este Encuentro.

SUSANA ELENA TRIONE

JAMOLDA OBTIENIENDO PREMIO
PATRIOTICA 81

En el mes de octubre de 1981, la JMO
obtuvo el premio Patriótica 81 por su
trabajo en el campo de la cultura y el
deporte. Este premio es otorgado por el
Estado a las organizaciones que realizan
trabajos de gran importancia para el
bienestar de la población.

MINISTERIO DE CULTURA

La impresión en TPX de las conferencias fue realizada por la Licenciada
María Fernanda Otero, Analista de Sistemas del Centro Latinoamericano
de Matemática e Informática (CLAMI), a quien agradezco su esmerado y
cuidadoso trabajo.

También agradezco la colaboración de la señorita Lidia Franci Berté
por la corrección de los trabajos.

SUSANA ELENA TRIONE

INDICE

1	H. Aimar Problemas de análisis lateral
5	A. Benedek - R. Panzone Representación de los números complejos en la base de Gauss
27	J.E. Bouillet Ecuaciones de tipo conducción-difusión con función constitutiva no monótona
30	T. Godoy - L. Saal - M. Urciuolo Acotación $-L^p(\mathbb{R}^n)$ de ciertos operadores integrales singulares
36	E.J. Lami Dozo - A. Touzani Autovalores con peso indefinido del A_p Laplaciano
47	M.C. Mariani El problema de Plateau para la ecuación de curvatura media prescripta
58	D.A. Tarzia Numerical analysis of a mixed elliptic problem with solution of non-constant sign
74	B.E. Viviani Los espacios tienda y su aplicación a la acotación de operadores a valores vectoriales
79	I. Zalduendo Extensiones de formas multilineales y funciones analíticas sobre espacios de Banach
86	F. Zo Convergencia de mejores aproximantes en espacios de Orlicz

BOGOTÁ

INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

SECCIÓN DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

LABORATORIO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

SECCIÓN DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

LABORATORIO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

SECCIÓN DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

LABORATORIO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

LABORATORIO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

LABORATORIO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

LABORATORIO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

LABORATORIO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

Centro Latinoamericano de
Matemática e Informática
CLAMI

PRIMER ENCUENTRO

NACIONAL
DE
ANALISTAS

23 - 25 de abril de 1992

PROBLEMAS DE ANALISIS LATERAL

Hugo Aimar

En [S] (1986) E. Sawyer investiga la validez desigualdades con pesos para el operador maximal unidimensional lateral en el que, para un punto x fijo en R , se toma el supremo de los promedios sobre todos los intervalos reales que tienen a x como extremo izquierdo

$$M^+ f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(y)| dy.$$

Como el operador M^+ está acotado por el maximal de Hardy - Littlewood, resulta claro que la condición A_p de Muckenhoupt en un peso W es suficiente para la acotación de M^+ en $L^p(W)$. El resultado de Sawyer y los trabajos posteriores de Martin Reyes, Ortega Salvador y de la Torre (ver [MOT]) inician el análisis de las clases laterales A_p^+ y A_p^- .

La investigación de la relación entre las funciones de oscilación media acotada (BMO) se inicia aun antes de la definición de las clases A_p en un trabajo de J. Moser [M1] en 1961. La situación para las clases de pesos laterales es similar. El propio J. Moser en 1967, [M2], introduce espacios de tipo BMO laterales, establece un lema de tipo John - Nirenberg y lo usa para probar que una potencia pequeña de la exponencial de una función en tales clases BMO satisface una condición de tipo A_2 lateral. Uno de los problemas básicos de la teoría de pesos laterales es su extensión a dimensiones mayores que uno manteniendo una caracterización maximal de los mismos. Sin embargo, la teoría de funciones de oscilación media lateral acotada puede extenderse hasta espacios de tipo homogéneo y por consiguiente es posible obtener condiciones de tipo A_p lateral en estos contextos que incluyen los espacios euclidianos n -dimensionales. A continuación describiremos brevemente esta generalización. Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Sea B la familia de las d -bolas en X . Diremos que una aplicación $T : B \rightarrow B$ es un flujo en el espacio de tipo homogéneo si para cada bola B en B , el radio de $T(B)$ es comparable al radio de B y la distancia del centro de $T(B)$ al centro de B está acotada por una constante veces el radio de B . Es claro que, como B se identifica con el producto $X \times R^+$, la aplicación T puede escribirse en la forma $T(x, r) = (\xi, \rho)$ y las condiciones que definen el flujo son $r \simeq \rho$ y $d(x, \xi) \leq cr$. Decimos que una función real f en $L^1_{loc}(X)$ satisface una condición de oscilación media acotada con respecto al flujo T en el espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) si y sólo si

existen una constante c y para cada bola B en B una constante c_B tales que

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B (f - c_B)^+ d\mu \leq c,$$

$$\frac{1}{\mu(T(B))} \int_{T(B)} (c_B - f)^+ d\mu \leq c.$$

En este caso diremos que f pertenece a $BMO(X, T)$. El resultado clásico que contiene al análogo del Teorema de John - Nirenberg e induce una clase A_2 asociada a un flujo en un espacio de tipo homogéneo está contenido en el siguiente teorema (ver [A]).

Teorema Sea T un flujo inyectivo sobre la bola $B(x_0, R_0)$ en (X, d, μ) con la siguiente propiedad: existe $0 < \gamma < 1$ tal que para cada $r \leq R_0$

$$B(x_0, \gamma r) \times (0, \gamma r] \subset T(B(x_0, r) \times (0, r]).$$

Entonces existen dos constantes δ y c que sólo dependen de las constantes del espacio de las constantes del flujo y de γ y un flujo S sobre la bola $B(x_0, \delta R_0)$ ($S(x, r) = (\xi, t)$) tal que si $f \in BMO(B(x_0, R_0), T)$ y $\nu = e^{-f}$, la desigualdad

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \nu^{-\epsilon} d\mu \right) \left(\frac{1}{\mu(S(B))} \int_{S(B)} \nu^\epsilon d\mu \right) \leq c$$

es válida para algún $\epsilon > 0$ que depende sólo de la norma de f y para toda $B = B(x, r)$ con $(x, r) \in B(x_0, \delta R_0) \times (0, \delta R_0]$. Más aun S puede escribirse explícitamente en términos de T

$$S(x, r) = (\xi(x, r/\eta); \eta\rho(x, r/\eta))$$

onde η es una constante que sólo depende de las constantes de T .

La demostración del teorema se basa en la extensión de la descomposición de Calderón - Zygmund a este contexto. La misma técnica permite estudiar funciones de tipo Hölder integral lateral asociadas a flujos en espacios de tipo homogéneo. Si en el miembro derecho de las desigualdades que definen $BMO(X, T)$ se admite una función ϕ del radio de la bola B con ϕ creciente $\phi(2r) \leq c\phi(r)$, se dice que $f \in BMO(X, \phi, T)$ y se tiene el siguiente resultado que, bajo condiciones adecuadas de integrabilidad en ϕ , prueba la regularidad lateral para f (ver [A-F]).

Teorema Sea $f \in BMO(X, \phi, T)$. Sea Ψ_B la reordenada decreciente de $[f - \pi_r(B)(f)]^+$ sobre $B = B(x, r)$ con $B = B(x, Nr)$. Entonces existen constantes α, β y γ tales que

$$\Psi_B(t) \leq \beta \int_{\frac{B}{N}(\frac{r}{Nt})}^{\frac{B}{N}(\frac{r}{Nt})} \frac{\phi(s)}{s} ds$$

Una clase diferente de problemas de análisis lateral proviene del estudio de aproximaciones de la identidad laterales relacionadas con los fenómenos de difusión con convección. Estos están gobernados por ecuaciones parabólicas de la forma $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$ donde L es un operador elíptico del tipo $L = \Delta - a \cdot \nabla$ donde a es un campo vectorial constante o variable. Cuando $a(x) = x$, el operador L es el generador infinitesimal del semigrupo de Ornstein - Uhlenbeck que, después de una reparametrización, puede escribirse como un operador integral de la forma

$$P_r f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} P(r, y, z) f(z) d\gamma(z)$$

con $P(r, y, z) = \frac{1}{(\pi(1-r^2))^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|z-y|^2}{1-r^2}}$, $\gamma(B) = \int_B e^{-|z|^2} dz$ y $0 < r < 1$.

Para r e y fijos es máximo del núcleo P_r se alcanza en el punto y/r . Este hecho da a $P_r f$ un carácter de aproximación lateral a la identidad. El estudio del tipo débil (1,1) del operador P^* asociado, plantea nuevos problemas de cubrimiento y descomposición de funciones. En una dimensión C. Calderón y B. Muckenhoupt prueban que P^* es de tipo débil (1,1) con respecto a la medida gaussiana γ . Luego de estimar puntualmente P^* por una maximal unidimensional de promedios. En [Sj] P. Sjögren demuestra el resultado en \mathbb{R}^n sin hacer uso de técnicas de cubrimiento y sin dar estimaciones puntuales por maximales de promedios. En [F] se obtiene el tipo débil de P^* apelando a lemas de cubrimiento de tipo Besicovitch para bolas que, si bien no están centradas en el punto cubierto, éste está "localizado" dentro de aquellas. Un ejemplo sencillo de aplicación de tales lemas puede darse para obtener el tipo débil (1,1) con respecto a medidas μ , que no necesariamente duplcan, de maximales de promedios de la forma

$$M^\mu f(y) = \sup \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas B tales que existe $r > 0$ de manera que $B(y, r) \subset B \subset B(y, \pi r)$. Este tipo de técnicas pueden ser de

utilidad en el estudio de integrales singulares en este contexto.

REFERENCIAS

- [A] Aimar, H. "Elliptic and parabolic BMO and Harnack's inequality" T.A.M.S. 306 1988, 265-276.
- [A-F] Aimar, H.; Forzani, L. "A continuity properties of functions with conditions on the mean oscillation" a aparecer en *Studia Math.*
- [C] Calderón, C.P. "Some remarks on the multiple Weierstrass transform and Abel summability of multiple Fourier series" *Studia Math.* 32 (1969), 119-148.
- [F] Forzani, L. "Temas de cubrimiento de tipo Besicovitch y su aplicación al estudio del operador maximal de OrNSTEIN - Uhlenbeck" Tesis, U.N. San Luis (1993).
- [M1] Moser, J. "An Harnack's theorem for elliptic differential equations" *Comm. Pure Appl. Math.* 14 (1961), 415-426.
- [M2] Moser, J. "A Harnack inequality for parabolic differential equations" *Comm. Pure Appl. Math.* 17 (1964), 101-134.
- [MOT] Martín-Reyes, F.J.; Ortega Salvador, P. y de la Torre, A. "Weighted inequalities for one-sided maximal functions" *TAMS* 319 (1990), 517-534.
- [Mu] Muchenhaupt, B. "Poisson integrals for Hermite and Laguerre expansions" *TAMS* 139 (1969), 231-242.
- [S] Sawyer, E. "Weighted inequalities for the one-sided Hardy Littlewood maximal function" *TAMS* 297 (1986), 53-61.
- [Sj] Sjögren, P. "On the maximal function for the Mehler kernel" *Lecture Notes in the Math* 992, Springer Verlag (1983), 73-82.

REPRESENTACION DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

EN LA BASE DE GAUSS

por

A. Benedek y R. Panzone

1. SISTEMAS DE NUMERACION POSICIONALES. La historia muestra que los sistemas de numeración han desempeñado siempre un importante rol en el mundo. Esto se debe a la importancia de la aritmética elemental en las relaciones humanas, la cual está íntimamente vinculada a la forma de representación de los números: $(a_N \dots a_1 a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} \dots)_b$, a_i = cifra, b = base. Llámese remos dígitos a las cifras 0, 1, ..., 9, que comúnmente vienen asociadas a la base $b=10$. Por aritmética elemental entendemos la ejecución de las cuatro operaciones $+$, $-$, \times , \div en numeración posicional. Algunos sistemas de numeración son muy antiguos. Los babilonios (1750 AC) usaron el sistema sexagesimal ($b=60$) y para uso diario el sistema decimal ($b=10$). Tenían además una notación de punto flotante. Los mayas, al comienzo de nuestra era, usaron la base $b=20$ y los indios (600 AD) el sistema decimal. G.W. Leibnitz en 1703 estudió la base 2 pero casi un siglo después que T. Harriot se hubo interesado en ella. Carlos II de Suecia (1717) trató de introducir en su país el sistema de numeración en base 8. Entre 1850 y 1860, J.W. Nystrom se ocupó de la base $b=16$. En la década 1950-60 se estudiaron bases negativas y en 1960 la base 2i en la que puede representarse todo número complejo con las cifras 0, 1, 2, 3 y sin signos. En 1950 se estudió la base 3 con cifras -1, 0, 1 (el sistema ternario balanceado). La base de Gauss 1-1 fue considerada por D.J. Knuth en 1965. Utiliza las cifras 0 y 1 (véase Teor. 5, S4).

0 ∈ D.

Los enteros del sistema (b,D), por definición, son los

números del conjunto $W = \{ \sum_{j=0}^H a_j b^j : a_j \in D \}$, los números fraccionarios del sistema los del conjunto $F = \{ \sum_{j=0}^{-1} a_j b^j \}$. Los números representables en la base forman el conjunto $G = \{ \sum_{j=0}^H a_j b^j \}$.

Los fraccionarios del sistema constituyen la subfamilia de los números representables que admiten una representación con parte entera nula. F es aquí una suerte de conjunto unitario. Por definición, racionales del sistema serán aquellos números

en G para los que $a_j = 0$ si $j > N \in \mathbb{Z} : Q = \{ \sum_{j=0}^H a_j b^j : M \in \mathbb{N}, H, N \in \mathbb{Z} \}$.

TEOREMA 1. Sean $b = -2$, $D = \{0, 1\}$. Entonces $W = \mathbb{Z}$, $F = [-2/3, 1/3]$, $G = \mathbb{R}$.

DEMOSTRACION. Entre los enteros del sistema W se cuentan 0, 1 y $2 = b^2 + b$. Además, si $a \in W$ entonces $ab \in W$ y $ab+1 \in W$. Luego,

$\{-4, -3, -2, -1, 0\} \subset W$. Siguiendo así vemos que $\mathbb{Z} \subset W$. Por otra parte es obvio que $W \subset \mathbb{Z}$. Sea ahora $f \in F$. Entonces $f = \sum_{j=0}^{-1} a_j b^j =$

$$= \sum_{j=0}^{-1} a_{2j} b^{2j} + \sum_{j=0}^{-1} a_{2j+1} b^{2j+1} = f_1 + f_2, \text{ y se tiene}$$

$$(1) \quad 0 \geq f_2 \geq -2/3 = \sum_{j=0}^{\infty} b^{-2j-1} \in F; \quad 0 \leq f_1 \leq 1/3 = \sum_{j=0}^{\infty} b^{-2j} \in F.$$

Por tanto, $-2/3 \leq f \leq f_1 \leq 1/3$ y $F \subset [-2/3, 1/3]$. Como

los extremos de este intervalo están en F sigue también que $F \cap [-2/3, 1/3] = F$.

Sea $-2/3 < f < 1/3$. Para h entero positivo definimos el número

$f_h \in G$, $f_h := Ab^{-2h}$, donde $A \in \mathbb{Z}$ es tal que $b^{2h} f \in [A, A+1)$.

Luego, para h bastante grande

$$(3) \quad -2/3 < f - b^{-2h} \leq Ab^{-2h} = f_h \leq f < 1/3.$$

(2) y (3) implican $f_h \in F$ y también que $f_h \rightarrow f$ para $h \rightarrow \infty$.

La sucesión $\{f_h\}$ contiene una subsucesión $\{f_{h_i}\}$ que también converge a f pero que estaciona sus coeficientes (es decir, las primeras i cifras de f_{h_i} son las mismas que las de $f_{h_{i+1}}$)

pues $\#D = 2 < \infty$. Por tanto f admite una representación en base b cuyas primeras i cifras son las de f_{h_i} . O sea, $f \in F$. En consecuencia $F = [-2/3, 1/3]$. Finalmente, $G = \cup \{w + F : w \in W\} = \mathbb{R}$, QED.

Dejamos al lector la demostración del

TEOREMA 2. Sea $b = 2$ y $D = \{0, 1\}$. Entonces, $F = [0, 1]$, W coincide con la familia de enteros no negativos y G con la de los reales no negativos.

Si $b = -2$ entonces $1/3 = 0, 011$. (Esta notación indica que el par de cifras 01 se repite periódicamente: $1/3 = 0, 010101\dots$). Pero también $1/3 = 1, 1\bar{0}$. Si $b = 2$ los números negativos no tienen representación con las cifras propuestas. La situación descrita es un caso particular del siguiente resultado.

TEOREMA 3. Sea b un número complejo de módulo mayor que 1 y se $D = \{a_1, \dots, a_k\}$ una familia finita de números complejos que contiene a 0. Entonces, no todo número complejo admite un desarrollo de la forma $\sum_{j=0}^H c_j b^j$ con $c_j \in D$ o algún número más de un desarrollo.

Más adelante veremos que si $b = i^{-1}$ entonces todo número complejo es representable pero hay algunos con tres representaciones :

$$(1-2i)^j / 5 = \sum_{k=1}^m b^{-3j} = 1 + \sum_{k=1}^m b^{-2-3j} = 1 + b + b^2 + \sum_{k=1}^m b^{-1-3j}$$

Por otra parte, si $b \in \mathbb{R}$, $0 \in D \subset \mathbb{R}$, entonces el enunciado del teorema 3 subsiste reemplazando "complejo" por "real".

DEMOSTRACION del TEOR. 3. W es un conjunto numerable. F es compacto; en efecto, si $\{f_n\} \subset F$ entonces existe una sucesión, $\{g_i\}$, tal que para todo i , g_i y g_{i+1} tienen iguales las primeras i cifras de sus representaciones. Es decir, $\{f_n\}$ contiene una subsucesión que estaciona sus cifras en los valores a_{-1}, a_{-2}, \dots , y por lo tanto, $g_i \rightarrow 0, a_{-1} a_{-2} \dots$ para $i \rightarrow \infty$.

Supongamos que $G = U(W+F) : w \in W$ y que cada número sea unívocamente representable. Sea $f_0 \in \mathbb{R}F$ y $z_1 \in \mathbb{C}F$ tal que $z_1 \rightarrow f_0$

$$M(i) = \sum_{j=0}^i a_j(1)b^j + \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j(1)b^j = w_1 + f_1,$$

para $i \rightarrow \infty$. Sea $z_1 = \sum_{j=0}^i a_j(1)b^j + \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j(1)b^j = w_1 + f_1$, con $M(i) \neq 0$. Si $M(i) \rightarrow \infty$ entonces $z_1 b^{-M(i)}$ contiene una subsucesión que converge a un número de la forma $a+h$, $h \in F$, $a \in D$, $a \neq 0$. Como esa subsucesión converge a 0, éste tiene dos representaciones, contradicción. Luego, $\{M(i)\}$ es acotado y una subsucesión de $\{z_1\}$ es de la forma: $z_1 = w + f_1$, $w \in W$.

pero necesariamente $w \neq 0$. Como $z_1 \rightarrow f_0$, existe $f \in F$ tal que $f_0 = w + f$, por lo que la representación de f_0 no es única, contradicción, Q.E.D.

3. SISTEMAS DE RESTOS. Los enteros no negativos pueden ser representados en cualquier base entera $b > 1$ usando las cifras

$0, 1, \dots, b-1$. ¿Podrá ser representado en esa base si recurrimos a un prefijo : -. Si $b < 1$ y $D = \{0, 1, \dots, |b|-1\}$, Z puede representarse en notación posicional y sin prefijo :

$$m \in \mathbb{Z} \implies m = \sum_{k=0}^r a_k b^k, \quad a_k \in D. \text{ Los coeficientes } a_k \text{ no son otra cosa que los restos de } m \text{ en la división por } b : m = b(a_1 b^{r-1} + \dots) + a_0 = b[a_1 b^{r-2} + \dots + a_1] + a_0 = \dots$$

Sea $K = \{p+iq : p, q \in \mathbb{Z}\}$ la familia de enteros gaussianos y $b \in K$ de módulo mayor que 1. Para que todo número de K se pueda representar en forma única en base b con cifras en $D \subset K$ y como entero del sistema (b, D) es necesario que D sea un sistema completo de restos respecto de b . Esto es,

- i) $d_1, d_2 \in D, d_1 \neq d_2 \implies d_1 - d_2 \notin br, r \in K,$
- ii) $g \in K \implies$ existen $d \in D, r \in K$, tales que $g = br + d$.

Si este algoritmo de división aplicado a g termina en un número finito de pasos, $M+1$, tendremos $g = \sum_{j=0}^M a_j b^j = (a_M \dots a_0)_b$, $a_j \in D$.

Sean $b = m+in, |b| > 1$ y $m, n \in \mathbb{Z}$. Sea $D \subset K$ un sistema completo de restos respecto de b . Los enteros gaussianos contenidos en el interior del cuadrado de vértices $0, b, ib, b+ib$ deben tener restos en D diferentes, por lo que es razonable esperar que D tenga cardinalidad del orden de $m^2 + n^2$.

TEOREMA 4 (Gauss). Sea $(m, n) = 1$ y $D = \{0, 1, \dots, m^2 + n^2 - 1\}$. Entonces D es un sistema completo de restos para la base $b = m+in$.

DEMOSTRACION. i) Sea br real, $r = u+iv \in K, r \neq 0$. Entonces, de $Im br = mv + nu = 0$ sigue que $n|v| = m|u|$ y por tanto existe $M \neq 0$ tal que $v = Mn, u = -Nm$. En consecuencia, $r = -Nb$

$y \text{br} = -N|b|^2 = -N(m^2 + n^2)$, por lo que $|b| \geq m^2 + n^2 > d_1 - d_2$, para todo par $d_1, d_2 \in D$. Luego, $\text{br} \notin d_1 - d_2$.

ii) Sea $z = x + iy \in K$. Existe $r = u + iv \in K$ tal que $\text{Im br} = \text{Im}(u + iv) = y$.

Si $R = r + hb$, $h \in Z$, se tiene $\text{br} = \text{br} + h|b|^2$ y por tanto $z - \text{br} =$

$$= \text{Re}(z - \text{br}) = x - \text{Re}(\text{br}) - h|b|^2 =: d \in D, \text{ si } h \text{ es elegido adecuadamente. Entonces } z = \text{br} + d, \text{ QED.}$$

Dejamos al lector la demostración de la importante

PROPOSICION 1. Si D es un sistema completo de restos para la base b entonces los enteros del sistema, W , tienen representación única.

4. REPRESENTACION DE LOS NUMEROS COMPLEJOS. Sea $b = 1 + i$. Del teorema de Gauss sigue que $D = \{0, 1\}$ es un sistema completo de restos. La Prop. 1 afirma que todo entero del sistema tiene representación única. Además $W \subset E$. Esa representación se obtiene con el algoritmo de la división. Como $i = ib + 1$ resulta que el proceso de la división no termina para la unidad imaginaria, por lo que en este sistema $W \neq E$.

Es decir, si $b = m + in$, de m, n coprimos no sigue necesariamente que todo entero gaussiano sea un entero del sistema (b, D) .

Pero si m y n no son coprimos, no existe un sistema completo de restos real $D \subset Z$ para el que K coincida con W . En efecto, si $s|m, s|n, s > 1, d \in D$ y $r \in K$, de $g = \text{br} + d$ seguiría $\text{Im } g = \text{Im br} = mv + nu = s$.

Diremos que (b, D) es un sistema numérico si todo entero gaussiano es representable en él como entero del sistema.

TEOREMA 5 (Kátai y Szabó). Sean $b = A + iB, |b| > 1, A, B \in Z$ y

$D = \{0, 1, \dots, |b|^2 - 1\}$. (b, D) es un sistema numérico si y sólo

si se verifican:

- i) $A = \text{Re } b < 0,$ ii) $B = \text{Im } b = \pm 1.$

DEMOSTRACION. Veamos que las condiciones son necesarias.

Sea (b, D) un sistema numérico. Por lo dicho, $A + iB \in (A, B) = 1$.

Entonces, del Teor. de Gauss sigue que D es un sistema completo de restos. Supongamos $A > 0$. Observemos que $a := 1 - \bar{b}$ verifica $a = ab + |a|^2$ y $|a|^2 = A^2 + B^2 - 2A + 1 \in D$. Esto implica que el algoritmo de la división aplicado a a no termina y a no es representable, contradicción. Luego, necesariamente $A < 0$.

Supongamos $1 \neq B \neq -1$. Si $g = d_0 + d_1 b + \dots + d_k b^k$, como $|b| \text{Im } b^n$,

$n = 1, 2, \dots$, resulta que $|b| \text{Im } g$ y no todo gaussiano está en W

O sea, si (b, D) es un sistema numérico entonces $B = \pm 1$.

Suficiencia. Sea $b = -A + i, 1 \leq A \in Z$. (Si (b, D) es un sistema numérico también lo será (\bar{b}, D)).

Como $2Ab = -2A^2 + 2Ai$ y $b^2 = A^2 - 2Ai - 1$ resulta que b es solución de la siguiente ecuación real:

$$(3) \quad b^2 + 2Ab + (A^2 + 1) = 0.$$

Restando ésta de sí misma multiplicada por b resulta

$$(4) \quad b^3 + (2A-1)b^2 + (A-1)^2 b - (A^2 + 1)b = 0.$$

Luego,

$$(5) \quad -1 = b^2 + 2Ab + A^2; \quad A^2 + 1 = b^3 + (2A-1)b^2 + (A-1)^2 b.$$

Sean $\alpha = E + iF \in K, \alpha \neq 0$ y $C = E + iF$. Entonces $\alpha = C + Fb$. Si $C < 0$

ponemos en su lugar $-|C| = |C|b^2 + 2A|C|b + A^2|C| = C$. Idem F .

Obtenemos entonces $\alpha = U + Vb + Xb^2 + Yb^3$, U, V, X, Y enteros no negativos. Luego, todo entero gaussiano se escribe en la forma

$$(6) \quad \alpha = d_0 + d_1 b + \dots + d_k b^k, \quad k \geq 3, d_j \in Z_+.$$

Dividiendo d_0 por $A^2 + 1$ tenemos, con $r_0 \in D$ y $T \in Z_+$:

$$d_0 = r_0 + T(A^2 + 1) = r_0 + T(b^3 + (2A-1)b^2 + (A-1)^2 b).$$

En consecuencia,

$$\alpha = r_0 + [d_1 + (A-1)^T]b + [d_2 + T(2A-1)]b^2 + [d_3 + T^2]b^3 + \dots =$$

$$= r_0 + d_1 b + \dots + d_k b^k = \alpha_1 b + r_0; d_j \in Z^+$$

Como $(A-1)^2 + (2A-1) + 1 = A^2 + 1 = |b|^2$, obtenemos

$$(7) \quad \sum d_j = r_0 + \sum d_j$$

Si repetimos el procedimiento logramos, con $r_1 \in D$:

$$\alpha_1 = \alpha_2 b + r_1, \alpha_2 = \alpha_3 b + r_2, \dots, \alpha_j = \alpha_{j+1} b + r_j.$$

De (7) sigue entonces que

$$r_0 + r_1 + \dots + r_j \leq r_0 + \dots + r_j + \sum \text{coef de } \alpha_{j+1} = \sum d_1.$$

Luego, existe N tal que $r_j = 0$ para $j \geq N$. Pero entonces

$$\alpha_N = \alpha_{N+1} b = \alpha_{N+2} b^2 = \dots = \alpha_{N+j} b^j.$$

Esto lleva a una contradicción si $\alpha_N \neq 0$. Por lo tanto, $0 = \alpha_N$

y α es representable como entero del sistema, QED.

TEOREMA 6. Sea $z \in C$. Entonces, con $a_j \in D$, vale

$$z = a_1 b^1 + \dots + a_0 + a_{-1} b^{-1} + a_{-2} b^{-2} + \dots = (a_1 \dots a_0 a_{-1} a_{-2} \dots) b.$$

DEMOSTRACION. Queremos probar entonces que todo número complejo es representable (por lo que no todos tendrán desarrollo

único). De $z = (b^k z) b^{-k} = (C_k + iD_k) b^{-k} + (u_k + i v_k) b^{-k} = z_k + \delta_k$,

con $C_k + iD_k \in R$, $|u_k| < 1$, $|v_k| < 1$, obtenemos $\delta_k \rightarrow 0$ y $z_k \rightarrow z$

para $k \rightarrow \infty$. Si $C_k + iD_k = a_r b^r + \dots + a_0$, $r = r(k)$, $a_j \in D$, de

$$a_r b^{r-k} + \dots + a_0 b^{-k} = z_k - a_{r-1} b^{-1} - \dots - a_0 b^{-k} =: F_k$$

$$|F_k| \leq (|z| + |\delta_k|) + A^2 \sum_{j=1}^{\infty} |b|^{-j} < |z| + 2A^2 / (|b| - 1).$$

Entonces, la parte entera de z_k , F_k , está acotada por una

constante independiente de k . Luego, existe un número n tal que $r(k) - k \leq n$. Tenemos entonces

$$z_k = a_{n,k} b^n + \dots + a_{0,k} + a_{-1,k} b^{-1} + \dots, a_{j,k} \in D.$$

Al tender z_k a z una subsucesión estacionará sus coeficientes

y el desarrollo límite será el desarrollo de z en base b , QED.

5. LOS ENTEROS DE EISENSTEIN Y LA BASE $b = -2$. Se llaman enteros de Eisenstein a los números del conjunto $R' = \{p+q\omega : p, q \in Z\}$ donde $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2 = \exp(i2\pi/3)$. Vimos que si $b = -2$

todo número real es representable con cifras en $D = \{0, 1\}$. Obviamente será necesario ampliar D si deseamos representar números no reales. Vale el siguiente interesante

TEOREMA 7. Sean $b = -2$, $D = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$. Entonces, $W = R'$ y su representación en base b es única. Además $\mathcal{G} = C$.

DEMOSTRACION. Como $\omega^2 = \bar{\omega} = 1/\omega = -(\omega + 1)$, valen también los siguientes desarrollos:

$$(8) \quad \begin{cases} -1 = b + 1 & 2\omega = \omega b^2 + \omega b \\ 2 = b^2 + b & 2\bar{\omega} = \bar{\omega} b^2 + \bar{\omega} b \\ 1 + \omega = \bar{\omega} b + \bar{\omega} & \omega + \bar{\omega} = b + 1 \\ 1 + \bar{\omega} = \omega b + \omega & -\omega = \omega b + \omega \end{cases}$$

Como $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ todo entero del sistema es un entero de Eisenstein. Por otra parte los números $0, 1, -1, \omega, -\omega$ pertenecen a W (cf. (8)); bastará probar entonces que W es un semigrupo para demostrar que $R' \subset W$. Sean $\alpha, \beta \in W$ y $z = \alpha + \beta \neq 0$. Debemos

probar que $z \in W$. Sumando los desarrollos obtenemos $z = \sum_{j \in H} d_j b^j$

$$\text{con } d_j \in D + D = \{0, 1, \omega, \bar{\omega}, 2, 1 + \omega, 1 + \bar{\omega}, 2\omega, \omega + \bar{\omega}, 2\bar{\omega}\} \subset W.$$

Entonces : $z = b^M (\sum_{j=0}^N d_j b^{j-M}) = b^M t$, $t \in R'$, por lo que $|z| \leq |b|^M$.

Por otro lado, $|z| \leq \sum_{j=0}^N |b|^j \leq 2(2^{N+1} - 1) < 2^{N+2}$. Luego,

$$(9) \quad |b|^M \leq |z| < |b|^{N+2}.$$

Definimos a continuación una función $f : D+D \rightarrow \{0,1,2\}$;

$f(d) = 0$ si $d = 0$; $f(d) = 1$ si $d \in \{1, r, \bar{r}\}$; $f(d) = 2$ si $d \in D+D \setminus D$.

Sea $J = \max \{j : f(d_j) = 2\}$. Entonces $d_j \in D+D \setminus D$ y lo podemos reemplazar por su desarrollo en base b indicado en (8):

$$d_j b^j = d'_j b^j + d'_{j+1} b^{j+1} + d'_{j+2} b^{j+2} \quad \text{con } d'_i \in D, \text{ obteniendo un nuevo desarrollo para } z, z = \sum d_{j,1} b^j \text{ donde } d_{j,1} \in D+D. \text{ Aquí}$$

$$d_{j,1} = d'_j; d_{j,1} = d'_j + d_j \text{ para } j = j+1, j+2; d_{j,1} = d_j \text{ en otro caso.}$$

Analizando los coeficientes alterados vemos que

$$(10) \quad \sum f(d_j) = \sum f(d_{j,1})$$

$$(11) \quad 1 + \sum j f(d_j) \leq \sum j f(d_{j,1}).$$

Iterando K veces este procedimiento obtenemos el siguiente

desarrollo de $z : z = \sum d_{j,K} b^j$ con $d_{j,K} \in D+D$ y verificándose las fórmulas

$$(10') \quad \sum f(d_j) = \sum f(d_{j,K})$$

$$(11') \quad K + \sum j f(d_j) \leq \sum j f(d_{j,K}).$$

El proceso se detiene si en un paso K todos los coeficientes

$d_{j,K} \in D$. En este caso $z = \sum d_{j,K} b^j \in W$. Si esto nunca ocurre

entonces por (11'), $J_K := \max \{j : f(d_{j,K}) \neq 0\} \rightarrow \infty$ para $K \rightarrow \infty$.

PERO POR (10'), $\sum_{j=0}^N d_{j,K} b^j \neq 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^N f(d_{j,K}) = 2 \sum_{j=0}^N f(d_j)$.

Luego, para K bastante grande habrá por lo menos dos coeficientes nulos consecutivos : $d_{N',K} = d_{N'+1,K} = 0$ con

$N' < J_K$ y $|z| < 2^{N'}$. Escribimos

$$(*) \quad z = \sum_{j=0}^{N'-1} d_{j,K} b^j + \sum_{j=N'+2}^{J_K} d_{j,K} b^j.$$

Si el segundo sumando no fuera cero obtendríamos de (9)

$$|z| \geq |b|^{N'+2} - |b|^{N'+1} = 2^{N'+1}, \text{ absurdo. Luego, } z \text{ es igual al primer sumando de } (*) \text{ y}$$

$$\sum_{j=0}^{N'-1} f(d_{j,K}) < \sum_{j=0}^{J_K} f(d_{j,K}) = \sum f(d_j).$$

De esto se concluye que iterando todo este proceso un número finito de veces arribamos a una representación de z en el sistema (b, D) . Así $W = K'$. Por tanto, $E = R' \implies E = br + d$, $r \in W$,

$d \in D$. Además, si $d_1, d_2 \in D$, $d_1 \neq d_2$, entonces $d_1 - d_2 \neq -2r = br$ para todo $r \in W$. Es decir, D es un sistema completo de restos para R' , y la representación de los números en $W = E'$ es única.

Sea $z \in E'$. Repitiendo ahora el final de la demostración del teorema 6 vemos que z es representable en el sistema, Q.E.D.

6. ARITMETICA POSICIONAL EN LA BASE DE GAUSS. Sea $b = -1+i$.

Si $z = \sum_{j=0}^N c_j b^j$, $c_j \in D = \{0,1\}$, escribiremos $z = (c_N \dots c_0, c_{-1} c_{-2} \dots)$ o simplemente $(c_N \dots c_0, c_{-1} c_{-2} \dots)$, y también eliminaremos los

paréntesis cuando no haya lugar a confusión. Pero si los coeficientes $c_j \in Z$ y no sabemos si son cifras permitidas, escribiremos $z = [c_N \dots c_0, c_{-1} c_{-2} \dots]$. Es fácil verificar, por ejem-

pro, que $z+1=(1111), -1-1=(110), 1=(11), 4+6i=(111010010100)$
 y que $(1-2i)/5=(0,001)=(1,100)=(111,010)$, donde el vínculo
 ... indica que éste es un período que se repite indefinida-
 mente. De las fórmulas (5) obtenemos

$$(**) \quad -1 = [121] = (11101), \quad 2 = (1100), \quad 0 = [122] = [1220].$$

Luego, $0 = -1 + 1 = (11101) + (1) = [11102]$.

6.1. SUMA. Un sobreflujo de 2 en una columna es transportado a las tres columnas precedentes como se ve usando la segunda de las igualdades (**). Por ejemplo,

$$\begin{array}{r} 110 \\ + 110 \\ \hline 11101000 \\ 1100 \\ \hline 1100 \end{array} = \begin{array}{r} -1-i \\ = -1-i \\ = -2-2i \end{array} \qquad \begin{array}{r} +11101 = -1 \\ 1 = 1 \\ \dots 00000 \\ 1100 \\ \hline 1100 \end{array}$$

El segundo ejemplo muestra que la operación no siempre termina. A la izquierda aparecen entonces solamente ceros.

6.2. MULTIPLICACION. Esta se reduce a la suma. Por ejemplo,

$$\begin{array}{r} x \quad 110 \\ \quad 11 \\ \hline \quad 110 \\ + \quad 110 \\ \hline 111010 \\ \hline 1100 \end{array} = \begin{array}{r} -1-i \\ = \quad 1 \\ \hline -1-i \end{array}$$

6.3. UN ALGORITMO CORRECTOR. Dado un número $z = \sum_{j=0}^m A_j b^j =$

$= [A_m A_{m-1} \dots A_1 A_0]$, sea A_r el primer coeficiente que no es una cifra y $s \in Z$ tal que $0 \leq A_r + 2s \leq 1$. Sea $p(b) := b^2 + 2b + 2 = 0$.

Entonces, $z = \sum A_j b^j + p(b) s b^r = \sum A_j' b^j$ donde $A_0' = A_0, \dots, A_{r-1}' = A_{r-1}, A_r' = A_r + 2s$ son cifras. Repitiendo este proceso se obtiene una representación de z en la base $-1+i$ pues vale el

siguiente teorema que aceptamos sin demostración.
TEOREMA 8. El algoritmo corrector finaliza en un número finito de pasos.

Ejemplos. $3b^3 = [3 \ 0 \ 0 \ 0] = [-1 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] =$
 $= [1101000]; \quad 5b + 3 = [5 \ 3] = [-1 \ 3 \ 1] = [-1 \ -3 \ 1 \ 1] = [2 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1] =$
 $= [-1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1] = [1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1] = [-1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1] =$
 $= [1110101111];$

$$\begin{array}{r} 110 \\ x \quad 110 \\ \hline 11100 \\ 110 \\ \hline 110 \end{array} = \begin{array}{r} -1-i \\ = -1-i \end{array}$$

$[1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0] = [-1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] = (1110100) = 2i.$

6.4. CONVERSION DE UN ENTERO DE GAUSS A LA REPRESENTACION POSICIONAL EN LA BASE $-1+i$. Sea $z = R + iI$. Entonces

$$z = I(-1 + i) + (R + I) = [I \ R+I],$$

y se aplica el algoritmo corrector. Ejemplos:

$$2i = [2 \ 2] = [-1 \ 0 \ 0] = [1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0] = [-1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] = (1110100),$$

$$1+i = [1 \ 2] = [-1 \ -1 \ 0] = (1110); \quad 2-3b = [-3 \ 2] = [-1 \ -5 \ 0] =$$

$$= [3 \ 5 \ 1 \ 0] = [-2 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0] = (1011110).$$

7. TABLA DE LOS ENTEROS DE GAUSS DE MODULO ≤ 4 .

$(-4, 0) =$	10000	$(0, 1) =$	11
$(-3, -2) =$	10101	$(0, 2) =$	1110100
$(-3, -1) =$	11101010	$(0, 3) =$	1110111
$(-3, 0) =$	10001	$(0, 4) =$	1110000
$(-3, 1) =$	11110	$(1, -3) =$	111110
$(-3, 2) =$	1110100101	$(1, -2) =$	101
$(-2, -3) =$	11101111	$(1, -1) =$	111010
$(-2, -2) =$	11101000	$(1, 0) =$	1
$(-2, -1) =$	11101011	$(1, 1) =$	1110
$(-2, 0) =$	11100	$(1, 2) =$	1110101
$(-2, 1) =$	11111	$(1, 3) =$	1010
$(-2, 2) =$	11000	$(2, -3) =$	111111
$(-2, 3) =$	11011	$(2, -2) =$	111000
$(-1, -3) =$	110010	$(2, -1) =$	111011
$(-1, -2) =$	11101001	$(2, 0) =$	1100
$(-1, -1) =$	110	$(2, 1) =$	1111

(-1, 0) =	11101	(2, 2) =	1000
(-1, 1) =	10	(2, 3) =	1011
(-1, 2) =	11001	(3, -2) =	111001
(-1, 3) =	1110110	(3, -1) =	111010110
(0, -4) =	110000	(3, 0) =	1101
(0, -3) =	110011	(3, 1) =	111010010
(0, -2) =	100	(3, 2) =	1001
(0, -1) =	111		

Estos números se representan con no más de 8 cifras excepción hecha de $-3+2i$ que requiere 10.

Primeras potencias de $b = -1+i$: $b^2 = -2i$; $b^3 = 2+2i$; $b^4 = -4$;

$b^5 = 4-4i$; $b^6 = 8i$; $b^7 = -8-8i$; $b^8 = 16$.

8. NÚMEROS CON DOS REPRESENTACIONES. Sea

$$z = \sum_{i=-\infty}^L p_i b^i = \sum_{i=-\infty}^L q_i b^i, \quad p_i, q_i \in D.$$

Definimos: $p(k) := (\sum_{i=k}^L p_i b^i) b^{-k}$. A este entero Gaussiano lo

denominaremos estado k de la representación p de z . Si $k=0$, $p(0)$ coincide con la parte entera de la representación p de z .

TEOREMA 9. Para todo k , $p(k) - q(k) \in S := \{0, \pm 1, \pm(1+i)\}$. DEMOSTRACION. Obsérvese que

$$p(k) - q(k) = -\sum_{i=k}^{k-1} (p_i - q_i) b^{i-k}, \quad (p_i - q_i) \in \{0, \pm 1\}. \text{ Si } d_i \in \{0, \pm 1\}$$

entonces $|d_0 + d_1 b + d_2 b^2| \leq |1 - b + b^2| = \sqrt{13}$. Luego,

$$|p(k) - q(k)| \leq \sqrt{13} \sum_{j=1}^{\infty} |b|^{-3j} = \sqrt{13} / (\sqrt{8} - 1) \text{ y resulta}$$

$$(12) \quad |p(k) - q(k)| < 2.$$

Por otra parte tenemos: $p(k-1) = p_{k-1} + p(k)b$, y por tanto,

$$(13) \quad p(k-1) - q(k-1) = b[p(k) - q(k)] + (p_{k-1} - q_{k-1}).$$

De (12) sigue que el corchete es un entero de Gauss que pertenece al conjunto $\{0, \pm 1, \pm i, \pm(1+i), \pm(1-i)\}$. Si en (13) el corchete fuera igual a $\pm b$ entonces tendríamos

$$p(k-1) - q(k-1) = \pm 2i + (p_{k-1} - q_{k-1}).$$

Como el paréntesis es real esto implicaría que

$$|p(k-1) - q(k-1)| \geq 2, \text{ contradiciendo (12), QED.}$$

El teorema 9 dice que el par de estados $(p(k), q(k))$ puede ser de siete tipos diferentes según el valor de $p(k) - q(k)$. Simbolizaremos estos tipos de la siguiente manera:

$ pq $	$p(k) - q(k) = 0$
p/q	$p(k) - q(k) = -1$
q/p	$p(k) - q(k) = -i$
p/q	$p(k) - q(k) = -1-i$

Los tres tipos restantes se obtienen permutando p con q .

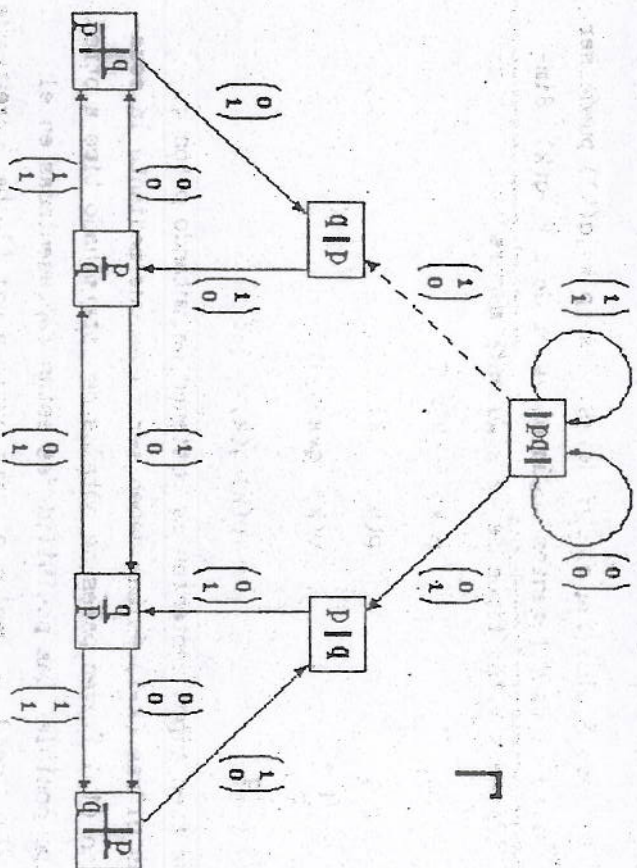
Las cifras $(k-1)$ -ésimas deben ser tales que mediante la ecuación (13) lleven pares de estados de determinado tipo a otro tipo posible. Las posibilidades están representadas en el

grafo Γ donde el vector columna junto a una flecha corresponde al par de cifras $p_{k-1} q_{k-1}$, que produce la transición del tipo del estado $(p(k), q(k))$ al tipo del estado $(p(k-1), q(k-1))$.

Por ejemplo: si $(p(k), q(k)) \in p/q$ entonces de (13) obtenemos $p(k-1) - q(k-1) = -b + (p_{k-1} - q_{k-1})$. Para que el miembro izquierdo permanezca en S necesariamente $(p_{k-1} - q_{k-1}) = -1$,

que sólo se logra con $p_{k-1} = 0, q_{k-1} = 1$, y entonces $(p(k-1), q(k-1)) \in q/p$. En cambio, si $(p(k), q(k)) \in q/p$ entonces de (13) obtenemos $p(k-1) - q(k-1) = 1+i + (p_{k-1} - q_{k-1})$. Sólo en

tres casos el miembro izquierdo permanece en $S : p_{k-1} = q_{k-1} = 0 ; p_{k-1} = q_{k-1} = 1$. En los dos primeros casos el par de estados $(p(k-1), q(k-1))$ es de tipo $\frac{p}{q}$ y en el último de tipo $\frac{p}{q}$. Siguiendo así se construye el grafo Γ .



Supongamos que z tenga dos representaciones tales que las partes enteras de esas representaciones sean diferentes. Es decir, $(p(0), q(0))$ pertenece a un nodo de Γ que no es el superior. En este caso podemos asociar a z un filamento (hilo infinito) del grafo Γ que parte de ese nodo tal que al seguirlo se obtienen las cifras de z después de la coma para ambas representaciones. Estas cifras son las componentes de los vectores columna asociados a cada flecha. Por otra parte, las cifras antes de la coma serán las de $p(0)$ y $q(0)$, respectivamente.

TEOREMA 10. i) A cada número z con dos representaciones tales que $(p(0), q(0)) \in |pq|$ le corresponde un filamento de Γ que parte del nodo que representa al tipo de $(p(0), q(0))$.

ii) Recíprocamente, a un filamento que parte de un nodo $N \neq |pq|$, le corresponde un número z con dos representaciones tales que $(p(0), q(0)) \in N$. Si $p(0)=0$, z es único.

DEMOSTRACION. Sólo resta probar ii). Sean

$$z_p = p(0) + \sum_{j=1}^{-1} p_j b^j \quad z_q = q(0) + \sum_{j=1}^{-1} q_j b^j$$

donde los $\begin{bmatrix} p_j \\ q_j \end{bmatrix}$, $j = -1, -2, \dots$, son obtenidos siguiendo el fila-

mento dado. Entonces $p(k) - q(k) \in S$ para todo k . Por tanto,

$$|p(k) - q(k)| < 2. \text{ Como } p(k)b^k \rightarrow z_p \text{ y } q(k)b^k \rightarrow z_q \text{ para}$$

$$k \rightarrow -\infty, \text{ obtenemos } z_p = z_q, \text{ Q.E.D.}$$

NB : a) los filamentos a los que se hace referencia en el teorema 10 no pasan por $|pq|$.

b) Sea z con dos representaciones tales que $(p(0), q(0)) \in |pq|$. En ninguna representación de z aparecen después de la coma más de cuatro cifras consecutivas iguales. En particular, z no puede ser racional.

COROLARIO 1. Sea $F_g := g^+F$, $g \in K$. Entonces $F_g \cap F \neq \emptyset$ implica $g \in S$.

9. NUMEROS CON TRES REPRESENTACIONES. Sea z un número con tres representaciones distintas :

$$z = \sum_{i=0}^L p_i b^i = \sum_{i=1}^L q_i b^i = \sum_{i=1}^L r_i b^i$$

tales que $p(0) \neq q(0) \neq r(0) \neq p(0)$. Como $p(0) - q(0)$, $q(0) - r(0)$ y $r(0) - p(0)$ deben estar en S , la posición relativa de estos tres estados será necesariamente $\frac{x}{x} | x$ o bien $\frac{x}{x} | x$. Eventual-

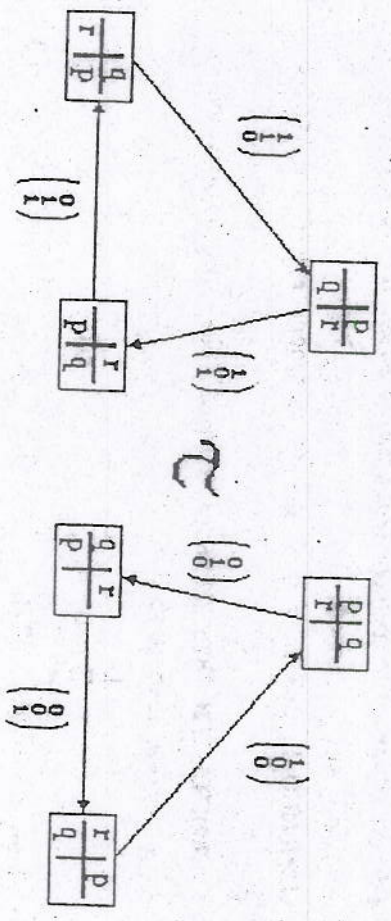
mente permutando entre ellas las letras p, q y r, la tripla de estados $p(0)$, $q(0)$, $r(0)$, será del tipo de uno de los nodos del grafo τ . La columna junto a la flecha que sale de ese nodo contiene los únicos valores posibles de p_{-1} , q_{-1} , r_{-1} .

El grafo τ se construye de la siguiente manera : supongamos que para un $k \leq 0$, $(p(k), q(k), r(k))$ es de tipo $\frac{q|r}{p}$. En el gra-

fo τ , del nodo $\frac{r}{p|q}$ sólo puede pasarse a $r|p$, y esto mediante las cifras $r_{k-1} = 1$, $p_{k-1} = 0$. También, de $q|r$ sólo puede alcanzarse el nodo $\frac{r}{q|p}$ y con $q_{k-1} = 0$, $r_{k-1} = 1$. Por último, de

$\frac{q}{p}$ parten tres flechas pero como $q_{k-1} = 0$, $p_{k-1} = 0$, solamente se usa aquella que lleva al nodo $\frac{q}{r|p}$. Entonces, en τ , de

$\frac{q|r}{p}$ sólo puede alcanzarse $\frac{r|p}{q}$ y con $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Siguiendo así se completa el grafo τ .



De lo dicho se desprende que no hay números con cuatro representaciones. Vale el siguiente

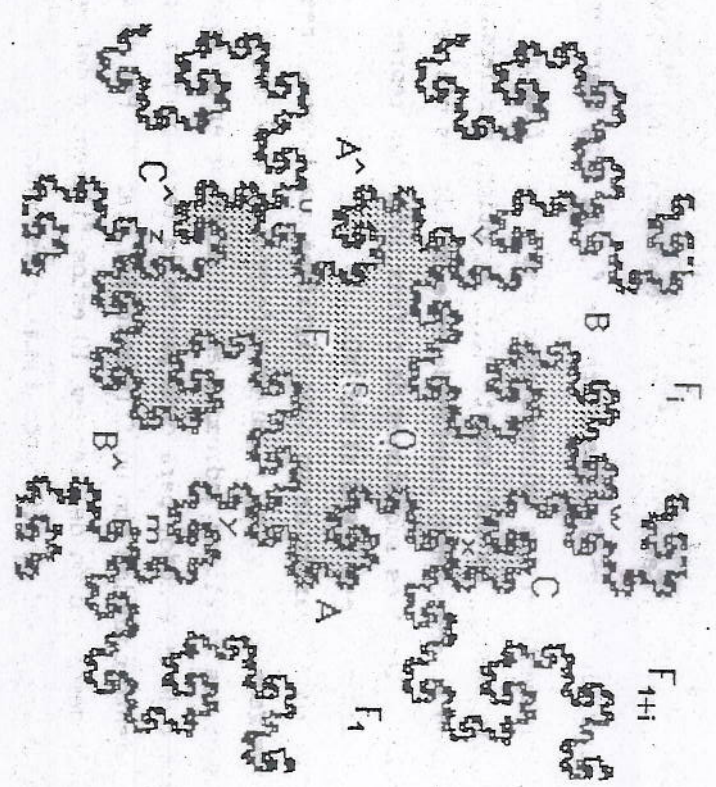
TEOREMA 11. Sea z un número con tres representaciones. Entonces existe n tal que $z b^n = g_1 + f_1$, $i=1,2,3$, con g_i un entero de Gauss, $f_i \in F$ y tales que $g_1 = p(n)$, $g_2 = q(n)$, $g_3 = r(n)$ son distintos dos a dos y se relacionan entre sí como en uno de los nodos de τ . Las f_i se obtienen recorriendo indefinidamente un ciclo del grafo. Las cifras de f_1 , f_2 y f_3 aparecerán sucesivamente en las columnas asociadas a cada flecha. Recíprocamente, cada filamento de τ se obtiene partiendo de un nodo y recorriendo indefinidamente uno de los ciclos del grafo τ . Las tres sucesiones de cifras obtenidas representan a un único número $z \in \mathbb{C}$ si $p(0)=0$.

Resumiendo : partir de un nodo significa que tenemos tres enteros gaussianos, p , q , r , cuyas diferencias en S respetan las posiciones relativas indicadas en él. Al recorrer el ciclo a partir de este nodo, para cada par de la terna p , q , r , el filamento coincide con un filamento del grafo τ . Por lo visto en la demostración del teorema 10 estos filamentos definen un número $z \in \mathbb{C}$ si $p(0)$, por ejemplo, es conocido.

9.1. EL CONJUNTO F ASOCIADO A LA BASE DE GAUSS.

Se puede probar que el conjunto F tiene diámetro menor que 2 y que su contorno está formado por números con dos representaciones. Los puntos x , y , z , u , v , w , se encuentran en la frontera de tres baldosas y poseen tres representaciones. El contorno de F es una curva cerrada simple y su dominio interior F° es uniforme. Además, la cápsula convexa de F es un octógono. F es entonces un casi disco y F° es un dominio de extensión para espacios de Sobolev. A F se lo conoce como el dragón gemelo y verifica $F = F/b \cup F_1/b$. En efecto, F/b está

+ 1/b por aquellos para los que $a_{-1} = 1$.



$$\begin{aligned}
 x &= \frac{2+i}{5} = 0.011 & u &= \frac{-4-2i}{5} = 0.100 & m &= x-i = \frac{2-4i}{5} = vb \\
 y &= \frac{1-2i}{5} = 0.001 & v &= \frac{-3+i}{5} = 0.110 & u &= vb \\
 z &= \frac{-3-4i}{5} = 0.101 & w &= \frac{1+3i}{5} = 0.010 & w &= vb \\
 z_0 &= 0.1 & c &= \frac{z_0}{2} = 0.0001 = \frac{-2-i}{10}
 \end{aligned}$$

recurramos que un dominio acorado $w \subset \mathbb{R}^n$ se dice uniforme si existen dos constantes positivas B, β , tales que para todo par de puntos $x, y \in \Omega$ existe una curva rectificable $p \subset \Omega$ con extremos x, y , tal que :

$$l := \text{longitud de } p \leq B|x-y|, \quad \text{dist}(p(t), \partial\Omega) \geq \beta \cdot \inf(t, l-t),$$

para todo $t \in [0, l]$.

Sea m un número natural y $W^{m,p}(\Omega)$ el espacio de Sobolev de funciones definidas en Ω con sus derivadas de orden j , $0 \leq j \leq m$, en $L^p(\Omega)$. Sea $1 \leq p \leq \infty$. El teorema de extensión mencionado, debido a P. Jones, asegura la existencia de una aplicación lineal $E_m, E_m : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $E_m(F)|_{\Omega} = F$ y

$$\|E_m(F)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq K \|F\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

K no depende de F , sólo de m, p y un parámetro c asociado a la uniformidad. Este teorema extiende a otro debido a A.P. Calderón para dominios Lipschitz. Sin entrar en mayores precisiones digamos que en el caso Lipschitz se puede lograr $E_1 = \dots = E_m$ para cada m y que todo dominio Lipschitz es uniforme.

Por último, $\mathcal{A}F$ es un fractal (cf. [S1]) cuya dimensión de Hausdorff $s \in (1, 2)$. El arco A es semejante a los arcos $B, C, A-hat, B-hat, C-hat$. Además, A es un conjunto autosemejante (cf. [E], [H]) cuya dimensión de semejanza es s . Más aún, es un s -conjunto, es decir, su s -medida de Hausdorff, $H^s(A)$, es positiva y finita. Demostraciones de las propiedades del conjunto F enunciadas en este párrafo pueden verse en [Z].

- [E] Edgar G.A., MEASURE, TOPOLOGY and FRACTAL GEOMETRY, Springer(1990).
- [F] Falconer K.J., THE GEOMETRY OF FRACTAL SETS, Cambridge (1985)
- [G1] Gilbert W.J., Fractal Geometry derived from complex bases, The Math. Intelligencer, 4(1982)78-86.
- [G2] Gilbert W.J., Arithmetic in complex bases, Math. Magazine, 57(1984)77-81.
- [G3] Gilbert W.J., Complex numbers with three radix expansions, Can. J. Math., XXXIV(1982)1335-48.
- [H] Hutchinson J.E., Fractals and Self Similarity, Indiana Univ. Math. J., 30(1981)713-47.
- [K] Káttai I. and Szabó J., Canonical number systems for complex integers, Acta Sci. Math. (Szeged), 37(1975) 255-260.
- [S] Santaló L.A., Conjuntos fractales, Elementos de Matem. Univ. Caece, vol. VI, núm. XXIII(1992)5-26.
- [Z] Benedek A. and Panzone R., On the set of gaussian fractions, en preparación.

NOTA. El presente trabajo expone en detalle una conferencia impartida en el 1er Encuentro de Analistas realizado en Mendoza, Argentina, durante los días 23-25 de Abril de 1992 en la sede del CRYCIT.

Los autores agradecen al señor Pedro A. Panzone la confección de la tabla y los gráficos presentados.

Departamento e Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca, ARGENTINA.

ECUACIONES DE TIPO CONDUCCION -DIFUSION CON FUNCION CONSTITUTIVA NO MONOTONA

Julio E. Bouillet

En esta conferencia presentaremos un ejemplo de solución, en forma de onda viajera, de la ecuación

$$u_t = (\alpha(u))_{xx}, \quad u \geq 0,$$

en la cual la función constitutiva α cumple con las condiciones siguientes

$$\alpha(r) = \begin{cases} r & 0 \leq r \leq 1.25, \\ 2.5 - r & 1.25 \leq r \leq 1.75, \\ r - 1 & 1.75 \leq r. \end{cases}$$

La función α no es monótona en su argumento r , y por lo tanto la ecuación no es parabólica cuando la incógnita u toma valores en el intervalo $(1.25, 1.75)$. Uno podría pensar en una inversión en el sentido del tiempo que tiene lugar en alguna zona del espacio x, t donde $u(x, t)$ toma valores en ese intervalo.

En estas condiciones, el problema de valores iniciales $w_0(x) \geq 0$ con datos de contorno homogéneos de tipo Dirichlet, no está bien planteado si el rango de w_0 se solapa con el intervalo $(1.25, 1.75)$, y es sabido que, al menos para la función α que introdujimos, admite una infinidad de soluciones $[H-N]$ con valores numéricamente discontinuos que oscilan entre regiones donde $\alpha'(u) \geq 0$ (ver también [E] para otra prueba numérica).

En el artículo [H-N] se sugiere que con hipótesis adicionales se podría seleccionar una solución de entre esa infinidad, tornando al problema bien planteado. [H-N] estudian entonces el problema "convexificado", donde ahora

$$\bar{\alpha}(r) = 1, \quad 1 \leq r \leq 2, \quad \bar{\alpha} = \alpha \text{ si no}$$

Para esta nueva función constitutiva, ahora monótona, es bien sabido que el problema de datos iniciales está bien planteado (por ejemplo, hay unicidad bajo hipótesis análogas a las usuales para la ecuación del calor), y los

autores citados se plantean el problema de distinguir mediante esta nueva ecuación una solución de la ecuación original, con dato inicial u_0 .

Nuestra interpretación de la comparación de ambos problemas fue la siguiente:

Pensando a la ecuación $u_x = (\alpha(u))_{xx}$ como una ley de conservación para $\int u dx$, uno podría admitir la existencia de soluciones multivaluadas que, mediante la introducción de un choque, se conviertan en funciones de x, t , discontinuas, conservando la masa $\int u dx$. Uno estaría tentado de asociar la magnitud del salto del choque con la cantidad $b - a$, con $a = 1, b = 2$ correspondientes al intervalo de convexificación donde $\alpha \neq \bar{\alpha}$, como en las leyes de primer orden. En la búsqueda de un ejemplo las ondas viajeras, $u = u(x - ct)$, si bien no admiten casos estacionarios de interés, que eran uno de los objetivos declarados en [H-N], se prestan al estudio de casos multivaluados mediante el cambio de incógnita $\eta = \eta(u)$, $\eta = x - ct + \text{constante}$.

Con la introducción de la incógnita $\eta(u)$, la ecuación resulta

$$(-cu - \alpha(u))' = 0,$$

e integrando dos veces y englobando la segunda constante en la definición de η , resulta

$$\eta(u) = - \int \frac{du}{cr + c_1}$$

Es fácil imaginar entonces a la curva $u = u(\eta)$: posee una zona con tres ordenadas para cada abscisa, que se corresponde con el rango de valores de α donde hay tres abscisas para cada ordenada.

Sea entonces $[a, b]$ un intervalo contenido en el dominio de $\eta(u)$: es fácil ver que

$$\int_a^b \eta du = (1/c)(\alpha(b) - \alpha(a)) - (b + c_1/c) \int_a^b \frac{d\alpha(r)}{cr + c_1} + \eta(a)(b - a)$$

y por la fórmula precedente, la integral en el miembro derecho es $\eta(a) - \eta(b)$.

Imaginemos al gráfico multivaluado $u = u(\eta)$: si en un valor η hay dos valores de ordenadas, $u = a$ y $u = b$, y queremos que la función resultante salte en η de a a b , imponemos la condición

$$\eta(a) - \eta(b) = \int_a^b \frac{d\alpha(r)}{cr + c_1} = 0, \quad \eta \equiv \eta(\alpha) \text{ en } [a, b]$$

y por la fórmula de más arriba será $\alpha(a) = \alpha(b)$. La conservación de masa queda reflejada en la igualdad

$$\int_a^b \eta du = \eta(a)(b - a),$$

y recíprocamente.

Ensayemos estas condiciones en la función constitutiva lineal por trozos $\alpha(r)$, del comienzo:

$$\int_a^b d\alpha(r)/(cr + c_1) = 0 = \int_a^{1.25} dr/(r+C) - \int_{1.25}^{1.75} dr/(r+C) + \int_{1.75}^b dr/(r+C)$$

es decir,

$$\log \left(\frac{1.25 + C}{1.75 + C} \right)^2 \frac{b + C}{a + C} = 0,$$

de donde resulta, si ponemos $C = c_1/c = 0$ para simplificar, ya que puede verse que no afecta,

$$b/a = \left(\frac{1.75}{1.25} \right)^2 = (1.4)^2.$$

Queda claro entonces que la convexificación $\bar{\alpha}$ introducida al comienzo, con $a=1, b=2$, no admitiría una solución de tipo onda viajera que resultase de eliminar mediante un salto a los dos lóbulos multivaluados de la onda viajera original.

REFERENCIAS.

[H-N]: K. Höllig, J.A. Nohel, A diffusion equation with a nonmonotone constitutive function, TSR #2443, Mathematics Research Center, U. of Wisconsin, October 1982.

[E]: C.M. Elliott, The Stefan problem with a non-monotone constitutive relation. IMA Journal of Applied Mathematics 35, 257-264, 1985.

ACOTACION $L^p(\mathbb{R}^n)$ DE CIERTOS OPERADORES

INTEGRALES SINGULARES

T. Godoy - L. Sael - M. Urciwilo

1) INTRODUCCION.

Sea $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = L\}$. Sea $\Omega \in L^1(\mathbb{R}^n)$, una función homogénea de grado cero, de media nula, i.e.

$$\int_{\Sigma} \Omega(\sigma) d\sigma = 0$$

y tal que para algún $0 < \epsilon < 1$

$$\int_{\Sigma} |\Omega(g\sigma) - \Omega(\sigma)| d\sigma \leq c \|g\|^\epsilon, \quad (1.1)$$

Aquí g denota un elemento arbitrario del grupo de rotaciones y $\|g\|$ una distancia de g a la identidad.

Es bien sabido que si

$$k_1(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$$

entonces el operador de convolución $f \mapsto k_1 * f$ es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, si $1 < p < \infty$ y de tipo débil (1,1). [1]

Se trata ahora de determinar condiciones suficientes sobre una función k_2 , tales que el operador dado por

$$Tf(x) = \int k_1(x-y)k_2(x+y)f(y)dy \quad (1.2)$$

resulte acotado. (En particular, si k_2 es una función constante estamos en el caso anterior).

F. Ricci y P. Sjögren probaron en [2] que si $k_1(x) = \frac{1}{|x|}$ y k_2 es una función en $L^\infty(\mathbb{R})$ tal que $|\nabla k_2(x)| \leq \frac{c}{|x|}$ entonces T resulta acotado en $L^2(\mathbb{R})$.

En el presente trabajo probamos el siguiente

TEOREMA. Sea $\Omega(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, una función homogénea de grado cero,

$$\int_{\Sigma} \Omega(\sigma) d\sigma = 0$$

y satisficndo (1.1). Sea $k_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $|\nabla k_2(x)| \leq \frac{c}{|x|}$. Entonces si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $Tf(x)$ dado por (1.2) está bien definido p.c.t.x. Además, el operador T resulta acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, y de tipo débil (1.1).

2) DEMOSTRACION DEL TEOREMA

Se trata de estudiar el operador

$$Tf(\xi) = \int k_1(\xi - y)k_2(\xi + y)f(y)dy$$

donde k_1 y k_2 satisfacen las propiedades establecidas en 1). Antes que nada debemos entender en qué sentido converge la integral que define a Tf . Haciendo un cambio de variables, obtenemos

$$Tf(\xi) = \int k_1(x)(k_2(2\xi - x) - k_2(2\xi))f(\xi - x)dx + k_2(2\xi) \int k_1(x)f(\xi - x)dx.$$

Ahora la $\int k_1(x)f(\xi - x)dx$ debe ser entendida como valor principal, esto es, existe

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} k_1(x)f(\xi - x)dx,$$

que denotamos por $(k_1 * f)(\xi)$. Más aún, como $k_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ el operador dado por

$$T_1f(\xi) = k_2(2\xi)(k_1 * f)(\xi),$$

es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ y de tipo débil (1.1).

Estudiamos ahora, para cada ξ fijo, la convergencia de

$$\int k_1(x) (k_2(2\xi - x) - k_2(2\xi)) f(\xi - x) dx.$$

$$\int_{|x| \leq |\xi|} |k_1(x)| |k_2(2\xi - x) - k_2(2\xi)| |f(\xi - x)| dx \leq$$

$$\leq c \int_{|x| \leq |\xi|} |k_1(x)| \frac{|x|}{|\xi|} |f(\xi - x)| dx \quad (2.1)$$

pues $|k_2(2\xi - x) - k_2(2\xi)| \leq c |\nabla k_2(2\xi - tx)| |x|$, para algún $0 < t < 1$ y $|2\xi - tx| \geq 2|\xi| - |x| \geq |\xi|$.

Usando coordenadas polares, el segundo miembro de la desigualdad (2.1) se escribe

$$\sum_i \int |\Omega(u)| \left(\frac{1}{|\xi|} \int_0^{|\xi|} |f(\xi - ru)| dr \right) du.$$

Sea

$$M \cup f(\xi) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |f(\xi - ru)| dr,$$

el operador maximal a lo largo de la recta $r \rightarrow ru$. Es sabido que, si $1 < p < \infty$, $\|M_\# f\|_p \leq c \|f\|_p$, con c independiente de u [3].

Luego, la desigualdad de Minkowski generalizada implica que, si ponemos

$$T_3 f(\xi) = \int_{|x| \leq |\xi|} |k_1(x)| |k_2(2\xi - x) - k_2(2\xi)| |f(\xi - x)| dx$$

entonces

$$\|T_3 f\|_p \leq c \int |\Omega(u)| \|M_\# f\|_p du \leq c \|\Omega\|_{L^r(\Sigma)} \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Estudiamos, finalmente,

$$T_3 f(\xi) = \int_{|x| > |\xi|} |k_1(x)| |k_2(2\xi - x) - k_2(2\xi)| |f(\xi - x)| dx.$$

Es claro que

$$T_3 f(\xi) \leq 2 \|k_2\|_\infty \int_{|x| > |\xi|} |k_1(x)| |f(\xi - x)| dx.$$

Usando nuevamente coordenadas polares, el problema se reduce a estudiar

$$\int_{|\xi|}^{\infty} \frac{1}{r} |f(\xi - ru)| dr.$$

Para cada $u \in \Sigma$, escribimos $\xi = \xi_0 + \lambda u$, con $\xi_0 \in u^\perp$, el subespacio ortogonal al generado por u . En particular,

$$|\lambda| = |\langle \xi, u \rangle| \leq |\xi|.$$

Entonces

$$\int_{|\xi|}^{\infty} |f(\xi - ru)| \frac{dr}{r} \leq \int_{|\lambda|}^{\infty} |f(\xi - ru)| \frac{dr}{r}.$$

Sea $F_\#(\theta) = f(\xi_0 + \theta u)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Si ponemos

$$H_\# f(\xi) = \int_{|\lambda|}^{\infty} F_\#(r - \lambda) \frac{dr}{r}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

y

$$Hg(\lambda) = \int_{|\lambda|}^{\infty} g^V(r - \lambda) \frac{dr}{r}, \quad \lambda \in R,$$

donde $g^V(s) = g(-s)$, entonces tenemos que

$$|H_*(f)|(\xi) = |H(F_*(f))(\lambda)|.$$

Luego,

$$|T_3 f(\xi)| \leq c \int \sum |\Omega(u)| |H_*(f)(\xi)| du.$$

El método de las rotaciones nos asegura que T_3 resulta acotado en $L^p(R^n)$, $1 < p < \infty$, probado que H es acotado en $L^p(R)$, $1 < p < \infty$. (ver [1], por ejemplo).

Veamos finalmente esto último.

El operador H está definido por

$$Hg(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} g^V(r - \lambda) \frac{dr}{r} \quad \text{si } \lambda \geq 0$$

y

$$Hg(\lambda) = \int_{|\lambda|}^{\infty} g^V(r + |\lambda|) \frac{dr}{r} \quad \text{si } \lambda < 0.$$

Entonces, por ejemplo, si $\lambda < 0$, tenemos que

$$Hg(\lambda) = \int_{2|\lambda|}^{\infty} g(u) \frac{du}{u - |\lambda|} = \int_{2|\lambda|}^{\infty} g(u) \frac{du}{\left(\frac{u}{|\lambda|} - 1\right)|\lambda|} = \int_2^{\infty} g(|\lambda|v) \frac{dv}{v - 1}$$

y la desigualdad de Minkowski generalizada implica que

$$\|Hg\|_{L^p(-\infty, 0)} \leq 2 \int_2^{\infty} \frac{1}{v^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{(v - 1)} dv \|g\|_{L^p(R)}.$$

El caso $\lambda \geq 0$ es idéntico al anterior y esto finaliza la demostración del teorema.

REFERENCIAS

[1] "On the existence of Singular Integrals", A. P. Calderón - M. Weiss - A. Zygmund. Proceedings of symposia in pure mathematics, Vol X, 1967.

[2] "Two parameter maximal functions in Heisenberg group", F. Ricci - P. Sjögren. Math. Z. 199, número 4, 565-575, 1988.

[3] Análisis de Fourier, J. Duandikoetxea. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, 1991.