Complejos Simpliciales y Poliedros (Introducción)
Notas - Ejercicios Guiados

Un poliedro es un espacio topológico que admite una *triangulación* por un *complejo simplicial.* Las triangulaciones permiten analizar a estos espacios combinatoriamente.

Los complejos simpliciales quedan definidos por sus vértices y símplices, donde cada n-simplex será un conjunto de $n+1$ vértices. A cada complejo simplicial K se le asociará un espacio topológico, que llamaremos la realización geométrica de K, que se construye pegando convexos determinados por los símplices. Concretamente:

1 Definición. Un complejo simplicial K consiste en un conjunto de vértices V_K y un conjunto S_K cuyos elementos son subconjuntos finitos no vacíos de V_K (llamados símplices) con las siguientes propiedades:

1. Todo vértice de K es un simplex (es decir, S_K contiene todos los subconjuntos de un elemento de V_K).
2. Todo subconjunto no vacío de un simplex es un simplex (es decir, si $s \in S_K$ y $s' \subset s$ es no vacío, entonces $s' \in S_K$).

Si $s \in S_K$ tiene $n+1$ elementos, decimos que s es un n-simplex ó, equivalentemente, que $dim\ s = n$. Por lo tanto los vértices son los 0-símplices de K.

2 Ejemplos.

1. Si A es un conjunto no vacío cualquiera, podemos definir un complejo simplicial a partir de A tomando como vértices todos los elementos de A y como símplices todos los subconjuntos finitos y no vacíos de A.
2. Sea K el complejo simplicial con 3 vértices a, b, c y cuyos símplices son todos los subconjuntos no vacíos de $\{a, b, c\}$. A este complejo le asociaremos luego un *triángulo lleno* , es decir, el 2-simplex topológico (combinaciones convexas de 3 vértices afinmente independientes).
3. Sea K el complejo simplicial con 3 vértices a, b, c y cuyos símplices son todos los subconjuntos de $\{a, b, c\}$ salvo el conjunto $\{a, b, c\}$. A este complejo le asociaremos el borde del triángulo, es decir el borde del 2-simplex topológico.
4. Al complejo simplicial K con vértices $V_K = \mathbb{Z}$ y símplices
$$S_K = \{\{n\}, \{n, n+1\},\ n \in \mathbb{Z}\}$$
le asociaremos el espacio topológico $\mathbb{R}$.

Como los vértices de K son los 0-símplices, entonces K queda determinado por sus símplices y por abuso de notación escribiremos $s \in K$ si s es un simplex de K.

Si $s, s' \in K$ y $s' \subseteq s$ diremos que s' es una cara de s y si además $s' \neq s$ entonces es una cara propia de s.

E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN, UBA

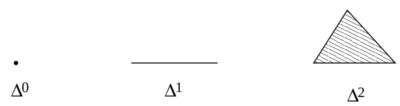
Dado un simplex s de un complejo simplicial K podemos formar un nuevo complejo simplicial $\overline{s}$ cuyos símplices son todas las caras de s y un complejo simplicial $\dot{s}$ cuyos símplices son todas las caras propias de s.

El n-esqueleto de un complejo simplicial K es el complejo simplicial K^n que consiste en todos los símplices de K de dimensión menor o igual a n. Por ejemplo, el 0-esqueleto es el conjunto de vértices de K.

Decimos que K tiene dimensión n si tiene n-símplices pero no tiene símplices de dimensión $n+1$. Notar que esto implica que tampoco tiene símplices de dimensión mayor a $n+1$. Decimos que K tiene dimensión infinita si tiene n-símplices para todo n. Un complejo simplicial K es finito si tiene finitos vértices, o equivalentemente, si tiene finitos símplices.

3 Definición. Dado $n \geq 0$, el n-simplex topológico es el subespacio

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \sum t_i = 1,\ t_i \geq 0\ \forall i\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$



Observar que todo punto $(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \Delta^n$ puede ser visto como una función

$$\alpha : \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \to I$$

tal que $\sum \alpha(v_i) = 1$, donde $v_0, \dots, v_n$ son los vértices del simplex topológico. Esto motiva la siguiente definición.

4 Definición. Sea K complejo simplicial. Definimos el conjunto $|K|$ de funciones $\alpha : V_K \to I$ tales que

1. $\{v |\ \alpha(v) \neq 0\}$ es un simplex en K (en particular, el soporte de α es finito).
2. $\sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1$

Definimos una distancia en $|K|$ con la siguiente fórmula

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_v (\alpha(v) - \beta(v))^2}$$

Notamos $|K|_d$ a este espacio métrico.

En realidad, el espacio topológico que le asociaremos a K no es este espacio métrico sino un espacio topológico con el mismo conjunto subyacente que localmente es como $|K|_d$.

Si s es un simplex en K, definimos el conjunto $|s| \subset |K|$ como

$$|s| = \{\alpha \in |K|,\ \alpha(v) = 0\ \forall v \notin s\}.$$

Observar que, si $dim\ s = n$, entonces $|s|$ está en biyección con Δ^n porque una función α que se anula fuera de s puede ser vista como una $(n+1)$-upla $(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$.

E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN, UBA

5 Definición. Dado un complejo simplicial K, consideramos para todo $s \in K$ el espacio métrico $|s|_d$ con la métrica definida anteriormente (con lo cual $|s|_d$ queda homeomorfo a Δ^n) y le damos al conjunto $|K|$ la topología coherente (final) respecto a todos sus símplices. Explícitamente,

$$A \subset |K| \text{ es abierto (resp. cerrado) sii } A \cap |s|_d \text{ es abierto (resp. cerrado) en } |s|_d \ \forall s \in K.$$

Notaremos con $|K|$ a este espacio topológico y lo llamaremos la realización geométrica de K.

Observar que una función $f : |K| \to X$ es continua si y sólo si las restricciones $f : |s|_d \to X$ son continuas para todo $s \in K$.

Ejercicio 1. *Probar que la identidad* $1 : |K| \to |K|_d$ *es continua. Deducir que* $|K|$ *es un espacio Hausdorff.*

6 Definición. Sea $s \in K$. Definimos el simplex abierto $< s > \subset |K|$ como el subespacio

$$< s > = \{\alpha \in |K|,\ \alpha(v) \neq 0 \text{ sii } v \in s\}$$

Ejercicio 2. *Probar que* $< s >$ *es un abierto de* $|s|_d$ *pero que, en general, no es abierto en* $|K|$.

Ejercicio 3. *Probar que:*

1. *Todo* $A \subset |K|$ *contiene un subespacio* A' *discreto que consiste en un punto exactamente por cada* $< s >$ *que inteseca a* A.
2. *Si* $A \subset |K|$ *es compacto, entonces interseca finitos* $< s >$. *En particular,* $|K|$ *es compacto si y sólo si* K *es finito.*

7 Definición. Una triangulación de un espacio X es un par (K, f) con K complejo simplicial y $f : |K| \to X$ un homeomorfismo. Un poliedro es un espacio X que admite alguna triangulación.

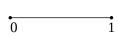
Observar que un poliedro puede admitir varias triangulaciones diferentes.

Ejercicio 4. *Hallar varias triangulaciones distintas para las esferas, los discos, el toro,* $\mathbb{R}^n$ *y los espacios proyectivos.*

8 Definición. Si v es un vértice de K, definimos la característica de v como la función $v : V_K \to I$

$$v(v') = \begin{cases} 0 & v' \neq v \\ 1 & v' = v \end{cases}.$$

De esta manera podemos identificar los vértices de K con los puntos correspondientes en el espacio $|K|$. Por ejemplo, si K está compuesto por los símplices $\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$ su realización es



E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN, UBA

Notar además que toda $\alpha \in |K|$ se escribe como

$$\alpha = \sum_{v \in V_K} \alpha(v).v$$

y por lo tanto todo elemento del espacio $|K|$ se puede escribir en forma única como combinación convexa de finitos vértices de K (con la condición que las coordenadas $\alpha(v)$ sean no nulas).

9 Definición. Un morfismo simplicial $f : K \to L$ entre complejos simpliciales es una función (de conjuntos) $f : V_K \to V_L$ tal que $f(s)$ es un simplex de L si s es simplex de K.

Un morfismo simplicial $f : K \to L$ induce una función continua $|f| : |K| \to |L|$ definida por

$$|f|(\alpha)(v') = \sum_{f(v)=v'} \alpha(v)$$

Notar que si escribimos a $\alpha \in |K|$ como una combinación convexa $\alpha = \sum \alpha(v).v$, entonces $|f|(\alpha) = \sum \alpha(v).f(v)$. Por lo tanto $|f|$ es lineal en cada simplex $|s|$, en particular $|f|$ es continua.

10 Ejemplo. Si K es un 2-simplex con vértices a, b, c y L es un 1-simplex con vértices $0, 1$, entonces la función $f : V_K \to V_L$ definida por $f(a) = f(b) = 0,\ f(c) = 1$ define un morfismo simplicial de K a L y su realización $|f| : |K| = \Delta^2 \to |L| = \Delta^1$ es la función $f(t_0, t_1, t_2) = (t_0 + t_1, t_2)$.

Un subcomplejo $L \subset K$ es un complejo simplicial cuyos vértices y símplices son subconjuntos de los vértices y símplices de K (y por lo tanto la inclusión es un morfismo simplicial).

El subcomplejo $L \subset K$ se dice *pleno* si todo simplex de K cuyos vértices están en L es un simplex de L. Por ejemplo, el borde de un triángulo lleno (2-simplex) no es pleno (los 3 vértices están en L pero todo el 2-simplex no está en L). En cambio, cada vértice y cada lado es un subcomplejo pleno de K.

Subdivisión Baricéntrica y Aproximación Simplicial

11 Definición. Sea $s = \{v_0, \dots, v_n\}$ un n-simplex de K. Definimos el baricentro de s como el punto $b(s) \in |K|$ dado por

$$b(s) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1}\, v_i.$$

Observar que $b(s) \in < s >$.

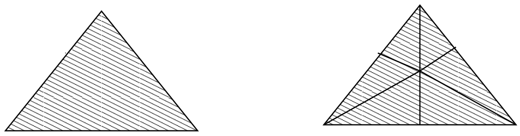
Por ejemplo, el baricentro de un 0-simplex $s = \{v\}$ es $b(s) = v \in |K|$ y el baricentro de un 1-simplex $s = \{v_0, v_1\}$ es el punto medio del segmento que une v_0 con v_1 en $|K|$.

12 Definición. Dado un complejo simplicial K, definimos su subdivisión baricéntrica como el complejo simplicial *sd* K cuyos vértices son todos los baricentros de los símplices de K y los símplices son todos los conjuntos ordenados finitos $\{b(s_0), \dots, b(s_n)\}$ con s_i cara propia de s_{i+1} para todo i.

E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN, UBA

Notar que los vértices de $sd\ K$ son puntos de $|K|$ y que si s' es un simplex de la subdivisión, entonces existe un simplex s de K tal que $s' \subset |s|$.

La función lineal $|sd\ K| \to |K|$ inducida por la identidad en los vértices es un homeomorfismo y de esta forma identificamos la realización geométrica de la subdivisión con la realización geométrica de K.



|s|= 2−simplex |sd s|

Inductivamente podemos definir

$$\begin{cases} sd^0(K) = K \\ sd^{n+1}(K) = sd(sd^n\ K) \end{cases}$$

E identificamos todos los espacios $|sd^n\ K| = |K|$.

Ejercicio 5. *Si $L \subset K$ es un subcomplejo, entonces $sd\ L \subset sd\ K$ es un subcomplejo pleno.*

K L no es pleno en K

sd K sd L es pleno en sd K

Un *par poliédrico* (X, A) es un par topológico que admite triangulación por un complejo simplicial K y un subcomplejo $L \subset K$ respectivamente. Por ejemplo, (D^n, S^{n-1}) es un par poliédrico tomando $(K, L) = (s, \dot{s})$ con s un n-simplex.

Recordemos que un par bueno (X, A) es un par topológico Hausdorff con $A \subset X$ cerrado y con la propiedad que existe un abierto $A \subset U \subset X$ tal que la inclusión de A en U es un retracto por deformación fuerte.

13 Proposición. *Todo par poliédrico (X, A) es un par bueno.*

Demostración. Sean $L \subset K$ tales que $X = |K|$ y $A = |L|$.

Por el ejercicio anterior, cambiando $L \subset K$ por $sd\ L \subset sd\ K$, podemos suponer que L es pleno en K.

Sea $N \subset K$ el máximo subcomplejo disjunto con L. Explícitamente, $V_N = V_K - V_L$ y $S_N = \{s \in S_K,\ \ \text{los vértices de } s \text{ están en } N\}$.

Notar que N también resulta pleno por construcción y que todo simplex $s = \{v_0, \ldots, v_n\}$ de K cumple una de estas tres cosas:

E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN, UBA

1. $s \in S_L$ ó
2. $s \in S_N$ ó
3. Existe $0 \leq p \leq n$ tal que $\{v_0, \ldots, v_p\}$ es simplex en L y $\{v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ es simplex en N.

Tomamos $U = |K| - |N|$ que es abierto en $|K| = X$. Es claro que $A = |L| \subset U$. Definimos una retracción $r : U \to A$ de la siguiente manera:

Sea $\alpha \in U$. Si $\alpha \in A$, entonces $r(\alpha) = \alpha$. Si $\alpha \notin A = |L|$, entonces $\alpha = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i.v_i$ con $\{v_0, \ldots, v_n\}$ simplex en K. En este caso, como α no está en $|N|$ ni en $|L|$, entonces existe un $0 \leq p \leq n$ tal que $\{v_0, \ldots, v_p\}$ es simplex en L y $\{v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ es simplex en N.

Tomamos $a = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i$. Observar que $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Definimos $\alpha'_i = \frac{\alpha_i}{a}$ para $i = 0, \ldots, p$ y $\alpha''_i = \frac{\alpha_i}{1-a}$ para $i = p+1, \ldots, n$ y por lo tanto se tiene

$$\alpha = a\alpha' + (1-a)\alpha''$$

con $\alpha' = \sum_{i=0}^{p} \alpha'_i v_i \in |L|$ y $\alpha'' = \sum_{i=p+1}^{n} \alpha''_i v_i \in |N|$.

Y entonces podemos definir $r(\alpha) = \alpha'$ si $\alpha \notin |L|$. De esta forma la función $r : U \to A$ está bien definida, resulta continua y es retracción.

Además $1_U \simeq ir$ via la homotopía

$$H(\alpha, t) = \begin{cases} \alpha & \alpha \in |L| \\ t\alpha' + (1-t)\alpha & \alpha \notin |L|. \end{cases}$$

□

Vimos que todo simplex $|s| \subset |K|$ se identifica con un convexo de $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto hereda la métrica usual de $\mathbb{R}^n$ que llamaremos métrica lineal en s. De esta forma, decimos que $|K|$ tiene una métrica lineal si cada simplex s la tiene.

Dado un complejo simplicial K y una métrica lineal en $|K|$, definimos

$$diam(s) = \sup\{||x - y||,\ x, y \in s\}$$

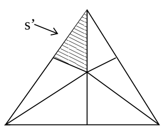
Es fácil ver que, si $s = \{v_0, \ldots, v_n\}$, entonces

$$diam(s) = \max_{i,j} ||v_i - v_j||$$

Definimos también

$$mesh(K) = \sup_{s \in K} \{diam(s)\}$$

Supongamos que s es un simplex de K y lo consideramos como un complejo simplicial $\overline{s}$. Tomamos un simplex $s' \in sd(\overline{s})$ y queremos comparar el diámetro de s' con el de s.



sd s

El siguiente resultado, relaciona ambos diámetros:

E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN, UBA

Ejercicio 6. *Si s es un m-simplex y s' es un simplex de $sd(\overline{s})$ entonces*

$$diam(s') \leq \frac{m}{m+1} diam(s)$$

Como consecuencias inmediatas de resultado lema obtenemos los siguientes resultados.

Ejercicio 7. *Si K es complejo simplicial m-dimensional, entonces*

$$mesh(sd\ K) \leq \frac{m}{m+1} mesh(K)$$

Ejercicio 8. *Si K es finito, para todo $\varepsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que*

$$mesh(sd^r(K)) < \varepsilon$$

Comenzaremos ahora a estudiar aproximaciones simpliciales de funciones continuas entre poliedros. Recordemos que todo morfismo simplicial $\phi : K \to L$ induce una función continua $|\phi| : |K| \to |L|$ que es lineal en cada simplex de K.

Es claro que hay muchas funciones continuas entre $|K|$ y $|L|$ que no son inducidas por morfismos simpliciales (no toda función continua $f : I \to I$ es lineal !!). Nuestro objetivo es probar que las funciones continuas entre poliedros pueden ser *aproximadas* por funciones inducidas por morfismos simpliciales (que llamaremos directamente funciones simpliciales).

14 Definición. Sea $f : |K| \to |L|$ continua. Una aproximación simplicial de f es un morfismo simplicial $\phi : K \to L$ que cumple lo siguiente:

$$\text{Si } f(\alpha) \in < s > \Rightarrow |\phi|(\alpha) \in |s| \ \forall s \in L, \alpha \in |K|$$

Equivalentemente, si $f(\alpha) \in |s| \Rightarrow |\phi|(\alpha) \in |s|$.

Observar que, si ϕ aproxima a f y $f(v)$ es un vértice de L para algún vértice v de K, entonces $\phi(v) = f(v)$. De esto se deduce inmediatemante el siguiente resultado.

Ejercicio 9. *Sea $f : |K| \to |L|$ continua y sea $T \subset K$ un subcomplejo tal que $f|_{|T|}$ es simplicial. Si $\phi : K \to L$ es una aproximación simplicial de f, entonces $|\phi||_{|T|} = f|_{|T|}$.*

15 Ejemplo. Sea K el 1-simplex con vértices 0 y 1 (por lo tanto $|K| = I$). La función $f : I \to I$, $f(x) = \frac{1}{2}.x$ puede ser aproximada por el morfismo simplicial identidad $1_K : K \to K$ y por el morfismo simplicial constante 0 pero no puede ser aproximada por el morfismo simplicial constante 1.

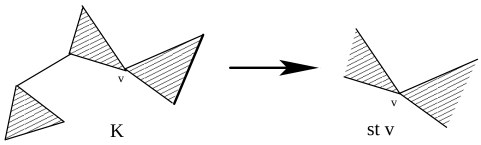
Ejercicio 10. *Sea $\phi : K \to L$ una aproximación simplicial de $f : |K| \to |L|$. Entonces $f \simeq |\phi|$. Más aún, si $f|_{|T|} = |\phi||_{|T|}$, entonces $f \simeq |\phi|$ relativo a $|T|$.*

Para probar los teoremas de aproximaciones simpliciales, necesitamos introducir la noción de estrella de un vértice *st v*.

16 Definición. Sea v un vértice de un complejo simplicial K. La estrella de v es el subespacio

$$st\ v = \{\alpha \in |K|,\ \alpha(v) \neq 0\}.$$

E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN, UBA



Ejercicio 11. *Sean $v_0, \ldots, v_n$ vértices de K. Entonces $s = \{v_0, \ldots, v_n\}$ es un simplex de K si y sólo si $\bigcap_{i=0}^{n} st(v_i) \neq \emptyset$.*

Es claro que $st\ v \subset |K|$ es siempre abierto. Más aún, $\{st\ v\}_{v \in V_K}$ es un cubrimiento por abiertos de $|K|$. En particular, si $f : |K| \to |L|$ es continua, entonces

$$\{f^{-1}(st\ v)\}_{v \in V_L}$$

es un cubrimiento por abiertos de $|K|$.

17 Teorema. *Sea $f : |K| \to |L|$ continua y $\phi : V_K \to V_L$ función de conjuntos. Entonces, ϕ es aproximación simplicial de f si y sólo si $f(st\ v) \subseteq st(\phi(v))$ para todo $v \in V_K$.*

Demostración. Supongamos primero que ϕ es aproximación simplicial de f y veamos que $f(st\ v) \subseteq st(\phi(v))$ para todo $v \in V_K$.

Sea v vértice de K. Tomamos $\alpha \in st\ v$, entonces $\alpha(v) \neq 0$. Sea s simplex en K tal que $\alpha \in < s >$ y sea s' simplex en L tal que $f(\alpha) \in < s' >$.

Como ϕ aproxima a f, entonces $|\phi|(\alpha) \in |s'|$. Por otro lado, como $|\phi|$ es lineal en cada simplex, entonces

$$|\phi|(\alpha)(\phi(v)) = \sum_{\phi(v')=\phi(v)} \alpha(v') \neq 0$$

y por lo tanto $\phi(v)$ es vértice de s' y como $f(\alpha) \in < s' >$, entonces $f(\alpha) \in st(\phi(v))$ (la coordenada del punto $f(\alpha)$ correspondiente al vértice $\phi(v)$ es no nula).

Con esto probamos que $f(st\ v) \subseteq st(\phi(v))$.

Veamos ahora la otra implicación. Primero debemos probar que la función de conjuntos ϕ es un morfismo simplicial.

Si $s = \{v_0, \ldots, v_n\}$ es un simplex en K, entonces por el lema anterior, $\bigcap st(v_i) \neq \emptyset$ y por lo tanto

$$\emptyset \neq f(\bigcap st(v_i)) \subset \bigcap f(st(v_i)) \subset \bigcap st(\phi(v_i))$$

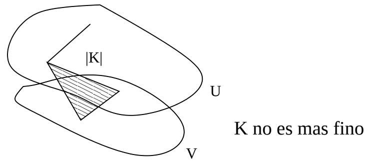
y nuevamente por el lema anterior, se deduce que $\{\phi(v_0), \ldots, \phi(v_n)\}$ es simplex en L. Esto prueba que ϕ es simplicial.

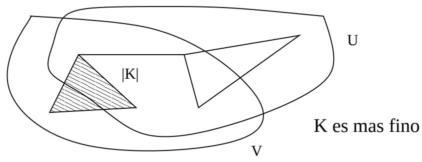
Veamos ahora que ϕ aproxima a f.

Sea $\alpha \in |K|$ y supongamos que $f(\alpha) \in < s' >$. Debemos ver que $|\phi|(\alpha) \in |s'|$. Sea s simplex de K tal que $\alpha \in < s >$. Para todo vértice v de s, se tiene que $\alpha(v) \neq 0$ y por lo tanto $\alpha \in st\ v$. Como $f(st\ v) \subset st(\phi(v))$, se tiene que $f(\alpha)(\phi(v)) \neq 0$ y por lo tanto $\phi(v)$ es vértice de s'. Esto prueba que ϕ manda los vértices de s en vértices de s' y como ϕ es simplicial entonces $|\phi|(\alpha) \in |s'|$. □

18 Definición. Sea K complejo simplicial y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un cubrimiento por abiertos de $|K|$. Decimos que K es más fino que $\mathcal{U}$ si para todo vértice v de K existe un abierto U_i del cubrimiento tal que $st\ v \subset U_i$.

E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN, UBA





Ejercicio 12. *Una función continua $f : |K| \to |L|$ admite una aproximación simplicial $\phi : K \to L$ si y sólo si K es más fino que el cubrimiento $\{f^{-1}(st\ v)\}_{v \in V_L}$.*

Supongamos que $K' = sd^m K$ para algún m. Como corolario inmediato del teorema 17 vemos que una función

$$\phi : V_{K'} \to V_K$$

es una aproximación simplicial de la identidad $1 : |K'| \to |K|$ si y sólo si $v \in st(\phi(v))$ para todo vértice v de K'. Observemos entonces también que siempre podremos encontrar aproximaciones simpliciales de la identidad $1 : |K'| \to |K|$.

Ahora juntemos varios resultados que ya conocemos para probar la existencia de aproximaciones simpliciales.

Si K es un complejo simplicial finito, sabemos que $|K|$ es compacto. Por lo tanto todo cubrimiento por abiertos admite subcubrimiento finito. También sabemos que si subdividimos K las veces necesarias, entonces $mesh(sd^m\ K)$ se hace tan chico como uno quiera y por lo tanto probamos el siguiente resultado.

Ejercicio 13. *Si $f : |K| \to |L|$ es continua y K es finito, entonces existe un natural n_0 y aproximaciones simpliciales de f*

$$\phi_n : sd^n(K) \to L,\ \forall n \geq n_0.$$

Observar que se necesitan todas las subdivisiones para poder aproximar todas las funciones continuas $f : K \to L$. Por ejemplo, si s es el 2-simplex y tomamos $K = L = \dot{s}$ (las caras propias), tenemos que $|K| = |L| = S^1$. Como el grupo fundamental de S^1 es $\mathbb{Z}$ entonces hay infinitas clases homotópicas de funciones continuas $f : S^1 \to S^1$. Pero por otra parte para todo n existen solamente finitos morfismos simpliciales $\phi : sd^n(\dot{s}) \to \dot{s}$.

Veamos algunas aplicaciones topológicas interesantes del teorema anterior.

19 Proposición. *Si $m < n$, toda función continua $f : S^m \to S^n$ es null homotópica (o lo que es lo mismo, se puede extender al disco D^{m+1}). Es decir, $\pi_m(S^n) = 0$ si $m < n$.*

Demostración. Consideramos $S^m = |\dot{s}|$ y $S^n = |\dot{s'}|$ con s un $m+1$-simplex y s' un $n+1$-simplex.

Por el teorema anterior sabemos que existe aproximación simplicial

$$\phi : sd^r \dot{s} \to \dot{s'}$$

E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN, UBA

Como $f \simeq |\phi|$, basta ver que $|\phi|$ es null homotópica.

Ahora bien, como la dimensión de $sd^r(\dot{s})$ es m y $m < n$, entonces existe un simplex en $\dot{s}'$ que no es imagen de ningún simplex de $sd^r(\dot{s})$ y por lo tanto existe un $\alpha \in |\dot{s}'|$ tal que $\alpha \notin Im(|\phi|)$.

Por lo tanto $|\phi|$ no es sobreyectiva y se tiene

$$|\phi| : S^m \to S^n - \{\alpha\} \simeq \mathbb{R}^n$$

y como $\mathbb{R}^n$ es contráctil, vale que $|\phi|$ es null homotópica. □

Ejercicio 14. *Sea X un conjunto y $\mathcal{U} = \{U_i\}$ una colección de subconjuntos de X. El nervio* de $\mathcal{U}$ es el complejo simplicial $K(\mathcal{U})$ cuyos símplices son los subconjuntos finitos no vacíos de $\mathcal{U}$, $s = \{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ tales que $\bigcap U_{ik} \neq \emptyset$.

1. Probar que efectivamente $K(\mathcal{U})$ es un complejo simplicial.

2. Sea K complejo simplicial y sea $\mathcal{U} = \{st\ v | v \in K\}$ cubrimiento abierto de $|K|$. Probar que la función que le asigna a cada vértice v de K el abierto $st\ v$ de $|K|$ induce un isomorfismo simplicial $K = K(\mathcal{U})$.

Ejercicio 15. *Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de un espacio topológico X y sea $K(\mathcal{U})$ su nervio. Una función continua $f : X \to |K(\mathcal{U})|$ se dice canónica si $f^{-1}(st\ U) \subset U$ para todo U del cubrimiento $\mathcal{U}$. Probar que:*

1. *Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento localmente finito de X, existe una biyección entre las funciones canónicas $X \to |K(\mathcal{U})|$ y las particiones de la unidad subordinadas a $\mathcal{U}$.*

2. *Si $\mathcal{U}$ es cubrimiento localmente finito de X, entonces todas las funciones canónicas $X \to |K(\mathcal{U})|$ son homotópicas.*

Ejercicio 16. *Un espacio topológico X tiene dimensión $\leq n$ si todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento abierto cuyo nervio es un complejo simplicial de dimensión $\leq n$. Decimos que dim $X = n$ si dim $X \leq n$ y dim $X \nleq n$. Probar que:*

1. *Si $A \subseteq X$ es cerrado entonces dim $A \leq$ dim X.*

2. *Si K complejo simplicial finito y dim $K \leq n$ entonces dim $|K| \leq n$.*

3. *Si s es un n-simplex, entonces dim $|s| = n$.*

4. *Si X es espacio paracompacto y dim $X \leq n$, entonces toda función continua $f : X \to S^m$ es nullhomotópica para $m > n$.*

Ejercicio 17. *Sea X un espacio métrico compacto y sea C el espacio de funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ con la métrica:*

$$d(f, g) = \sup\{||f(x) - g(x)||\ |x \in X\}$$

Probar que:

E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN, UBA

1. *C es espacio métrico completo.*

2. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, el subconjunto*

$$C_m = \{f \in C \mid diam(f^{-1}(z)) < \frac{1}{m} \ \forall\ z \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$$

   es abierto en C.

3. *$\bigcap C_m$ es el conjunto de homeomorfismos de X en $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

4. *Si dim $X \leq n$, entonces C_m es denso en C para todo m. Deducir que, en este caso, X puede ser inmerso en $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Ejercicio 18. *Una pseudavariedad n-dimensional* es un complejo simplicial K que cumple lo siguiente:

(I) K es homogéneamente n-dimensional, es decir, todo simplex de K es cara de algún n-simplex.

(II) Todo $(n-1)$-simplex de K es cara de a lo sumo dos n-símplices.

(III) Para todo par de n-símplices s, s', existe una sucesión finita $s = s_0, s_1, \ldots, s_r = s'$ de n-símplices tales que s_i y s_{i+1} tienen una $(n-1)$-cara en común para todo i.

El *borde* de una pseudovariedad de dimensión n es el subcomplejo $\dot{K}$ generado por los $(n-1)$-símplices que son caras de exactamente un n-simplex de K. Si $\dot{K}$ es vacía decimos que K es un pseudovariedad sin borde.

Probar lo siguiente:

1. Un n-simplex s es una pseudovariedad n-dimensional y su borde (como pseudovariedad) es $\dot{s}$.

2. El borde de una pseudovariedad finita de dimensión 1 es vacío o tiene exactamente dos vértices.

E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN, UBA