Topología Diferencial
Notas–Ejercicio Guiado
Poliedros asociados a relaciones y cubrimientos

El objetivo de estas notas/ejercicios guiados es probar un resultado de C.H.Dowker (publicado en Annals of Math. en 1952) sobre complejos simpliciales asociados a relaciones y las aplicaciones a la construcción del nervio de un cubrimiento y cohomología de Cech.

Empezaremos considerando dos conjuntos X e Y y una relación entre ellos, es decir, un subconjunto $R \subset X \times Y$. Dados $x \in X$ e $y \in Y$, notaremos xRy cuando $(x, y) \in R$.
A partir de esta relación, construiremos dos complejos simpliciales K y L (utilizando la misma notación que el paper original) que se definen de la siguiente manera.
El complejo simplicial K tiene como vértices a los elementos de X. Los p-simplices en K, serán los subconjuntos $\{x_0, \dots, x_p\}$ de X tales que existe algún $y \in Y$ con x_iRy para todo i.
El complejos simplicial L se construye de forma dual. Es decir, los vértices de L son los elementos de Y y los símplices son los subconjuntos finitos $\{y_0, \dots, y_q\}$ tales que existe un x que cumpla xRy_j para todo j.

Ejercicio Uno. Probar que K y L son efectivamente complejos simpliciales.

El resultado principal que queremos probar es que los poliedros asociados K y L son homotópicamente equivalentes (en particular, tendrán la misma homología).
Para probar esto, necesitamos primero introducir (o recordar, depende del caso) la noción de homotopía en el contexto de los complejos simpliciales y su relación con la homotopía de los poliedros asociados:

Definición. Sean T y M complejos simpliciales y sean $f, g : T \to M$ morfismos simpliales. Decimos que f y g son elementalmente contiguos si $f(s) \cup g(s)$ es un simplex en M para todo simplex s de T. Denotamos, en este caso, $f \sim_{ec} g$.
Definición. Decimos que f y g son contiguos, si existen $f_0 = f, f_1, \dots, f_r = g$ morfismos simpliciales tales que $f_i \sim_{ec} f_{i+1}$. Denotamos, en este caso, $f \sim_c g$. Observar que $\sim_c$ es relación de equivalencia.
Ejercicio Dos. Probar que, si $f, g : T \to M$ son contiguos, entonces $|f|, |g| : |T| \to |M|$ son funciones homotópicas.

Para probar el resultado principal, necesitaremos también trabajar con las subdivisiones baricéntricas de los complejos:
La subdivisión baricéntrica de T será denotada T' y podemos caracterizarla de la siguiente manera. Los vértices de T' son los símplices de T y los símplices de T' son los conjuntos ordenados (de símplices de T), $(s_0, \dots, s_n)$ tales que s_i es cara de s_{i+1} para todo i (ie., $s_i \subset s_{i+1}$).

E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN
UBA

Si ordenamos totalmente los vértices de T, podemos definir un morfismo simplicial

$$\phi_T : T' \to T$$

asignándole a cada vértice s de T', es decir, a cada simplex de T, el mínimo vértice de T contenido en s.

Ejercicio Tres. Probar que ϕ_T es un morfismo simplicial.

Notar que la definición de ϕ_T depende del orden que le dimos previamente a los vértices de T. Si cambiamos el orden asignado previamente, obtendremos otro morfismo que resultará contiguo al primero. Más generalmente, se tiene el siguiente resultado:

Ejercicio Cuatro. Sea $f : T \to M$ un morfismo simplicial, sean T' y M' las subdivisiones baricéntricas y $f' : T' \to M'$ el morfismo simplicial inducido en las subdivisiones. Le damos a los vértices de T y M un orden total y definimos los morfismos simpliciales

$$\phi_T : T' \to T \qquad \phi_M : M' \to M$$

como antes. Probar que $\phi_M f' \sim_c f\phi_T$.

Volvamos ahora a la relación $R \subset X \times Y$ y a los complejos K y L inducidos por esta relación.
Definimos un morfismo simplicial

$$\gamma : K' \to L$$

de la siguiente manera. Sea s un vértice de K', es decir, un simplex en K. Por definición de K, s es un subconjunto $\{x_0, \ldots, x_q\}$ de elementos de X y existe algún $y \in Y$ tal que $x_i R y$. Definimos $\gamma(s) = y$.
Claramente el morfismo γ depende del orden elegido y de la elección de cada y. Incluso no es tan evidente que el morfismo sea simplicial. Esto, de todas formas, vale y además, cambiando el orden y las elecciones de los y, da lugar a morfismos contiguos:

Ejercicio Cinco.

1. Probar que γ es morfismo simplicial.
2. Probar que la clase de contigüidad de γ es independiente del orden y de los y elegidos.

Por supuesto, intercambiando los roles de K y L, obtenemos una definición análoga para una morfismo

$$\psi : L' \to K.$$

Tomando subdivisiones baricéntricas, los morfismos γ y ψ determinan los morfismos

$$\gamma' : K'' \to L' \qquad \psi' : L'' \to K'$$

Consideremos ahora, por ejemplo, las composiciones

$$\psi\gamma', \phi_K\phi'_K : K'' \to K$$

E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN
UBA

(Análogamente, podemos considerar $\gamma\psi', \phi_L\phi'_L : L'' \to L$)

Ejercicio Seis. Probar que $\psi\gamma', \phi_K\phi'_K : K'' \to K$ son contiguas y $\gamma\psi', \phi_L\phi'_L : L'' \to L$ también. Deducir de esto el teorema principal: los poliedros $|K|$ y $|L|$ son homotópicamente equivalentes.

Ahora podemos aplicar este resultado a un cubrimiento de un conjunto (o de un espacio, o de una variedad):

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un cubrimiento de X. Definimos la relación $R \subset X \times \mathcal{U}$ via xRU si $x \in U$.

En este caso particular, al complejo simplicial K inducido por la relación se lo denota $V(\mathcal{U})$ y se denomina el complejo de Vietoris del cubrimiento. El complejo L se donota en este caso particular por $N(\mathcal{U})$ y se lo llama el Nervio del cubrimiento.

Por el resultado principal (ejercicio seis), se tiene que $|V(\mathcal{U})|$ y $|N(\mathcal{U})|$ son homotópicamente equivalentes.

Ejercicio Siete. Dibujar varios ejemplos de cubrimientos finitos de la esfera S^1 y calcular (y dibujar) los poliedros correspondientes a los nervios de esos cubrimientos. Notar que, si tomamos cubrimientos finitos esos poliedros serán finitos (compactos), pero los complejos simpliciales de Vietoris correspondientes son infinitos.

E.G. Minian
Depto Matemática
FCEyN
UBA