Teorema de punto fijo de Lefschetz: Versión topológica y versiones combinatorias.

E.G. Minian

La versión clásica (topológica) del teorema de punto fijo de Lefschetz da condiciones suficientes para que una función continua $f : X \to X$ definida en un poliedro compacto X tenga puntos fijos. Más concretamente, el teorema dice que si el *número de Lefschetz* $\lambda(f)$ de la función (que es un invariante que se construye a partir de los valores de la función en la homología de X) no es cero entonces f tiene puntos fijos. Como corolario inmediato de este teorema, se tiene que toda función continua definida en un poliedro compacto y contráctil tiene puntos fijos. Este corolario generaliza el teorema de punto fijo de Brouwer (que afirma este resultado para los discos cerrados).

Cuando f es simplicial (i.e. lineal a trozos), se tiene una versión combinatoria un tanto más fuerte del teorema: el número de Lefschetz mide de alguna manera los símplices que quedan fijos por f (ya sea con la misma orientación o la orientación inversa). Más aún, podemos asegurar en este caso que, si existen puntos fijos entonces algún baricentro queda fijo por f. Además la demostración del teorema resulta, en el caso combinatorio, mucho más simple. Cuando la función f viene dada por un endomorfismo de posets, se tiene una versión mucho más fuerte aún del teorema: el número de Lefschetz coincide en este caso con la característica de Euler del subposet de puntos fijos.

Las referencias principales para la confección de estas notas son, para la versión clásica los libros de topología algebraica de Spanier [6] y Hatcher [4] y para las versiones combinatorias, los trabajos y notas de Björner [3] y Baclawski-Björner [1]. No obstante, el punto de vista con el que están elaboradas estas notas difiere del punto de vista de las fuentes citadas, al igual que algunas de las demostraciones que acá se exponen.

1. Número de Lefschetz y la versión topológica

1.1 Definición. Dado un grupo abeliano finitamente generado M y un endomorfismo $\phi : M \to M$, se define la traza de ϕ de la siguiente manera. Como M es un $\mathbb{Z}$-módulo finitamente generado, se escribe como suma directa de su parte libre $L(M)$ y su parte de torsión $T(M)$. El morfismo ϕ induce un endomorfismo entre las partes libres de M

$$\tilde{\phi} : M/T(M) \to M/T(M)$$

Se define la traza $tr(\phi)$ como la traza de la parte libre $\tilde{\phi}$, es decir la suma de los elementos de la diagonal de la matriz asociada a $\tilde{\phi}$ en alguna base de $M/T(M)$.

Notar que la traza no depende de la base elegida y por lo tanto queda bien definida. Claramente, $tr(\phi) \in \mathbb{Z}$.

1.2 Observación. Notar que la traza de la identidad 1_M coincide con el rango de M (dimensión de la parte libre).

En estas notas trabajaremos con poliedros finitos (=compactos). Claramente los poliedros compactos tienen homología finitamente generada (es decir, $H_n(X)$ es finitamente generado para todo n y además $H_n(X) = 0$ salvo para finitos n). De esta manera, el número de Lefschetz quedará bien definido.

1.3 Definición. Sea X un poliedro finito y sea $f : X \to X$ continua. Se define el *número de Lefschetz de* f *como*

$$\lambda(f) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n tr(f_n) \ \in \mathbb{Z}$$

donde $f_n : H_n(X) \to H_n(X)$ *son los morfismos inducidos por* f *en la homología (singular=simplicial) de* X.

1.4 Observaciones Varias.

1. Si se tienen $f, g : X \to X$ homotópicas, es claro que $\lambda(f) = \lambda(g)$ ya que ambas inducen los mismos morfismos en las homologías.
2. Notar que el número de Lefschetz de la identidad de X coincide con la característica de Euler $\chi(X)$
3. Si X es un poliedro contráctil, toda $f : X \to X$ es homotópica a la identidad y por lo tanto $\lambda(f) = \chi(X) = 1$. Más generalmente, si X es cualquier poliedro finito y f es nullhomotópica, entonces $\lambda(f) = 1$.

El enunciado de la versión clásica del teorema es el siguiente.

1.5 Teorema de Lefschetz. *Sea* X *un poliedro compacto, o más generalmente un retracto de un poliedro compacto, y sea* $f : X \to X$ *continua. Si* $\lambda(f) \neq 0$, f *tiene al menos un punto fijo.*

1.6 Observación. Notar que la recíproca del teorema es claramente falsa. Tomar por ejemplo $X = S^1$ la esfera unidimensional y $f = 1_X$. En este caso se tiene que $\lambda(f) = \chi(S^1) = 0$ pero f deja a todos los puntos fijos.

Como corolario inmediato se obtiene el siguiente resultado que generaliza fuertemente el teorema de puntos fijos de funciones definidas en los discos compactos (teorema de Brouwer):

1.7 Corolario. *Si* X *es un poliedro finito, toda* $f : X \to X$ *nullhomotópica tiene puntos fijos. En particular, toda función continua definida en un poliedro compacto y contráctil tiene puntos fijos.*

La demostración de esta versión clásica del Teorema la dejaremos para la última sección de las notas. Veremos primero un lema importante que nos servirá para demostrar el teorema (en sus distintas versiones). Veremos también las versiones combinatorias del teorema cuyos resultados son más fuertes que la versión clásica y a su vez son mucho más sencillas de demostrar.

2. Versiones Combinatorias

Antes que nada necesitamos introducir algunas notaciones y demostrar el lema principal del cual se deducirán las distintas versiones del teorema.

Dado un complejo simplicial finito K, denotaremos con $C_*(K)$ al complejo de cadenas asociado, es decir $C_n(K)$ es el grupo abeliano libre generado por los n-símplices orientados $[s]$ de K, donde cada simplex s orientado con la orientación inversa se identifica con $-[s]$. Como siempre, el morfismo de borde d le asigna a cada simplex orientado la suma alternada de sus caras orientadas. Recordar que todo morfismo simplicial $g : K \to L$ induce un morfismo entre los complejos de cadenas asociados $g : C_*(K) \to C_*(L)$ y si $g(s)$ es un simplex de menor dimensión que s, entonces $g(s) = 0$ en $C_*(L)$.

2.1 Lema Principal. *Sea (C_*, d) un complejo de cadenas finitamente generado y sea $\phi : C_* \to C_*$ un endomorfismo de complejos. Se tiene la igualdad*

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n tr(\phi_n) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n tr(H_n(\phi))$$

donde $\phi_n : C_n \to C_n$ y $H_n(\phi) : H_n(C) \to H_n(C)$ es la inducida en la homología.

Demostración. Notar que este lema generaliza un resultado similar sobre las características de Euler y la demostración es casi idéntica:

Denotamos con $Z_n = Ker\ d_n$ y $B_n = Im\ d_{n+1}$.

Se tienen dos sucesiones exactas cortas de grupos abelianos:

$$0 \to Z_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0 \qquad 0 \to B_n \to Z_n \to H_n(C) \to 0$$

Por otra parte, notar que si

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo de grupos abelianos finitamente generados con filas exactas, entonces $tr(\beta) = tr(\alpha) + tr(\gamma)$.

Aplicando este resultado a las dos sucesiones exactas cortas de arriba (tomando los 3 morfismos verticales como los inducidos por ϕ) y tomando luego sumas alternadas, se obtiene la igualdad buscada.

□

Como corolario inmediato del lema, obtenemos el siguiente resultado que nos servirá para probar los teoremas en sus versiones combinatorias:

2.2 Corolario. *Sea K complejo simplicial finito, sea $\phi : K \to K$ simplicial y $|\phi| : |K| \to |K|$ la función continua inducida (realización geométrica). Entonces*

$$\lambda(|\phi|) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n tr(\phi_n)$$

donde $\phi_n : C_n(K) \to C_n(K)$ es la inducida a nivel complejos de cadena.

Este resultado nos está diciendo que, para el caso simplicial, el número de Lefschetz se puede calcular tomando la suma alternada de las trazas a nivel complejos (en lugar de calcular las trazas a nivel homología). Como decíamos, este lema es similar al lema utilizado para las características de Euler (en realidad lo generaliza): tomando en el corolario el morfismo ϕ como la identidad obtenemos que la característica de Euler de un complejo simplicial (definido a partir de la homología) coincide con la suma alternada de la cantidad de símplices del complejo.

Con estos resultados obtendremos inmediatamente la primera versión combinatoria del teorema. Primero necesitamos ver algunos conceptos y un poco de notación:

Dado un morfismo simplicial $\phi : K \to K$, decimos que un simplex s de K queda fijo por ϕ si los conjuntos subyacentes (vértices) de s y $\phi(s)$ coinciden. Observar que, si s queda fijo por ϕ, puede pasar que $[\phi(s)]$ y $[s]$ tengan la misma orientación o la orientación inversa.

Notaremos con ϕ_n^+ la cantidad de n-símplices de K que quedan fijos por ϕ y tales que ϕ preserva su orientación. Similarmente, notaremos con ϕ_n^- a la cantidad de n-símplices de K que quedan fijos por ϕ y tales que ϕ invierte su orientación.

Es claro que alguno o ambos pueden ser cero (si ϕ no deja fijo a ningún simplex). Observar también que aunque algún simplex quede fijo por ϕ, puede pasar que ningún vértice quede fijo.

Como ejemplo, el morfismo ϕ definido en el 2-simplex orientado con vértices $\{0 < 1 < 2\}$ como $\phi(0) = 1, \phi(1) = 2, \phi(2) = 0$ deja fijo al 2-simplex y preserva su orientación pero no deja fijo a ninguno de sus vértices.

Notar que, si ϕ deja fijo a un simplex s (con la misma orientación o la opuesta), aunque ningún vértice de s quede fijo por ϕ podemos de todas formas asegurar que el baricentro $b(s) \in |s| \subset |K|$ quedará fijo por $|\phi|$.

Como corolario de 2.2 y teniendo en cuenta estas últimas observaciones, deducimos la primera versión combinatoria del Teorema de Lefschetz:

2.3 Teorema. *Sea K un complejo simplicial finito y $\phi : K \to K$ simplicial. Entonces*

$$\lambda(|\phi|) = \sum(-1)^n tr(\phi_n) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(\phi_n^+ - \phi_n^-)$$

En particular, si $\lambda(|\phi|) \neq 0$, ϕ deja fijo algún simplex s de K y por lo tanto $|\phi|$ deja fijo al baricentro $b(s) \in |K|$.

Demostración. Por 2.2 sabemos que $\lambda(|\phi|) = \sum(-1)^n tr(\phi_n)$ donde $\phi_n : C_n(K) \to C_n(K)$. Teniendo en cuenta que $C_n(K)$ tiene como base a los n-símplices ordenados de K, los elementos de la diagonal de la matriz de ϕ_n en esa base pueden tomar solamente tres valores: el valor 0 si el simplex ordenado $[s]$ correspondiente no queda fijo por ϕ, el valor 1 si queda fijo y preserva su orientación y el valor -1 si queda fijo y no preserva su orientación.

De esto se deduce inmediatamente que $tr(\phi_n) = \phi_n^+ - \phi_n^-$ y se tiene la igualdad buscada. El resto del teorema se deduce inmediatamente de las definiciones y de las observaciones previas. □

2.4 Observación Importante. La versión combinatoria del teorema que recién expusimos prueba un caso particular de la versión topológica, que es cuando f es lineal a trozos (i.e., si existe una triangulación K de X tal que $f = |\phi|$, con ϕ simplicial). Para probar la versión general (f cualquier función continua) usaremos, entre otras cosas, aproximación simplicial y una generalización de 2.2.

Vamos a estudiar ahora la segunda versión combinatoria del teorema. Este resultado es de Baclawski y Björner [1] y su demostración es muy sencilla. Primero repasaremos unos conceptos básicos de posets y su relación con los complejos simpliciales.

Trabajaremos con posets finitos, aunque todo esto puede ser expresado en términos de espacios finitos T_0 (cf. [2] y [5]).

Dado un poset finito $(X, \leq)$, le asociamos un complejo simplicial $K(X)$ donde los vértices son los elementos de X y los símplices son las cadenas de X (subconjuntos totalmente ordenados). Un morfismo de posets $f : X \to Y$ (i.e., una función que preserva el orden $\leq$) induce un morfismo simplicial $K(f) : K(X) \to K(Y)$ y se tiene un funtor bien definido K de la categoría de posets finitos a la categoría de complejos simpliciales finitos.

Es claro que no todo complejo simplicial L es un $K(X)$ para algún X, pero si L es la subdivisión baricéntrica de algún complejo, entonces esto sí sucede ya que la subdivisión baricéntrica L' se puede escribir como $L' = K(X(L))$ donde $X(L)$ es el poset de símplices de L ordenados por la inclusión.

Dado un poset finito X, podemos definir su homología como la homología del complejo simplicial asociado $K(X)$. En realidad, siguiendo a McCord [5], la homología del complejo simplicial asociado coincide con la homología singular de X (visto como espacio finito), ya que se tiene una equivalencia débil $K(X) \to X$. De todas formas, para los objetivos de estas notas podemos trabajar simplemente con posets y la homología de los complejos simpliciales asociados.

Dado un morfismo de posets $f : X \to X$, podemos definir similarmente al caso de complejos simpliciales, su número de Lefschetz $\lambda(f) = \lambda(K(f))$.

2.5 Observación. Si X es una cadena (totalmente ordenado) entonces el único morfismo inyectivo (=sobreyectivo=biyectivo) $f : X \to X$ es la identidad.

Para enunciar la segunda versión combinatoria del teorema (versión para posets), necesitamos la siguiente notación:

Dado un poset finito X y un morfismo $f : X \to X$, definimos el subposet (eventualmente vacío) de puntos fijos por f:

$$X^f = \{x \in X,\ x = f(x)\} \subset X$$

El teorema para posets relaciona el número de Lefschetz de f con la característica de Euler de X^f.

2.6 Observación. La característica de Euler de un poset Y (a la que hace referencia el próximo teorema) es por supuesto la característica de Euler del complejo simplicial asociado $K(Y)$. Coincide claramente con la característica de Euler de Y visto como espacio finito por la equivalencia débil $K(Y) \to Y$. Notar que $\chi(Y)$ es fácilmente calculable a partir del diagrama de Hasse de Y ya que se tiene la fórmula:

$$\chi(Y) = \sum_{C \in \mathcal{C}(Y)} (-1)^{\#C+1}$$

donde $\mathcal{C}(Y)$ son las cadenas en Y (cf. [2]).

2.7 Teorema. *Sea X un poset finito y $f : X \to X$ un morfismo. Entonces*

$$\lambda(f) = \chi(X^f)$$

En particular, si $\lambda(f) \neq 0$, entonces $X^f \neq \emptyset$.

Demostración. El teorema se deduce fácilmente de la versión combinatoria que ya probamos. Notar que los símplices de $K(X)$ son cadenas de X y el único morfismo biyectivo de orden definido en una cadena es la identidad (2.5). Por lo tanto, si $K(f)$ deja fijo a un simplex s (con la misma orientación o la inversa), todos los vértices de s queda fijos.

Se tiene $\lambda(f) = \sum(-1)^n tr(f_n)$ donde $f_n : C_n(K(X)) \to C_n(K(X))$. Pero por lo dicho anteriormente, se tiene que

$$tr(f_n) = \#\{(x_0 < \ldots < x_n), f(x_i) = x_i\} = \#\{(x_0 < \ldots < x_n), x_i \in X^f\}$$

De donde se deduce inmediatamente el resultado. □

3. Demostración de la versión topológica

Nos queda por demostrar la versión clásica del teorema (enunciada en la primera sección de las notas). Para eso necesitamos previamente probar una generalización de 2.2. Esto se debe a que, en el caso continuo, se necesita subdividir una triangulación dada de un poliedro para utilizar aproximación simplicial.

Notemos primero lo siguiente: si K' es una subdivisión de un complejo simplicial K, se puede definir un morfismo canónico $\psi : C_*(K) \to C_*(K')$ entre los complejos de cadenas asociados, asignándole a cada simplex orientado $[s]$ de K la suma (alternada) de los símplices orientados de K' que conforman la subdivisión de s. Este morfimo de complejos de cadenas induce la identidad entre las homologías $H_n(K) = H_n(K')$.

Ahora bien, si en lugar de tener un morfismo simplicial $\phi : K \to K$ como en 2.2, comenzamos con un morfismo simplicial $\phi : K' \to K$ (para alguna subdivisión K' de K), la función continua $|\phi| : |K'| = |K| \to |K|$ no proviene de un morfismo simplicial $K' \to K'$ y por lo tanto no podemos aplicar directamente 2.2, pero valiéndonos del morfismo $\psi : C_*(K) \to C_*(K')$, como corolario de 2.1, se obtiene la generalización:

3.1 Lema. *Sea K' una subdivisión de un complejo simplicial finito K, sea $\phi : K' \to K$ simplicial y sea $|\phi| : |K'| = |K| \to |K|$ la función continua inducida. Entonces*

$$\lambda(|\phi|) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n tr(\psi_n \phi_n)$$

donde $\phi_n : C_n(K') \to C_n(K)$ es el morfismo inducido a nivel complejos de cadena y $\psi_n : C_n(K) \to C_n(K')$ es el morfismo canónico definido arriba.

Notar que el morfismo de complejos de cadenas $\psi\phi$ induce el mismo morfismo que ϕ a nivel homologías porque ψ induce la identidad. Como dijimos, la demostración es inmediata a partir de 2.1 y queda a cargo del lector.

Podemos comenzar ahora con la demostración de la versión clásica del teorema:

Paso Uno. Veamos primero que, si el teorema es válido para poliedros compactos entonces también es válido para retractos de poliedros compactos:

Para eso, supongamos que X es un retracto de un poliedro compacto Y, es decir: existe una función continua $r : Y \to X$ tal que $ri = 1_X$ donde $i : X \to Y$ es la inclusión.
Dada $f : X \to X$, nos construimos la función continua $g = ifr : Y \to Y$. Como i es la inclusión y r retracción, es fácil ver que $tr(g_n) = tr(f_n)$ para todo n y por lo tanto $\lambda(f) = \lambda(g)$.

Por lo tanto, si $\lambda(f)$ no es cero, tampoco lo es $\lambda(g)$. Como suponemos el teorema válido para Y, se tiene algún punto fijo $y \in Y$ de g. Pero como $y = g(y) = ifr(y)$, entonces $r(Y) = rifr(Y) = f(r(Y)$. Se deduce entonces que $r(y) \in X$ es punto fijo de f.

Hemos probado con esto que basta demostrar el teorema para poliedros compactos.

Paso Dos. Sea entonces X un poliedro compacto y $f : X \to X$ continua. Supongamos que f no tiene puntos fijos. Sea T una triangulación de X.

Veamos que existen subdivisiones T' y T'' de T y un morfismo simplicial $g : T'' \to T'$ que aproxima a la función $f : X \to X$ y tal que $|g(s)| \cap |s| = \emptyset$ para todo simplex s de T'':

Como X es poliedro compacto, tiene una métrica d y como $f(x) \neq x$ para todo punto x, se tiene que $d(f(x), x) > 0$ para todo x y por compacidad, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $d(x, f(x)) > \varepsilon$ para todo x.

Sea T' una subdivisión de T que cumple que $st(s) = \bigcup_{s \leq w} w$ (unión de los símplices que contienen al simplex s) tenga diámetro menor que $\varepsilon/2$ para todo simplex s de T'.

Por teorema de aproximación simplicial, existe una subdivisión T'' de T' y un morfismo simplicial $g : T'' \to T'$ que aproxima a f. Como g aproxima a f y $d(x, f(x)) > \varepsilon$, se tiene que $d(x, g(x)) > \varepsilon/2$ y por lo tanto $|g(s)| \cap |s| = \emptyset$ para todo simplex s de T''. Notar además que $\lambda(f) = \lambda(|g|)$ por ser homotópicas.

Paso Tres. El morfismo $g : T'' \to T'$ induce $g_n : C_n(T'') \to C_n(T')$ y por el lema 3.1, se tiene que

$$\lambda(f) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n tr(\psi_n g_n)$$

(donde ψ es como en el lema). Pero como $|g(s)| \cap |s| = \emptyset$ para todo simplex s de T'', la diagonal de $\psi_n g_n$ tiene todos ceros y por lo tanto probamos que $\lambda(f) = 0$ $\square$

Referencias

[1] K. Baclawski, A. Björner. *Fixed Points in Partially Orderd Sets.* Advances in Math. 31 (1979) 263-287.

[2] J.A. Barmak, E.G. Minian. *Minimal Finite Models.* Preprint 2006.

[3] A. Björner. *Topological Methods.* Handbook of Combinatorics, Chapter 34. Elsevier (1995)

[4] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press (2002).

[5] M.C. McCord. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces.* Duke Math. J. 33 (1966) 465-474.

[6] E. Spanier. *Algebraic Topology.* Springer (1966).

E-mail address: gminian@dm.uba.ar