UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tensores Naturales de Tipo (0,2) en el Fibrado Unitario Tangente con Aplicaciones al Espacio de Geodésicas

Tesis de Licenciatura

Alumno: Guillermo S. Henry

Director: Dr. Guillermo R. Keilhauer

Junio-2003

Índice

Introducción

Los tensores son objetos que nos permiten generalizar los conceptos de campos y formas en una variedad diferenciable. Una métrica en una variedad es un caso particular de tensor. Otro ejemplo es el llamado tensor de curvatura en una variedad riemanniana.

Una propiedad importante de los tensores es que no dependen de un sistema de coordenadas, por lo tanto podemos extraer de ellos información sobre las propiedades geométricas de una variedad.

A modo de dato histórico podemos decir que el concepto de tensor fué introducido por Hamilton (1853) y Riemann (1854), pero el nombre de tensor fué dado por Voigt en 1884.

El motivo de este trabajo es una clase de tensores tipo (0,2) llamados naturales. Estos fueron definidos y caracterizados en 1988, para el caso de variedades riemannianas en el fibrado tangente, por O. Kowalski y M. Sekisawa [2], utilizando la teoría de la geometría natural desarrollada por I.Kolá$\check{r}$, P.Michor, J.Slov$\ddot{a}$k [3]; también por D.Krupka, J.Jany$\check{s}$ka [7] y otros .

En [4] se muestra que los tensores tipo (0,2) sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana estan determinados por matrices globales que cumplen ciertas propiedades. A partir de esto, en dicho artículo, se caracterizan los tensores naturales en el fibrado tangente, obviando la teoría de Jets que involucra la geometría natural y utilizando solamente técnicas de la geometría Riemanniana.

El primer objetivo de este trabajo es definir y caracterizar los tensores naturales tipo (0,2) en el fibrado unitario tangente, que se describe en el capítulo 2.

En el capítulo 3 nos ocuparemos del espacio de geodésicas donde se define y se caracteriza el concepto de tensor natural.

En el capítulo 1, desarrollaremos brevemente el concepto de tensores y conexiones. En él se dan definiciones y propiedades que se utilizarán más tarde. Se define la función de conexión K que será de utilidad en los demás capítulos y cuya construcción extraemos de [1].

Capítulo 1

Preliminares

1.0.1 Tensores

Definición 1.1 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y r,s ϵ $\mathbb{N}$ $\cup\{0\}$, se define:*

$T_s^r(V) : \{T : V^{*} \times \overset{r}{\ldots} \times V^{*} \times V \times \overset{s}{\ldots} \times V \longrightarrow \mathbb{R} / T es\ multilineal\}$

cuando $r = s = 0$, se define $T_0^0(V) = \mathbb{R}$
$T_s^r(V)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sus elementos se denominan tensores tipo (r, s) sobre V.

Fibrado tensorial:

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y r,s $\in$ $\mathbb{N}$ $\cup\{0\}$;
se considera:
$T_s^r(M) = \bigcup_{p\in M} T_s^r(M_p)$
si $r = s = 0$, $T_0^0(M) = \mathbb{R}$
Este conjunto tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión $n + n^{r+s}$.
El atlas, que genera la estructura diferenciable del fibrado tensorial, es inducido por las cartas de M de la siguiente manera:

Sea (U,x) una carta de M, consideramos $T_s^r(U) = \bigcup_{p\epsilon U} T_s^r(M_p)$, si $\Pi : TM \longrightarrow M$ es la proyección

tenemos $\bar{x} : T^r_s(U) \longrightarrow x(U) \times \mathbb{R}^{n^{r+s}}$
donde $\bar{x}(T) = (x(\Pi(T)), T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s})$, en algún orden

$1 \leq i_l, j_k \leq n$ y $T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} = T(dx^{i_1}|_p, \dots, dx^{i_r}|_p, \partial x^{j_1}|_p, \dots, \partial x^{j_s}|_p)$ *si* $T \in T^r_s(M_p)$

Ejemplo 1.2 $T^1_0(M) = TM$ *fibrado tangente*
$T^0_1(M) = T^*M$ *fibrado cotangente*

Definición 1.3 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $G \subseteq M$ un abierto. Si r,s $\in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $T : G \longrightarrow T^r_s(M)$, T se dice que es un campo de tensores tipo (r,s) o un tensor (r,s) sobre M.*
Se dice que T es diferenciable si lo es como función entre variedades.
Notación : $\chi^r_s(G) = \{T : G \longrightarrow T^r_s(M),\ T(p) \in\ T^r_s(M_p)$ *y* $T \in\ C^\infty\}$

Ejemplo 1.4 $\chi^1_0(M) = \chi(M)$ *los campos vectoriales diferenciables*
$\chi^0_1(M) = \chi^*(M)$ *los campos cotangentes diferenciables*
$\chi^0_0(M) = F(M)$ *las funciones diferenciables a* $\mathbb{R}$

F(M)-Multilineales:

Definición 1.5 $T : \chi(M) \longrightarrow F(M)$ *es F(M)-lineal si dado X,Y $\in\ \chi(M)$ y*
$f \in\ F(M)$ *se verifica:*
$T(fX + Y)(p) = f(p)T(X)(p) + T(Y)(p)\ \forall p \in\ M$
del mismo modo para $T : \chi^*(M) \longrightarrow F(M)$.

Definición 1.6 $T : (\chi^*(M))^r \times (\chi(M))^s \longrightarrow F(M)$ *es F(M)-multilineal si es lineal con respecto a cada una de sus variables.*

Teorema 1.7 *Sea r,s $\in\ \mathbb{N} \cup 0$ r,s $\neq (0,0)$*
y $T : (\chi^*(M))^r \times (\chi(M))^s \longrightarrow F(M)$ $\mathbb{R}$*-multilineal*
son equivalentes:

A) T es F(M)-multilineal

B) Sean $\theta_1, \ldots, \theta_r$ *y* $\bar{\theta_1}, \ldots, \bar{\theta_r} \in \chi^*(M)$ *y* $X_1, \ldots, X_s, \bar{X_1}, \ldots, \bar{X_s} \in \chi(M)$

tal que para $p \in M$*:*

$\theta_i(p) = \bar{\theta}_i(p)$

$X_i(p) = \bar{X}_i(p)$

entonces $T(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s)(p) = T(\bar{\theta_1}, \ldots, \bar{\theta_r}, \bar{X_1}, \ldots, \bar{X_s})(p)$

La demostración se puede ver en [1]

La siguiente proposición muestra otra forma de pensar los tensores tipo (r,s) sobre M.

Proposición 1.8 $\chi_s^r(M)$ *es isomorfo a* $W_s^r(M)$*, donde*
$W_s^r(M) : \{T : (\chi^*(M))^r \times (\chi(M))^s \longrightarrow F(M),\ F(M) - multilineal\}$

Demostración: Sea $\rho : \chi_s^r(M) \longrightarrow W_s^r(M)$, definido del siguiente modo:

si $T \in \chi_s^r(M)$ *y* $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \chi^*(M)$ y $X_1, \ldots, X_s \in \chi(M)$,

$\rho(T)(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s)(p) = T(p)(\theta_1(p), \ldots, \theta_r(p), X_1(p), \ldots, X_s(p))$

Luego ρ es lineal y como veremos a continuación es un monomorfismo.

Sea $T \in \chi_s^r(M)$ tal que $\rho(T) \equiv 0$, p$\in$ M *y* $p \in (U, x)$ *carta de*M,

se tiene:

$T(q) = \sum_{1 \leq i_k, j_l \leq n} T_{j_1, \ldots, j_s}^{i_1, \ldots, i_r}(q)\ \partial x^{i_1}|_q \otimes \ldots \otimes \partial x^{i_r}|_q \otimes dx^{j_1}|_q \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}|_q\ \forall q \in U$

donde $T_{j_1, \ldots, j_s}^{i_1, \ldots, i_r} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables.

Sea $\psi \in F(M)$ *tal que* $\psi(p) = 1$ *y* $sop(\psi) \subset U$

si

$$\theta_1 = \psi dx^{i_1}, \ldots, \theta_r = \psi dx^{i_r}$$

$$X_1 = \psi \partial x^{j_1}, \ldots, X_s = \psi \partial x^{j_s}$$

resulta

$T_{j_1, \ldots, j_s}^{i_1, \ldots, i_r}(p) = T(p)(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s) = 0$

Como esto vale para todo p $\in M$, se tiene que $T \equiv 0$,luego ρ es inyectiva.
Ahora sea S$\in$ $W_s^r(M)$ definimos $\tilde{S} \in$ $\chi_s^r(M)$ de la siguiente manera:

$$\tilde{S}(p)(\gamma_1,\ldots,\gamma_r,v_1,\ldots,v_s) = S(\theta_1,\ldots,\theta_s,X_1,\ldots,X_s)(p)$$

donde $\theta_i(p) = \gamma_i$ y $X_j(p) = v_j$, donde $\theta_i \in$ $\chi^*(M)$ $1 \leq i \leq r$; $X_j \in$ $\chi(M)$ $1 \leq j \leq s$
.
Esta bien definido por 1.7. Por construcción $\rho(\tilde{S}) = S$, y por lo tanto ρ es suryectiva.

□

Los elementos de $\chi_s^1(M)$ se los puede pensar como una aplicación $T : \chi(M)^s \longrightarrow \chi(M)$ $F(M)-multilineal$ y viceversa, mediante la aplicación:
$T : \chi(M)^s \longrightarrow \chi(M)$ definida por $\tilde{T}(\theta,X_1,\ldots,X_s)(p) = \theta(p)(T(X_1,\ldots,X_s)(p))$

k-formas

Definición 1.9 *Se dice que* $\omega : (\chi(M))^k \longrightarrow F(M)$ *es una k-forma diferenciable si:*
1) ω *es F(M)-multilineal*
2) ω *es altenada, es decir*
Si $\sigma \in$ S_k *y* $X_1,\ldots,X_k \in$ $\chi(M)$, *entonces* $\omega(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(k)}) = sg(\sigma).\omega(X_1,\ldots,X_k)$
Se nota al espacio de las k-formas diferenciables con $\Omega^k(M)$, *y* $\Omega^0(M) = F(M)$ *son las 0-formas.*

Diferencial exterior:
Si $f \in$ $F(M)$, definimos la diferencial exterior de f como $df : \chi(M) \longrightarrow F(M)$

$$df(X)(p) = X(p)(f) \quad p \in M \; y \; X \in \chi(M)$$

Si $k \geq 1$ se define $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ del siguiente modo, si $\omega \in$ $\Omega^k(M)$

$$d\omega(X_1,\ldots,X_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j+1}X_j(\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1}))+$$

$$+\sum_{1\leq i<j\leq k+1}(-1)^{i+j}w([X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1})$$

donde $\hat{X}$ indica que se omite.

la diferencial exterior satisface:

1)$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ $\quad$ *si* $\omega_1, \omega_2 \in \ \Omega^k(G)$ *y* $k \geq 0$

2)$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k.\omega \wedge d\theta$ $\quad$ *si* $\omega \in \ \Omega^k(M)$

3)$d^2(\omega) = d(d(\omega)) = 0$ $\quad$ *si* $\omega \in \ \Omega^k(M)$ *y* $k \geq 0$

También se puede ver que si $f : M \longrightarrow N$ una función diferenciable entre variedades, entonces $d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega)$ para toda $\omega \in \ \Omega^k(M)$ *con* $k \geq 0$.

1.0.2 Conexiones

Definición 1.10 *Sea M una variedad diferenciable; una conexión* ∇ *sobre M es una función*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$X, Y \longrightarrow \nabla_X Y \in \ \chi(M)$$

que cumple:

si $X, Y, Z \in \ \chi(M)$ *y* $f \in \ F(M)$

1) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

2) $\nabla_X(fY) = f.\nabla_X Y + X(f).Y$

3) $\nabla_{X+Y}(Z) = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

4) $\nabla_{f.X} Y = f.\nabla_X Y$

Observación 1.11 *Sea* $Y \in \ \chi(M)$ *consideramos* $\nabla Y : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ *definido por* $X \longrightarrow \nabla_X Y$. *Esta aplicación es un tensor tipo (1,1) y por 1.7* $\nabla_X Y|_p$ *no depende de X, sino del valor que toma X en p. Entonces* $\nabla_X Y|_p = \nabla_{X}(p) Y$ *y se denomina la derivada covariante de Y en la dirección X(p).*

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y ∇ una conexión sobre M. Designamos con TTM al doble fibrado tangente. Si $p \in \ M$, $u \in \ M_p$ y G es un abierto de M sea $\chi_{p,u}(G) : \{X \in \ \chi(G) : X(p) = u\}$, entonces:

Teorema 1.12 función de conexión

Existe una única función K, llamada ***función de conexión*** *tal que* $K : TTM \longrightarrow TM$ *diferenciable y cumple:*

1) Si $u \in TM$ *y* $\Pi(u) = p$*, donde* $\Pi : TM \longrightarrow M$ *es la proyección, entonces* $K((TM)_u) \subseteq M_p$ *.*

2) $K|_{(TM)_u} : (TM)_u \longrightarrow M_p$ *es lineal .*

3) Si $u \in TM$*,* $b \in (TM)_u$ *y* $b = X_{*_p}(v)$ *donde* $v \in M_p$ *y* $X \in \chi_{p,u}(M)$*, entonces* $K(b) = \nabla_v X$ *.*

Para demostrar este teorema se usan los dos lemas que se dan a continuación.

Lema 1.13 *Sea* $p \in M$ *y* $u \in M_p$*, existe una base de* $(TM)_u$ *con elementos de la forma* $b = Y_{*_p}(v)$ *con* $v \in M_p$ *e* $Y \in \chi_{(p,u)}(U)$*, donde* $p \in (U, x)$ *carta de* M*.*

Demostración: Sea (TU,$\bar{x}$) la carta del fibrado tangente inducida por (U,x), y sea $A_i(u) = \partial\bar{x}^i|_u$ $1 \leq i \leq 2n$ base de $(TM)_u$, se tiene:

$$Y_{*_p}(v) = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)A_i(u) \; + \; \sum_{i=1}^{n} v(\rho^i)A_{i+n}(u)$$

donde $Y = \sum_{i=1}^{n} \rho^i X_i$, si $x = (x^1, \ldots, x^n)$ y $X_i = \partial x^i$.

Si $u = \sum_{i=1}^{n} u^i X_i(p)$, tomamos $Y \in \chi_{p,u}(U)$ de la forma $Y = \sum_{i=1}^{n} u^i X_i$, entonces

$$Y_{*_p}(X_j(p)) = A_j(u)$$

.

Si definimos $Y = \sum_{i=1}^{n} \rho^i X_i$ donde $\rho^i = x^i + u^i - x^i(p)$, entonces

$$Y_{*_p}(X_j(p)) = A_j(u) + A_{j+n}(u)$$

luego $\{A_i(u), A_i(u) + A_{n+i}(u)\}$ $1 \leq i \leq n$ es base de $(TM)_u$.

$\square$

Lema 1.14 *Sea* $p \in M$*,* $p \in (U, x)$ *carta de* M*;* X*,* Y*,* $Z \in \chi(U)$ *y* v*,* w*,* $z \in M_p$

1) Si $X_{*_p}(v) = Y_{*_p}(w) \implies v = w$ *y* $\nabla_v X = \nabla_w Y$ *.*

2)$X_{*_p}(v) = Y*_p(w) + Z*_p(z) \implies \nabla_v X = \nabla_w Y + \nabla_z Z$ *.*

Demostración: 1) Como $X_{*_p}(v) = Y_{*_p}(w)$ se tiene X(p)=Y(p)=u

Si $X = \sum_{i=1}^{n} \rho^i X_i \ \ e \ \ Y = \sum_{i=1}^{n} \psi^i X_i$, resulta

$$\sum_{i=1}^{n} v(x^i)A_i(u) + v(\psi_i)A_{i+n}(u) = \sum_{i=1}^{n} w(x^i)A_i(u) + w(\psi^i)A_{i+n}(u)$$

entonces $v(x_i) = w(x_i) \ para \ \ 1 \leq i \leq n$ con lo cual $v = w$.

Además $v(\rho^i) = v(\psi^i)$ para $1 \leq i \leq n$ y como $\rho^i(p) = \psi^i(p)$ se obtiene $\nabla_v X = \nabla_v Y$

2) Si $Z = \sum_{i=1}^{n} \xi^i X_i$ tenemos $u = X(p) = Y(p) = Z(p)$ y $v(x^i) = w(x^i) + z(x^i) \ para \ 1 \leq i \leq n \implies v = w + z$

Dado que $v(\rho^i) = w(\psi^i) + z(\xi^i) \ para \ 1 \leq i \leq n \ \ y \ \ \rho^i(p) = \psi^i(p) = \xi^i(p)$

se tiene que $\nabla_v X = \nabla_w Y + \nabla_z Z$.

□

Demostración del teorema 1.12 Construiremos la función de conexión. Sea $u \in TM \ \ y \ \Pi(u) = p \ \ p \in \ (U, x) \ carta \ de \ M$.

Por lema 1.13 tenemos una base de $(TM)_u$ de la forma $\{Y^i_{*_p}(v_i)\} \ \ 1 \leq i \leq 2n$, donde $v_i \in \ M_p \ \ e \ \ Y \in \ \chi_{p,u}(U)$

Si $b \in \ (TM)_u \ b = \sum_{i=1}^{2n} b_i Y^i_{*_p}(v_i)$

definimos $K_u : (TM)_u \longrightarrow M_p$ del siguiente modo:

$$K_u(b) = \sum_{i=1}^{2n} b_i \nabla_{v_i} Y^i$$

Sea $K : TTM \longrightarrow TM$ como $K(b) = K_u(b) \ \ si \ b \in \ (TM)_u$.

El lema 1.14 nos dice que K esta bien definida.

Esta función cumple con los tres puntos del teorema 1.12, y claramente es única.

□

Representación local de K:

Sea $u \in \ TM \ \ \ \Pi(u) = p \ \ y \ p \in \ (U, x) \ carta \ de \ M$, donde $X_i = \partial x^i \ \ y \ \ A_i = \partial \bar{x}^i$

y sea $(TU, \bar{x})$ la carta del fibrado tangente inducida por (U,x).

Si $u = \sum_{i=1}^{n} u^k X_k(p)$ e $Y = \sum_{i=1}^{n} \rho^k X_k$ y $v \in \ M_p$ se tiene

$$\nabla_v Y = \sum_{k=1}^{n} \{v(\rho^k) + \sum_{i,j=1}^{n} v(x^i) u^k \Gamma_{ij}^k(p)\} X_k(p)$$

donde $\{\Gamma_{ij}^k\} = \nabla_{\partial x^i} \partial x^j (x^j)$.

Si tomamos $\rho^k = u^k \Longrightarrow Y_{*_p}(X_i(p)) = A_i(u)$ con $1 \leq i \leq n$

y

$$K_u(A_i(u)) = \nabla_{X_i(p)} Y = \sum_{k=1}^{n} \{\sum_{j=1}^{n} u_k \Gamma_{ij}^k(p)\} X_k(p)$$

Ahora tomando $\rho^k = x^k + u^k - x^k(p) \Longrightarrow Y_{*_p}(X_i(p)) = A_i(u) + A_{i+n}(u)$

con lo cual

$$K_u(A_i(u) + A_{i+n}(u)) = \nabla_{X_i(p)} Y = X_i(p) + \sum_{k=1}^{n} \{\sum_{j=1}^{n} u^k \Gamma_{ij}^k(p)\} X_k(p)$$

$$\Longrightarrow K_u(A_{i+n}(u)) = X_i(p)$$

Si $b \in \ (TM)_u, \ \ b = \sum_{i=1}^{n} b^i A_i(u) + \sum_{i=1}^{n} b^{n+i} A_{n+i}(u).$

$$K(b) = \sum_{k=1}^{n} \{b^{n+k} + \sum_{i,j=1}^{n} b^i u^j \Gamma_{ij}^k(p)\} X_k(p)$$

De la representación local se deduce la diferenciabilidad de K.

Derivación covariante de campos a lo largo de aplicaciones:

Sea M, Q variedades diferenciables, ∇ una conexión sobre M. $f : Q \longrightarrow M$ diferenciable, $B \in \ \chi(Q)$ e $Y \in \ \chi_f$ *(es decir,* $Y : Q \longrightarrow TM$ *tal que* $\pi \circ Y(p) = f(p) \ \ \forall p \in \ Q$ *e* $Y \in \ C^\infty)$.

se tiene

$$Q \xrightarrow{B} TN \xrightarrow{Y_*} TTM \xrightarrow{K} TM$$

Luego para $p \in \ Q, \ \ K(Y_{*_p}(B(p))) \in \ M_{f(p)}$

y por lo tanto $\ \ K \circ Y_* \circ B : N \longrightarrow TM \in \ \chi_f$.

Notamos

$$\nabla_B Y|_p = K(Y_{*_p}(B(p)))$$

Llamamos a $\nabla_B Y$ la derivada covariante de Y con respecto de B a lo largo de f .

Observación 1.15 *Si* $Q = M$ *y* $f = Id$, B *e* $Y \in \chi(M)$

$$K(Y_*(B)) = \nabla_B Y$$

se tiene la derivada covariante de Y *con respecto de* B *.*

Propiedades:

1) Si $B_1(p) = B_2(p) = v \implies \nabla_{B_1} Y|_p = \nabla_{B_2} Y|_p = \nabla_v Y|_p$

2) $v \in Q_p$, $X \in \chi(M)$, *entoces* $\nabla_{f_{*p}(v)} X = \nabla_v X \circ f$

3) *Representación local:*

Sea $B \in \chi(Q)$, $Y \in \chi_f$, $p \in Q$ *y* $f(p) \in (U, x)$ *carta de* M.

$$\nabla_B Y|_p = K(Y_{*_p}(B(p)) = \sum_{k=1}^{n} \{B(p)(Y(x^k)) + \sum_{i,j=1}^{n} B(p)(x^i \circ f) Y(p)(x^j) \Gamma_{ij}^k (f(p))\} X_k(f(p))$$

4) $\nabla_{B_1 + B_2} Y = \nabla_{B_1} Y + \nabla_{B_2} Y$

5) $\nabla_{h.B} Y = h.\nabla_B Y$ $\quad$ *si* $h \in F(Q)$

6) $\nabla_B (Y_1 + Y_2) = \nabla_B Y_1 + \nabla_B Y_2$

7) $\nabla_B (h.Y) = B(h)Y + h.\nabla_B Y$

8) Si T es el tensor de torsión de ∇

$$T(f_* A, f_* B) = \nabla_A f_* B - \nabla_B f_* A - f_*([A, B])$$

9)Si $<,>$ es una métrica de Riemann sobre M y ∇ es la conexión de Levi-Civita, la propiedad 8) dice que

$$\nabla_A f_* B - \nabla_B f_* A = f_*([A, B])$$

10) Si $<,>$ es una métrica de Riemann sobre M y ∇ es la conexión de Levi-Civita, se cumple

$$A(< X,Y >) =< \nabla_A X,Y > + < X,\nabla_A Y >$$

si $A \in \ \chi(Q), \ \ X,Y \in \ \chi_f$

Nota:

Sea $Q = I \subseteq \mathbb{R} \ \ y \ \ c : I \longrightarrow M \ \ una\ curva\ diferenciable, \ B(t) = D|_t \ \ y\ X \in \ \chi_c.$
Entonces $\nabla_D X$ se denomina la derivada covariante de X a lo largo de la curva c .

Spray geodésico

Sea M una variedad diferenciable y ∇ una conexión sobre M. ; $\Pi : TM \longrightarrow M$ la proyección, y $K : TTM \longrightarrow M$ la función de conexión. Si $u \in \ TM$
$\Pi_{*_u} : (TM)_u \longrightarrow M_{\Pi(u)}$, $K_u : (TM)_u \longrightarrow M_{\Pi(u)}$ son lineales.
consideramos:

$$(TM)_u^v = \{b \in \ (TM)_u : \ \Pi_{*_u}(b) = 0\} = Nu(\Pi_{*_u})$$

llamado subespacio vertical

y

$$(TM)_u^h = \{b \in \ (TM)_u : \ K_u(b) = 0\} = Nu(K_u)$$

llamado subespacio horizontal.

$Si\ p \in \ (U,x)\ carta\ de\ M$, donde $X_i = \partial x^i \ \ y \ \ \ (TU,\bar{x})$ es la carta sobre el fibrado tangente inducida por $(U,x)\ y\ A_i = \partial \bar{x}^i$, es

$$\Pi_{*_u}(A_k(u)) = X_k(p) \ \ y\ \Pi_{*_u}(A_{n+i}(u)) = 0\ si\ 1 \leq k \leq n$$

Sea $b \in \ (TM)_u$, $\ b = \sum_{i=1}^{2n} b_i A_i(u); luego$
$\Pi_{*_u}(b) = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i(\Pi(u))$ y tenemos que $b \in \ (TM)_u^v\ sii\ b_1 = \ldots = b_n = 0$
con lo cual

$$\{A_{n+1}(u),\ldots,A_{2n}(u)\} \ \ base\ de\ (TM)_u^v$$

Ahora

$b \in \ (TM)_u^h\ sii\ K_u(b) = 0\ sii\ b_{n+k} = \{-\sum_{i,j=1}^{n} b_i u_j \Gamma_{ij}^k(\pi(u))\}\ sii\ b = \sum_{i=1}^{n} H_i(u)$

donde

$$H_i(u) = A_i(u) - \sum_{k=1}^{n}\{\sum_{j=1}^{n} \bar{x}^{n+j}(u)\Gamma_{ij}^{k}(\Pi(u))\}A_{k+n}(u)$$

entonces

$$\{H_1(u), \ldots, H_n(u)\}$$

es base de $(TM)_u^h$

Luego:

1) $dim((TM)_u^v) = dim((TM)_u^h) = dim(M)$.

2) $(TM)_u^v \oplus (TM)_u^h = (TM)_u$.

Proposición 1.16 *Sea* $\Pi_* \times K : TTM \longrightarrow TM \times TM$*;* $(\Pi_* \times K)(b) = (\Pi_{*_u}(b), K_u(b))$ *si* $b \in (TM)_u$ *.*

a) $\Pi_* \times K$ *es diferenciable .*

b) $(\Pi_* \times K)|_{(TM)_u} : (TM)_u \longrightarrow M_{\Pi(u)} \times M_{\Pi(u)}$ *es un isomorfismo lineal .*

c) $(\Pi_* \times K)((TM)_u^h) = M_{\Pi(u)} \times 0_p$

$(\Pi_* \times K)((TM)_u^v) = 0_p \times M_{\Pi(u)}$

Demostración a) Es diferenciable porque es producto de funciones diferenciables.

b) $dim(TM)_u = 2n = dim(M_{\Pi(u)} \times M_{\Pi(u)})$, $b \in Nu(\Pi_* \times K)$ sii $(TM)_u^v \cap (TM)_u^h$ sii $b = 0$, por lo tanto $(\Pi_* \times K)$ es monomorfismo , como tienen la misma dimensión es un isomorfismo.

c) por b) y observando $(\Pi_* \times K)((TM)_u^h) \subseteq M_{\Pi(u)} \times 0$ y $(\Pi_* \times K)((TM)_u^v) \subseteq 0 \times M_{\Pi(u)}$

□

Sea $u \in TM$ por el item b) de la proposición anterior (u,0) esta en la imagen de $\Pi_{*_u} \times K_u$

existe un único $S(u) \in (TM)_u$ tal que $\Pi_{*_u}(S(u)) = u$ y $K_u(S(u)) = 0$

tenemos que $S : TM \longrightarrow TTM, \quad u \longrightarrow S(u)$ es un campo de vectores sobre el fibrado tangente denominado el **spray geodésico**.

Teorema 1.17 *Sea M una variedad diferenciable y ∇ una conexión, $S : TM \longrightarrow TTM$ el spray geodésico asociado a ∇. Se verifica:*

a) Si $c : I \longrightarrow M$ es una geodésica$\Longrightarrow$ $\dot{c}$ es una curva integral de S.

b) Si $\rho : I \longrightarrow TM$ es una curva integral de $S \Longrightarrow c = \Pi \circ \rho : I \longrightarrow M$ es una geodésica.

Demostración a) Sea $\rho(t) = \dot{c}(t) = c_{*_t}(D|_t)$ queremos ver que $S(\rho(t)) = \dot{\rho}(t)$.

$$\Pi_{*_{\rho(t)}}(\dot{\rho}(t)) = \Pi_{*_{\rho(t)}}(\rho_{*_t}(D|_t)) = (\Pi \circ \rho)_{*_t} = c_{*_t}(D|_t) = \rho(t)$$

y

$$K_{\rho(t)}(\rho(\dot{t}) = K_{\rho(t)}(\rho_{*_t}(D|_t)) = \nabla_D \dot{c}|_t = 0$$

porque c es una geodésica.

Entonces $S(\rho(t)) = \dot{\rho}(t)$ con lo cual $\dot{c}$ es una curva integral de S.

b) Como ρ es una curva integral de S es:

$$0 = K_{\rho(t)}(\dot{\rho}(t)) = \nabla_D \rho|_t = \nabla_D \Pi \dot{\circ} \rho|_t = \nabla_D \dot{c}|_t$$

por lo tanto $c = \Pi \circ \rho$ es una geodésica

$\square$

.

Capítulo 2

Tensores naturales tipo (0,2) en el fibrado unitario tangente

Teorema 2.1 *teorema de la función implicita*
Sea $G \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto que contiene el origen de $\mathbb{R}^n$, y $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^k$ $n > k$, una función diferenciable que satisface

$$f(0) = 0 \quad y \quad Det(D_j f^i|_0) \neq 0 \;\; 1 \leq i, j \leq k$$

.

Entonces existe (D, h) carta usual de $\mathbb{R}^n$, alrededor del origen, que satisface:
a) $h(0) = 0$ y $h(D) \subset G$
b) $D = (A \times C)$, con A abierto de $\mathbb{R}^k$ y C abierto de $\mathbb{R}^{n-k}$
c) Si $u = (u_1, \ldots, u_n) \in D$ entonces $f(h(u)) = (u_1, \ldots, u_k)$, osea $f \circ h$ es una proyección.

Demostración: Es concecuencia inmediata del teorema de la función inversa local.

□

El resultado anterior implica el siguiente:

Teorema 2.2 *Sea M, N variedades diferenciables de dimensión n y k respectivamente y $f : M \longrightarrow N$ diferenciable, si $q \in N$ es un valor regular $Q = f^{-1}(q)$ es una subvariedad sumergida de M de dimensión $n - k$.*

Teorema 2.3 *Sea M,N,Q variedades diferenciables,* $dim(M) = n \geq k = dim(N)$*, y* $f : M \longrightarrow N$ *una* ***submersión****(esto es:* $f(M) = N$ *y* $\forall q \in N$ *q es un valor regular).*
Sea $F : N \longrightarrow Q$
son equivalentes:
1) $F \circ f \in C^{\infty}$ *(diferenciable)*
2) $F \in C^{\infty}$

Demostración: 2) implica 1) porque composición de funciones diferenciables es dife renciable.
1) $\Rightarrow$ 2)
si $dim(M) > dim(N)$:
Sea $q \in N$ y $F(q) \in Q$, queremos hallar cartas (V,y) de N y (W,z) de Q tal que $q \in (V, y)$, $F(q) \in (W, z)$ y $F(V) \subseteq W$ de modo que

$$z \circ F \circ y^{-1} : y(V) \longrightarrow z(W)$$

sea diferenciable .
Como $f(M) = N$ y q es un valor regular (f es una submersión) elegimos $p \in f^{-1}(q)$.
Por el teorema 2.1 existe (U, x) carta de M de modo que $p \in U$ y $q \in (V, y)$ carta de N tal que:

$$X(U) = A \times C$$

donde A es un abierto de $\mathbb{R}^k$ entorno del origen y C es un abierto de $\mathbb{R}^{n-k}$ entorno del origen .
y
$y \circ f \circ x^{-1}(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, u_k)$ *para* $u \in X(U)$.
$y(V) = A$, elegimos (W,z) carta de Q de modo que $F(q) \subseteq W$
entonces tomamos

$$z \circ F \circ y^{-1}(u_1, \ldots, u_k) = z \circ F \circ y^{-1} \circ y \circ f \circ x^{-1}(u_1, \ldots, u_k, 0 \ldots, 0)$$

por lo tanto

$$z \circ F \circ y^{-1}(u_1, \ldots, u_k) = (z \circ F \circ f \circ x^{-1}) \circ i(u_1, \ldots, u_k)$$

donde i es la inclusión.

Resulta diferenciable pues es composición de funciones diferenciables.

Si $dim(M) = dim(N)$

Sea q $\in$ N, $p \in$ $f^{-1}(q)$. Se tiene que $f_{*_p} : M_p \longrightarrow N_q$ es suryectiva y como M y N tienen la misma dimensión f_{*_p} es un isomorfismo.

Por el teorema de la función inversa local existe un entorno U de p en M y V entorno de q en N tal que:

$$f : U \longrightarrow V \ es \ un \ difeomorfismo$$

Podemos tomar $p \in$ (U, x) de M y $q \in$ (V, y) de N tal que $f(U) = V$ y $f : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo.

Eligiendo (W,z) carta de Q tal que $F(V) \subseteq W$ resulta

$$z \circ F \circ y^{-1} = (z \circ F \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ f^{-1} \circ y^{-1})$$

que es diferenciable por ser composición de funciones diferenciables.

□

Lema 2.4 *Sea* $N : TM \longrightarrow TTM$ *definido por* $N(v) = (\Pi_{*_v} \times K_v)^{-1}(0, v)$. *Si* $\rho : I \longrightarrow TM$ *una curva integral de N, entonces* $\nabla_D \rho = \rho$ *.*

Demostración: Como $N(\rho(t)) = \dot{\rho}(t) = \rho_{*_t}(D|_t)$, o sea $\Pi_{*_{\rho(t)}} \times K_{\rho(t)}(\dot{\rho}(t)) = (0, \rho(t))$, se tiene:

$$\nabla_D \rho|_t = K_{\rho(t)}(\rho_{*_t}(D|_t)) = \rho(t)$$

□

En lo que sigue (M,g) una variedad riemanniana de dimensión n y ∇ es la conexión de Levi-Civita asociada a g.

Proposición 2.5 *Notamos con* $T_1M = \{v \in \ TM : \ g(v, v) = 1 \ \}$. *Si* $F : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ *se define* $F(v) = g(v, v)$, *entonces 1 es valor regular de F.*

Demostración: 1)veamos que F es diferenciable:
Sea $v \in\ TM$, $\Pi(v) = p\ \ y\ p \in\ (U, x)$ carta de M, y $(TU, \bar{x})$ la carta del fibrado tangente inducida por (U, x), luego $v \in\ (TU, \bar{x})$ y :

$$F \circ \bar{x}^{-1}(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \circ x^{-1}(a_1, \ldots, a_n)a_{n+i}a_{n+j}$$

que es diferenciable, pues g_{ij} lo son.
donde $a = (a_1, \ldots, a_{2n}) \in\ x(U) \times \mathbb{R}^n$ y $g_{ij} = g(\partial x^i, \partial x^j)$
2) Sea $v \in\ T_1M$ se quiere ver que $F_{*_p} : (TM)_v \longrightarrow \mathbb{R}$ es suryectiva. Si tomamos $\rho : I \longrightarrow TM$ curva integral de N tal que $\rho(0) = v$, $\dot{\rho}(0) = N(v)$
se tiene

$$F_{*_v}(N(v)) = F_{*_v}(\dot{\rho}(0)) = F_{*_v}(\rho_{*_0}(D|_0)) = (F \circ \rho)_{*_0}(D|_0) = (F \dot{\circ} \rho)(0)$$

Si $c = \Pi \circ \rho : I \longrightarrow M$, ρ es un campo a lo largo de c. Como $(F \circ \rho)(t) = g(\rho(t), \rho(t)) =< \rho(t), \rho(t) >$, y la conexión es compatible con la métrica entonces

$$(F \dot{\circ} \rho)(0) = 2 < \nabla_D \rho, \rho > |_0 = 2 < \rho(0), \rho(0) >= 2 < v, v >= 2$$

□

De la proposición anterior y del teorema 2.2 se tiene el siguiente corolario:

Corolario 2.6 *T_1M es una subvariedad sumergida de TM de dimensión 2n-1.*

Observación 2.7 *Como T_1M es una subvariedad sumergida de TM*
$i : T_1M \longrightarrow TM$, i la inclusión, es una sumersión, luego $i_{*_v} : (T_1M) \longrightarrow (TM)_v$ es inyectiva.
En lo que sigue identificaremos $(T_1M)_v$ con $i_{*_v}((T_1M)_v) \subset (TM)_v$

Definición 2.8 *Sean (M, g) y ∇ como antes, llamamos* ***métrica de Sasaki*** *a la métrica sobre TM:*

$$< \, , \, >: \chi(TM) \times \chi(TM) \longrightarrow F(TM)$$

dado por

$$< X,\ Y >_v = < \Pi_{*_v}(X(v)), \Pi_{*_v}(Y(v)) >_{\Pi(v)} + < K_v(X(v)), K_v(Y(v)) >_{\Pi(v)}$$

Proposición 2.9 *Sea* $v \in\ T_1M$ *y* N *el campo sobre* TM*, definido por* $N(u) = (\Pi_{*_u} \times K_u)^{-1}(0, u)$ *para* $u \in\ TM$*, entonces*

a) $< N(v), N(v) >= 1$

b) $N(v) \perp (T_1M)_v$

respecto de la métrica de Sasaki.

Demostración :

a)

$< N(v), N(v) >=< \Pi_{*_v}(N(v)), \Pi_{*_v}(Y(v)) >_{\Pi(v)} + < K_v(N(v)), K_v(N(v)) >_{\Pi(v)}=$
$= 0+ < v, v >= 0 + 1 = 1$.

b) Sea $b \in\ (T_1M)_v$,

$$< N(v), i_{*_v}(b) >=< \Pi_{*_v}(N(v)), \Pi_{*_v}(i_{*_v}(b)) > + < v, K_v(i_{*_v}(b) >=< v, K_v(i_{*_v}(b)) >$$

Recordamos que si Q es un variedad diferenciable, $f : Q \longrightarrow M$, es diferenciable, $B \in\ \chi(Q)$; $X,\ Y \in\ \chi_f$ entonces (propiedad 10 de la derivación covariante a lo largo de f , capítulo 1)

$$B(< X, Y >) =< \nabla_B X, Y > + < X, \nabla_B Y >$$

donde $\nabla_B X = K \circ X_* \circ B$

Aplicando el resultado anterior para $Q = T_1M$, $f = \Pi : T_1M \longrightarrow M$ y $X = i : T_1M \longrightarrow TM$, entonces $K_v(i_{*_v}(b)) = \nabla_b i$ y

$$< v, K_v(i_{*_v}(b)) >=< i(v), \nabla_b i >= \frac{1}{2} b(< i, i >) = \frac{1}{2} b(1) = 0$$

con lo cual $< N(v), i_{*_v}(b) >= 0$, $N(v) \perp (T_1M)_v$.

□

De acuerdo con la proposición anterior podemos identificar $(T_1M)_v$ con el subespacio de $(TM)_v$ normal a N(v) con respecto a la métrica de Sasaki. También tenemos otra forma de interpretar los campos tangentes del fibrado unitario tangente.

Si $X \in \chi(T_1M)$, habiendo identificado $(T_1M)_v$ *con* $i_{*_v}((T_1M)_v)$ y dado que

$X(v) \perp N(v) \Longleftrightarrow < K_v(X(v)), v >_{\Pi(v)} = 0$

decimos que $X \in \chi(T_1M)$ si cumple:

1)$X : T_1M \longrightarrow TTM$ diferenciable

2)$X(v) \in (TM)_v$

3)$< K_v(X(v)), v >_{\Pi(v)} = 0$

Sea $L(M) : \{(p, v_1, \ldots, v_n)$ *donde* $p \in M$ *y* $v_1, \ldots, v_n$ *base de* $TM_p\}$ el fibrado de bases de M.

L(M) es una variedad diferenciable de dimensión $n + n^2$, donde la estructura está generada por el atlas inducido por las cartas de M. Si (U,x) es una carta de M definimos $(\tilde{U}, \tilde{x})$

donde

$$\tilde{U} = \{(p, v_1, \ldots, v_n) : \ p \in U \ y \ (v_1, \ldots, v_n) \ base \ de \ M_p\}$$

y

$$\tilde{x}(p, v_1, \ldots, v_n) = (x(p), v_1(x^1), \ldots, v_1(x^n), \ldots, v_n(x^1), \ldots, v_n(x^n))$$

Observación 2.10 *Sea* $\Pi_j : L(M) \longrightarrow TM$ *dada por* $\Pi_j(p, v_1, \ldots, v_n) = v_j$*.*
Tomando (U,x) carta de M y las inducidas $(TU, \bar{x})$ *y* $(\tilde{U}, \tilde{x})$ *tenemos*

$$\bar{x} \circ \Pi_j \circ \tilde{x}^{-1}(a_1, \ldots, a_n, b_1^1, \ldots, b_1^n, \ldots, b_n^1, \ldots, b_n^n) = (a_1, \ldots, a_n, b_j^1, \ldots, b_j^n)$$

donde $(a_1, \ldots, a_n, b_1^1, \ldots, b_1^n, \ldots, b_n^1, \ldots, b_n^n) \in \tilde{x}(\tilde{U})$*.*
por lo tanto Π_j *es diferenciable.*

Proposición 2.11 *Sea* $O(M) : \{(p, u_1, \ldots, u_n) \ : \ p \in M \ y \ (u_1, \ldots, u_n)$ *base ortonormal de* $M_p\}$ *que llamamos fibrado ortonormal de bases.*
$O(M)$ *es una variedad sumergida de L(M) de dimensión* $n + \frac{n(n-1)}{2}$

Demostración: Consideramos $F : L(M) \longrightarrow S$, donde S es la variedad de las matrices simétricas de $\mathbb{R}^{n\times n}$, cuya dimensión es $\frac{n(n+1)}{2}$

$$F(p, v_1, \ldots, v_n) = (a_{ij}),\ tal\ que\ a_{ij} =< v_i, v_j >_p$$

Afirmamos que I, la matriz identidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$, es un valor regular de F. Si vieramos esto, como $O(M) = F^{-1}(I)$ por el teorema 2.2 se prueba la proposición.

Entonces veamos que I es un valor regular.

Sea $(p, u) = (p, u_1, \ldots, u_n) \in\ F^{-1}(I)$ hay que probar que $F_{*_{(p,u)}} : (L(M))_{(p,u)} \longrightarrow S_I$ es suryectiva.

Dados $1 \leq i < j \leq n$ definimos $c^{ij} : J \longrightarrow L(M)$, J entorno de cero

$$c^{ij} = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$$

$c_0(t) \quad = p \quad constante$

$c_1(t) \quad = u_1 \qquad$ "

$\vdots$

$c_{i-1}(t) = u_{i-1} \qquad$ "

$c_i(t) \quad = u_i + tu_j$

$c_{i+1}(t) = u_{i+1} \quad constante$

$\vdots$

$c_n(t) \quad = u_n \qquad$ "

$F(c^{ij}) = I + tE^{ij} \quad donde \quad E^{ij} \in\ S,\ (E^{ij})_{ij} = 1 = (E^{ij})_{ji}$ y cero en las demás entradas .

$$F(c^{ji})(D|_0)(x^{kl}) = \{1\ si\ (k,l) = (i,j)\ y\ 0\ si\ (k,l) \neq (i,j)\} \quad (A)$$

$Si\ i = j\ tomamos\ entonces\ c^{ii} = (c_0, c_1, \ldots, c_n) :$

$c_0(t) \quad = p \quad constante$

$c_1(t) \quad = u_1 \qquad$ "

$\vdots$

$c_{i-1}(t) = u_{i-1} \quad constante$

$c_i(t) \quad = \sqrt[2]{t+1}u_i$

$c_{i+1}(t) = u_{i+1}$ *constante*

$\vdots$

$c_n(t) \;\; = u_n$ ”

$F(c^{ij}) = I + tE^{ii}$ *donde* $E^{ii} \in S,\ (E^{ii})_{ii} = 1$ y cero en las demás entradas .

$$F(c^{ii})(D|_0)(x^{kl}) = \{1\ si\ (k,l) = (i,i)\ y\ 0\ si\ (k,l) \neq (i,i)\} \quad (B)$$

por (A) y (B) se tiene que $\partial x^{ij}|_I$ *para* $1 \leq i \leq j \leq n$ están en la imagen de $F_{*_{(p,u)}}$, por lo tanto es suryectiva.

$\square$

Si $(p,u) \in O(M)$ *donde* $u = (u_1, \ldots, u_n)$ definimos:

$$H_i(p,u) = (\Pi_{*_{u_n}} \times K_{u_n})^{-1}(u_i, 0_p) \ \in \ (TM)^h_{u_n} \ 1 \leq i \leq n$$

$$V_j(p,u) = (\Pi_{*_{u_n}} \times K_{u_n})^{-1}(0_p, u_j) \ \in \ (TM)^v_{u_n} \ 1 \leq j \leq n-1$$

Observación 2.12 $H_i(p,u) \perp N(u_n)$ $1 \leq\ i \leq\ n$ *y* $V_j(p,u) \perp N(u_n)$ $1 \leq j \leq n-1$,*en la métrica de Sasaki, con lo cual* $\{H_i(p,u)\}$ *y* $\{V_j(p,u)\}$ *están en* $(T_1M)_{u_n}$.

$$< H_i(p,u), N(u_n) >=< u_i, 0 >_{\Pi(u_n)} + < 0, u_n >_{\Pi(u_n)} = 0$$

$$< V_j(p,u), N(u_n) >=< 0, 0 >_{\Pi(u_n)} + < u_j, u_n >_{\Pi(u_n)} = 0$$

.

Además $\{H_i,\ V_j\},\ 1 \leq\ i \leq\ 1 \leq j \leq n-1$, *es una base ortonormal de* $(T_1M)_{u_n}$

$$< H_i(p,u), H_j(p,u) >=< u_i, u_j >_{\Pi(u_n)} + < 0, 0 >_{\Pi(u_n)} = \delta_{ij}$$

$$< H_i(p,u), V_j(p,u) >=< u_i, 0 >_{\Pi(u_n)} + < 0, u_j >_{\Pi(u_n)} = 0$$

$$< V_i(p,u), V_j(p,u) >=< 0, 0 >_{\Pi(u_n)} + < u_i, u_j >_{\Pi(u_n)} = \delta_{ij}$$

Proposición 2.13 *$H_i : O(M) \longrightarrow T(T_1M)$ y $V_j : O(M) \longrightarrow T(T_1M)$ son diferenciables.*

Demostración: Sean $\tilde{H}_i, \tilde{V}_j : L(M) \longrightarrow TTM$ *para* $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n-1$ definidas por:

$$\tilde{H}_i(p,v) = (\Pi_{v_n} \times K_{v_n})_{-1}(v_i, 0) \in \ (TM)_{v_n}$$

$$\tilde{V}_j(p,v) = (\Pi_{v_n} \times K_{v_n})_{-1}(0, v_j) \in \ (TM)_{v_n}$$

donde $v = (v_1, \ldots, v_n)$ base de M_p.
Si $i : O(M) \longrightarrow L(M)$ es la inclusión,

$$H_l = \tilde{H}_l \circ i \ \ si\ 1 \leq i \leq n, \quad V_j = \tilde{V}_j \circ i\ si\ \ 1 \leq j \leq n-1.$$

Si se muestra que $\tilde{H}_l$, $\tilde{V}_j$ son diferenciables, por ser $i \in\ C^\infty$ pues O(M) es una subvariedad sumergida de L(M), resulta que H_i, V_j son diferenciables.
Si $p \in\ (U,x)$ carta de M, donde $X_i = \partial x^i$ *y* $(TU, \bar{x})$ la carta inducida sobre el fibrado tangente por (U,x) *y* $A_i = \partial \bar{x}^i$.
Luego localmente:

$$\tilde{H}_i = \sum_{l=1}^{n} \bar{x}^{n+l}(\Pi_i(p,v)) Z_l(p,v)$$

donde

$$Z_l(p,v) = A_l(\Pi_n(p,v)) - \sum_{kj}^{n} \bar{x}^{n+j}(\Pi_n(p,v))\Gamma_{lj}^k(\Pi(\Pi_n(p,v)))A_{n+k}(\Pi_n(p,v))$$

y Π_i $1 \leq i \leq n$ son las aplicaciones diferenciables de la observación 2.10 ,
por lo tanto se tiene $\tilde{H}_i$ son diferenciables.
La expresión local de $\tilde{V}_j$:

$$\tilde{V}_j(p,v) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^{n+i}(\Pi_j(p,v))A_{n+i}(\Pi_n(p,v))$$

con lo cual $\tilde{V}_j$ es diferenciable .

□

Proposición 2.14 *Si* $\psi : O(M) \longrightarrow T_1M$ *definida por* $\psi(p,u) = u_n$ *para* $u = (u_1, \ldots, u_n)$ *entonces* ψ *es una submersión .*

Demostración: ψ es diferenciable por que $\psi = \Pi_n \circ i$ donde Π_n es la de la observación 2.10, que es diferenciable, e i es la inclusión de $O(M)$ en $L(M)$ que también lo es. ψ es suryectiva y nos resta ver que dado $(p,u) = (p, u_1, \ldots, u_n) \in O(M)$

$$\psi_{*_{(p,u)}} : O(M)_{(p,u)} \longrightarrow (T_1M)_{u_n} \ \ es\ suryectiva$$

Para ver esto bastaría ver que dado $b \in (T_1M)_{u_n}$ $\exists\ c : I \longrightarrow O(M)$ *tal que* $c(0) = (p,u)$ *y* $(\psi \dot{\circ} c)(0) = b$.

Buscamos $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$ de modo que:

1) $c_0 : I \longrightarrow M$ y $c_i : I \longrightarrow T_1M$ para $1 \leq i \leq n$, donde I es un entorno del origen.

2) $c_0(0) = p$ *y* $c_i(0) = u_i$

3) $\Pi \circ c_i(t) = c_0(t)$ para $1 \leq i \leq n$

4) $< c_i(t), c_j(t) >= \delta_{ij}\ \ \forall\ t \in\ I$

5) $\dot{c_n}(0) = b$, pues $\psi \circ c = c_n$

Sea $\alpha_n : I \longrightarrow T_1M$ tal que $\alpha_n(0) = u_n$ *y* $\dot{\alpha}_n(0) = b$

Tomamos $c_0 = \Pi \circ \alpha_n(t)$

Elegimos $\alpha_i : I \longrightarrow TM$ para $1 \leq i \leq n-1$ campos paralelos a lo largo de c_0 (Esto es, $\Pi \circ \alpha_i = c_0$ *y* $\nabla_{D|_t}\alpha_i = 0$) tal que $\alpha_i(0) = u_i$.

Ahora como la conexión es compatible con la métrica, entonces $< \alpha_i(t), \alpha_j(t) >$: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ es constante y como $< \alpha_i(0), \alpha_j(0) >= \delta_{ij}$ se tiene que

$$\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t) \ es\ un\ conjunto\ ortonormal\ de\ M_{c_0(t)}$$

Lo que queremos ver es que existe un intervalo I alrededor de cero tal que $\{\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)\}$ son linealmente independientes en $M_{c_0(t)}$ para todo $t \in\ I$. Supongamos que no: entonces $\exists\ t_m \xrightarrow{m} 0$ *y* $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$ *no todos ceros para cada* m , de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \alpha_i(t_m) = 0$$

$\lambda_n^m \neq 0\ \forall\ m$ pues $\{\alpha_1(t_m), \ldots, \alpha_{n-1}(t_m)\}$ es conjunto ortonormal de $M_{c_0(t_m)}$

$$\alpha_n(t_m) = (\frac{-\lambda_1^m}{\lambda_n^m})\alpha_1(t_m) + \ldots + (\frac{-\lambda_{n-1}^m}{\lambda_n^m})\alpha_{n-1}(t_m) \ \ \forall \ m$$

Como $t_m \xrightarrow{m} 0 \ y \ < \alpha_i(0), \alpha_n(0) >= 0$ para $1 \leq i \leq n-1$ y teniendo en cuenta que $< \alpha_i(t_m), \alpha_n(t_m) >= (\frac{-\lambda_i^m}{\lambda_n^m})$ se tiene

$$\lim_{m \to +\infty} (\frac{-\lambda_i^m}{\lambda_n^m}) = 0$$

entonces

$$1 = \lim_{m \to +\infty} < \alpha_n(t_m), \alpha_n(t_m) >= \lim_{m \to +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} (\frac{-\lambda_i^m}{\lambda_n^m})^2 = 0, \ \ absurdo$$

Luego existe un intervalo I de $\mathbb{R}$ que contiene al cero de modo que $\{\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)\}$ son linealmente independientes $\forall \ t \in \ I$.

Ahora vamos a ortonormalizarlos para que c sea una curva en O(M).
Sean:

$$c_n(t) = \alpha_n(t)$$

$$c_i(t) = \frac{d_i(t)}{\|d_i(t)\|} \ para \ 1 \leq i \leq n-1$$

donde
$d_1(t) = \alpha_1(t) - < \alpha_1(t), c_n(t) > c_n(t)$ y $d_{i+1}(t) = \alpha_{i+1} \sum_{j=1}^{i} < \alpha_{i+1}(t), c_j(t) > c_j(t)$

Así obtenemos la curva que queríamos. Con lo cual ψ es una submersión.

□

Sea $O(n-1)$ el grupo ortonormal de matrices de $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. $O(n-1)$ actúa sobre O(M) de la siguiente manera:

Si $a \in \ O(n-1), \ \ a = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_{n-1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$

Sea $R_a : O(M) \longrightarrow O(M)$ definida por $R_a(p,u) = (p, ua)$, $ua = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$, donde $\bar{u}_j = \sum_{i=1}^{n-1} a_j^i u_i \ \ para \ 1 \leq j \leq n-1$ y $\ \bar{u}_n = u_n$.

Proposición 2.15 *$R_a : O(M) \longrightarrow O(M)$ es un difeomorfismo.*

Demostración: Sea $\tilde{R}_a : L(M) \longrightarrow L(M)$ dada por

$$\tilde{R}_a(p, v) = (p, \sum_{i=1}^{n-1} a_1^i v_i, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1}^i v_i, v_n)$$

.

vamos a ver que $\tilde{R}_a$ es diferenciable.
Sea $p \in \ (U, x)$ carta de M y $(\tilde{U}, \tilde{x})$ la carta de L(M) inducida por (U,x) ya mencionada antes.
Si $(z_1, \dots, z_n, b_1^1, \dots, b_1^n, \dots, b_n^1, \dots, b_n^n) \in \ \tilde{x}(\tilde{U})$
se tiene

$$\tilde{x} \circ \tilde{R}_a \circ \tilde{x}^{-1}((z_1, \dots, z_n, b_1^1, \dots, b_1^n, \dots, b_n^1, \dots, b_n^n)) =$$

$$= (z_1, \dots, z_n, \sum_{i=1}^{n-1} a_1^i b_i^1, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} a_1^i b_i^n, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1}^i b_i^1, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1}^i b_i^n, b_n^1, \dots, b_n^n)$$

por lo tanto $\tilde{R}_a$ es diferenciable. Como $R_a = \tilde{R}_a \circ i$ donde i es la inclusión de O(M) en L(M), tenemos que R_a es diferenciable.
Dado que $(ua)a^t = u$ implica que $R_{a^t} = (R_a)^{-1}$, resulta R_a un difeomorfismo.

□

Observación 2.16 $\psi \circ R_a = \psi \ \ \forall \ a \in \ O(n-1)$

Ahora veamos como los campos en T_1M inducen aplicaciones diferenciables de O(M) en $\mathbb{R}^{2n-1}$.
Sea $X \in \ \chi(T_1M)$, si $(p, u) \in \ T_1M$ entonces $X \circ \psi(p, u) \in \ (T_1M)_{u_n}$
Como $\{H_1(p, u), \dots, H_n(p, u), V_1(p, u), \dots, V_{n-1}(p, u)\}$ es una base ortonormal de $(T_1M)_{u_n}$ resulta:

$$X \circ \psi(p, u) = \sum_{i=1}^{n} x^i(p, u) H_i(p, u) + \sum_{j=1}^{n-1} x^{n+j}(p, u) V_j(p, u)$$

donde

$$x^i(p,u) =< X \circ \psi(p,u), H_i(p,u) >=< \Pi_{*_{u_n}}(X(\psi(p,u))), u_i >_p \quad 1 \leq i \leq n \quad \textbf{(I)}$$

$$x^{n+j}(p,u) =< X \circ \psi(p,u), V_j(p,u) >=< K_{u_n}(X(\psi(p,u))), u_j >_p \quad 1 \leq j \leq n-1 \quad \textbf{(II)}$$

Luego los $x^i : O(M) \longrightarrow \mathbb{R} \;\; 1 \leq i \leq 2n-1$ son diferenciables.
Dado $X \in \chi(T_1M)$ definimos la aplicación diferenciable ${}^{\nabla}X : O(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$

$${}^{\nabla}X(p,u) = (x^1(p,u), \ldots, x^n(p,u), x^{n+1}(p,u), \ldots, x^{2n-1}(p,u))$$

Proposición 2.17 *Si* $X \in \chi(T_1M)$ *y* $a \in O(n-1)$ *entonces*

$${}^{\nabla}X \circ R_a = {}^{\nabla}X.M(a)$$

donde $M(a) = \begin{pmatrix} M_1(a) & M_2(a) \\ M_4(a) & M_3(a) \end{pmatrix} \in R^{(2n-1)\times(2n-1)}$

con $M_1(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M_2(a) = 0 \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$, $M_3(a) = a \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$,
$M_4(a) = 0 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$

Demostración: Si $(p,u) \in O(M)$ *y* $a \in O(n-1)$, *es* $R_a(p,u) = (p,\bar{u})$ donde $\bar{u}_n = u_n$ *y* $\bar{u}_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_i^j u_j$. Teniendo en cuenta que $\psi \circ R_a = \psi$, resulta

$$x^i \circ R_a(p,u) = x^i(p,\bar{u}) =< \Pi_{*_{\bar{u}_n}}(X(\psi(p,\bar{u})), \bar{u}_i >=< \Pi_{*_{u_n}}(X(\psi(p,u)), \bar{u}_i >$$

para $1 \leq i \leq n$, y

$$x^{n+j} \circ R_a(p,u) = x^{n+j}(p,\bar{u}) =< K_{\bar{u}_n}(X(\psi(p,\bar{u})), \bar{u}_j >=< K_{u_n}(X(\psi(p,u)), \bar{u}_j >$$

para $1 \leq j \leq n-1$
Luego,
$x^i \circ R_a(p,u) = \sum_{l=1}^{n-1} a_i^l x^l(p,u)$ *si* $1 \leq i \leq n-1$

$x^n \circ R_a(p,u) = x^n(p,u)$
$x^{n+j} \circ R_a(p,u) = \sum_{l=1}^{n-1} a_j^l x^{n+l}(p,u)$ *si* $1 \leq j \leq n-1$

En consecuencia, ${}^{\nabla}X \circ R_a(p,u) = {}^{\nabla} X(p,u).M(a)$

$\square$

Como vimos antes, los campos en T_1M inducen aplicaciones de O(M) en $\mathbb{R}^{2n-1}$. Ahora veremos como los tensores tipo (0,2) sobre T_1M inducen aplicaciones diferenciables de O(M) en $\mathbb{R}^{(2n-1)\times(2n-1)}$, que nos permitirán caracterizarlos.

Sea $G : \chi(T_1M) \times \chi(T_1M) \longrightarrow F(T_1M)$ un tensor tipo (0,2) sobre T_1M.
Si $v \in T_1M$ y $X, Y \in \chi(T_1M)$ es $G(X,Y)(v) = G_v(X(v), Y(v))$;
y tenemos que $G_v : (T_1M)_v \times (T_1M)_v \longrightarrow \mathbb{R}$ *es bilineal*
Si $(p,u) \in O(M)$, *con* $\psi(p,u) = v$ definimos

${}^{\nabla}G(p,u) \in \mathbb{R}^{(2n-1)\times(2n-1)}$ *como la matriz de* G_v
respecto de la base $\{H_1(p,u), \ldots, H_n(p,u), V_1(p,u), \ldots, V_{n-1}(p,u)\}$ *de* $(T_1M)_v$

Luego ${}^{\nabla}G : O(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{(2n-1)\times(2n-1)}$ es diferenciable.

Por construcción se cumple

$$G(X,Y) \circ \psi = {}^{\nabla} X . {}^{\nabla}G. \, ({}^{\nabla}Y)^t$$

pues si

$$X \circ \psi(p,u) = \sum_{i=1}^{n} x^i(p,u) H_i(p,u) + \sum_{j=1}^{n-1} x^{n+j}(p,u) V_j(p,u)$$

e

$$Y \circ \psi(p,u) = \sum_{i=1}^{n} y^i(p,u) H_i(p,u) + \sum_{j=1}^{n-1} y^{n+j}(p,u) V_j(p,u)$$

entonces

$$G(X,Y) \circ \psi(p,u) = G_{\psi(p,u)}(X \circ \psi(p,u), Y \circ \psi(p,u)) = \sum_{i,l=1}^{2n-1} x^i(p,u) y^l(p,u) ({}^{\nabla}G(p,u))_{il}$$

Es decir, $G(X,Y) \circ \psi(p,u) = {}^{\nabla} X(p,u) . {}^{\nabla}G(p,u) . ({}^{\nabla}Y(p,u))^t$

Proposición 2.18 *Si G es un tensor tipo (0,2) sobre* T_1M *y* $a \in O(n-1)$*, entonces*

$$^{\nabla}G \circ R_a = M^t(a).^{\nabla}G.M(a)$$

donde M(a) es la de la proposición 2.17 y $M(a)^t$ *es su transpuesta.*

Demostración: Como $G(X,Y) \circ \psi =^{\nabla} X.^{\nabla}G.\ (^{\nabla}Y)^t$; $^{\nabla}X \circ R_a =^{\nabla} X.M(a)$ y $\psi \circ R_a = \psi$, resulta:

$$^{\nabla}X.^{\nabla}G.(^{\nabla}Y)^t = G(X,Y) \circ \psi \circ R_a =^{\nabla} X \circ R_a.^{\nabla}G \circ R_a.(^{\nabla}Y \circ R_a)^t =$$

$$=^{\nabla} .M(a).^{\nabla}G \circ R_a.M(a)^t.(^{\nabla}Y)^t$$

Como la igualdad vale para todo $X, Y \in \chi(T_1M)$, se obtiene

$^{\nabla}G = M(a).^{\nabla}G \circ R_a.M(a)^t$ o equivalentemente $^{\nabla}G \circ R_a = M(a)^t.^{\nabla}G.M(a)$

□

Esto nos dice que dado G podemos asociarle una matriz diferenciable $G \longrightarrow^{\nabla} G$ que cumple:
$^{\nabla}G \circ R_a = M(a)^t.^{\nabla}G.M(a)$ y $G(X,Y) \circ \psi =^{\nabla} X.^{\nabla}G.\ (^{\nabla}Y)^t$.
La siguiente proposición muestra que la recíproca es cierta, o sea la asignación es bíunivoca.

Proposición 2.19 *Sea* $T : O(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{(2n-1)\times(2n-1)}$ *una función diferenciable tal que* $T \circ R_a = M(a)^t.T.M(a) \quad \forall\ a \in O(n-1)$
Entonces existe un único tensor $G : \chi(T_1M) \times \chi(T_1M) \longrightarrow F(T_1M)$ *que cumple* $^{\nabla}G = T$ *.*

Demostración: Sea $v \in T_1M$ $\Pi(v) = p$ *e* $X, Y \in \chi(T_1M)$ definimos

$$G(X,Y)(v) =^{\nabla} X(p,u).T(p,u).(^{\nabla}Y(p,u))^t$$

donde $(p,u) \in O(M)$ *y* $u = (u_1, \ldots, u_{n-1}, v)$
veamos que está bien definido.

Si $(p, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}, v) \in O(M)$, existe $a \in O(n-1)$ tal que $R_a(p, u_1, \dots, u_{n-1}, v) = (p, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}, v)$
entonces

$$^{\nabla}X(p,\bar{u}).T(p,\bar{u}).(^{\nabla}Y(p,\bar{u}))^t =^{\nabla} X \circ R_a(p,u).T \circ R_a(p,u).(^{\nabla}Y \circ R_a(p,u))^t =$$

$$=^{\nabla} X(p,u).M(a).T \circ R_a(p,u).(M(a))^t(^{\nabla}Y(p,u))^t$$

Como $T \circ R_a = M(a)^t.T.M(a)$ se tiene

$$^{\nabla}X(p,\bar{u}).T(p,\bar{u}).(^{\nabla}Y(p,\bar{u}))^t =^{\nabla} X(p,u).T(p,u).(^{\nabla}Y(p,u))^t$$

y por lo tanto está bien definida

Ahora hay que ver que G resulta un tensor. Es claro que es F(M)-bilineal, pues si $X,\ Y \in \chi(T_1M)\ y\ f \in F(T_1M) es:$

$$^{\nabla}(X+Y) =^{\nabla} X +^{\nabla} Y, \quad ^{\nabla}(f.X) = f.^{\nabla}X$$

Falta ver que $G : \chi(T_1M) \times \chi(T_1M) \longrightarrow F(T_1M)$; Sea $X, Y \in \chi(T_1M)$; luego $G(X,Y) : T_1M \longrightarrow \mathbb{R}$ y

$$G(X,Y) \circ \psi(p,u) =^{\nabla} X(p,u).T(p,u).(^{\nabla}Y(p,u))^t$$

por lo tanto $G(X,Y) \circ \psi$ es diferenciable. Por el teorema 2.3, es $G(X,Y) : T_1M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable pues $\psi : O(M) \longrightarrow T_1M$ es una submersión.
Luego G es un tensor tipo (0,2) que cumple $^{\nabla}G = T$ y por construcción resulta único.

□

Definición 2.20 *Sea $G : \chi(T_1M) \times \chi(T_1M) \longrightarrow F(T_1M)$ un tensor tipo (0,2) sobre T_1M. G es **natural** si $^{\nabla}G : O(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{(2n-1)\times(2n-1)}$ depende solo de $p \in M$.*

La siguiente proposición nos da una caracterización de los tensores naturales tipo (0,2) en fibrado unitario tangente.

Proposición 2.21 *G es natural sii existen funciones* $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$
$1 \leq i \leq 5$ *diferenciables, de modo que*

$$^{\nabla}G(p) = \begin{pmatrix} f_1(p)I & 0^t & f_2(p)I \\ 0 & f_5(p) & 0 \\ f_4(p)I & 0^t & f_3(p)I \end{pmatrix}$$

donde $I \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, $0 \in \mathbb{R}^{1\times(n-1)}$

Demostración: Consideramos las siguientes submatrices de $^{\nabla}G$

$$^{\nabla}G = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_4 & A_3 \end{pmatrix}$$

donde $A_1 : O(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_2 : O(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$, $A_3 : O(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$,
$A_4 : O(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$
$A_1 = \begin{pmatrix} B_1 & C_1^t \\ C_2 & C \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} B_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$, $A_3 = B_3$, $A_4 = \begin{pmatrix} B_4 & C_4^t \end{pmatrix}$
$B_i : O(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, *para* $1 \leq i \leq 4$ $C_i : O(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{1\times(n-1)}$ *y*
$C : O(M) \longrightarrow \mathbb{R}$
Como G es natural,

$$^{\nabla}G = ^{\nabla}G \circ R_a = M(a)^t . ^{\nabla}G . M(a) \ \ \forall \ a \in O(n-1)$$

y $B_i(p,u) = B_i(p)$ *si* $i = 1,2,3,4$ $C_i(p,u) = C_i(p)$ *si* $i = 1,2,3,4$ *y* $C(p,u) = C(p)$
entonces se tiene
1)$a^t.B_i.a = B_i$ *para* $1 \leq i \leq 4$ $\forall \ a \in O(n-1)$
2)$a^t.C_1^t = C_1$ $\forall \ a \in O(n-1)$
3)$a^t.C_4^t = C_4$ $\forall \ a \in O(n-1)$
4)$C_2.a = C_2$ $\forall \ a \in O(n-1)$
5)$C_3.a = C_3$ $\forall \ a \in O(n-1)$
Esto implica que $B_i(p) = f_i(p)I$ *para* $1 \leq i \leq 4$ *y* $C(p) = f_5(p)$, donde $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$
$i = 1,2,3,4,5$ diferenciables pues $^{\nabla}G$ lo es,y los $C_i = 0$
Con respecto a la recíproca. Si tenemos una matriz como la del enunciado, definiendo G como en la proposición 2.19, tenemos que G es un tensor natural.

□

Corolario 2.22 *Sea X e $Y \in \chi(T_1M)$. Los descomponemos en sus componentes verticales y horizontales ,o sea $X^h(u) \in (TM)^h_u$ y $X^v(u) \in (TM)^v_u$,$X = X^h + X^v$ e $Y = Y^h + Y^v$. G es natural sii existen $g_i \in F(M)$ $i = 1,2,3,4,5$ tales que si $v \in T_1M$, $\Pi(v) = p$ se cumple:*

$$\begin{aligned} &1)\ G(X^h,Y^h)(v) = g_1(p) < \Pi_{*_v}(X(v)), \Pi_{*_v}(Y(v)) >_p + \\ &\qquad\qquad + g_5(p) < \Pi_{*_v}(X(v)), v >_p < \Pi_{*_v}(Y(v)), v >_p \\ &2)\ G(X^h,Y^v)(v) = g_2(p) < \Pi_{*_v}(X(v)), K_v(Y(v)) >_p \\ &3)\ G(X^v,Y^v)(v) = g_3(p) < K_v(X(v)), K_v(Y(v)) >_p \\ &4)\ G(X^v,Y^h)(v) = g_4(p) < K_v(X(v)), \Pi_{*_v}(Y(v)) >_p \end{aligned}$$

siendo $g_1 = f_1$, $g_2 = f_2$, $g_3 = f_3$, $g_4 = f_4$, $g_5 = f_5 - f_1$, donde las f_i son las de la proposición anterior.

Demostración: Como G es natural, es $^{\nabla}G = \begin{pmatrix} f_1 I & 0^t & f_2 I \\ 0 & f_5 & 0 \\ f_4 I & 0^t & f_3 I \end{pmatrix}$

Si $^{\nabla}X = (x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^{2n-1})$,

es $^{\nabla}(X^h) = (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$ y $^{\nabla}(X^v) = (0, \ldots, 0, x^{n+1}, \ldots, x^{2n-1})$.

Luego,

$$G(X^h,Y^h) = (\, x^1, \ldots, x^n \,) \, . \begin{pmatrix} f_1 I & 0 \\ 0 & f_5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = f_1.(\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} x^i.y^i) + x^n y^n f_5$$

$$G(X^h,Y^v) = (\, x^1, \ldots, x^n \,) \, . \begin{pmatrix} f_2 I \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y^{n+1} \\ \vdots \\ y^{2n-1} \end{pmatrix} = f_2.(\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} x^i.y^{n+i})$$

$$G(X^v,Y^h) = (\, x^{n+1}, \ldots, x^{2n-1} \,) \, . (\, f_4 I \quad 0 \,) \, . \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = f_4.(\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} x^{n+i}.y^i)$$

$$G(X^v,Y^v) = (\, x^{n+1}, \ldots, x^{2n-1} \,) \, . (\, f_3 I \,) \begin{pmatrix} y^{n+1} \\ \vdots \\ y^{2n-1} \end{pmatrix} = f_3.(\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} x^{n+i}.y^{n+i})$$

Como ya vimos

$$x^i(p,u) = < \Pi_{*_{u_n}}(X(\psi(p,u))), u_i >_p \quad 1 \le i \le n$$

$$x^{n+j}(p,u) =< K_{u_n}(X(\psi(p,u))), u_j >_p \quad 1 \leq j \leq n-1$$

entonces reemplazando en las igualdades anteriores se tiene lo que queríamos probar. Ahora si tenemos un tensor G y $g_i \ i = 1,2,3,4,5$ que cumplen lo indicado en el corolario, entonces ${}^{\nabla}G = \begin{pmatrix} g_1 I & 0^t & g_2 I \\ 0 & g_5 + g_1 & 0 \\ g_4 I & 0^t & g_3 I \end{pmatrix}$, $I \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$,con lo cual G es natural.

□

Nota: En [4] se muestra que hay una relación biunívoca entre los tensores tipo (0,2) sobre el fibrado tangente y las matrices $T : N \longrightarrow \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ *diferenciables*, donde :

- $N = O(M) \times \mathbb{R}^n$ tal que
- $T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_4 & A_3 \end{pmatrix}$ con $A_i : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ siendo

$a^t.A_i(p,u,\xi).a = A_i \circ R_a(p,u,\xi) \ \forall \ a \in \ O(n-1)$

- $R_a(p,u,\xi) = (p, ua, \xi a), \ ua = \{\sum_{i=1}^n a_1^i u_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_n^i u_i\}$;

$\xi a = \{\sum_{i=1}^n a_1^i \xi^i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_n^i \xi^i\}$.

La aplicación biunívoca $G \longrightarrow^{\nabla} G = T$, se obtiene del siguiente modo:

Sea $(p,u,\xi) \in \ O(M) \ y \ \psi(p,u,\xi) = \sum_{i=1}^n \xi^i u_i = v$. Definiendo

$$e_i(p,u,\xi) = (\Pi_{*_v} \times K_v)^{-1}(u_i, 0_p)$$

$$e_{n+i}(p,u,\xi) = (\Pi_{*_v} \times K_v)^{-1}(0_p, u_i)$$

para $1 \leq i \leq n$, es $\{e_i(p,u,\xi), e_{n+i}(p,u,\xi)\}_{i=1}^n$ una base de $(TM)_v$

${}^{\nabla}G(p,u,\xi)$ es la matriz de $G_{\psi(p,u,\xi)}$ en la base antes indicada

Se define G es natural si ${}^{\nabla}G$ depende sólo de ξ.

Por el lema de caracterización (3.1) de [4] se tiene que si ${}^{\nabla}G = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_4 & A_3 \end{pmatrix}$, es G natural sii

$$A_i(\xi) = \alpha_i(\|\xi\|^2)I + \beta_i(\|\xi\|^2).\xi^t.\xi$$

donde $\alpha_i, \ \beta_i \ : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \ i = 1,2,3,4$ diferenciables.

Obtenemos el siguiente corolario

Corolario 2.23 *Sea* $G : \chi(TM) \times \chi(TM) \longrightarrow F(TM)$ *un tensor natural sobre TM. Entonces* $\tilde{G} = i^*(G) : \chi(T_1M) \times \chi(T_1M) \longrightarrow F(T_1M)$ *es natural.*

Demostración :

$\bullet\ \tilde{G}(X^h, Y^h)(v) = \alpha_1(\|v\|^2) < \Pi_{*_v}(X(v)), \Pi_{*_v}(Y(v)) > +$

$+\beta_1(\|v\|^2) < \Pi_{*_v}(X(v)), v > . < \Pi_{*_v}(Y(v)), v >=$

$= \alpha_1(1) < \Pi_{*_v}(X(v)), \Pi_{*_v}(Y(v)) > + \beta_1(1) < \Pi_{*_v}(X(v)), v > . < \Pi_{*_v}(Y(v)), v >$

$\bullet\ \tilde{G}(X^h, Y^v)(v) = \alpha_2(1) < \Pi_{*_v}(X(v)), K_v(Y(v)) >$

pues $< K(Y(v)), v >= 0$ *si* $Y \in \ \chi(T_1M)$

$\bullet\ \tilde{G}(X^v, Y^h)(v) = \alpha_4(1) < K_v(X(v)), \Pi_{*_v}(Y(v)) >$

pues $< K(X(v)), v >= 0$

$\bullet \tilde{G}(X^v, Y^v)(v) = \alpha_3(1) < K_v(X(v)), K_v(Y(v)) >$

porque $< K(Y(v)), v >= 0 =< K(X(v)), v >$

Con las notaciones del corolario anterior, sean

$g_1(p) = \alpha_1(1)$

$g_2(p) = \alpha_2(1)$

$g_3(p) = \alpha_3(1)$

$g_4(p) = \alpha_4(1)$

$g_5(p) = \beta_1(1)$

Ahora, de acuerdo con las notaciones de la proposición 2.21

es

$$^{\nabla}\tilde{G}(p) = \begin{pmatrix} f_1(p)I & 0^t & f_2(p)I \\ 0 & f_5(p) & 0 \\ f_4(p)I & 0^t & f_3(p)I \end{pmatrix}$$

donde $f_1(p) = g_1(p) = \alpha_1(1)$, $f_2(p) = g_2(p) = \alpha_2(1)$, $f_3(p) = g_3(p) = \alpha_3(1)$, $f_4(p) = g_4(p) = \alpha_4(1)$, $f_5(p) = g_5(p) + f_1(p) = \beta_1(1) + \alpha_1(1)$ y por lo tanto $\tilde{G}$ es natural.

□

Observación 2.24 *El corolario anterior nos sugiere, que hay tensores naturales sobre* T_1M *que no son la restricción de un natural sobre* TM*.*

Observación 2.25 *Sea (M,g) una variedad riemanniana definimos $L : \chi_2^0(M) \longrightarrow \chi_2^0(TM)$*

$$L(G)(X,Y)(v) = G(\Pi_{*_v}(X(v)), \Pi_{*_v}(Y(v)))_{\Pi(v)} + G(K_v(X(v)), K_v(Y(v)))_{\Pi(v)}$$

Si $X, Y \in \chi(TM)$
Así tenemos una forma de levantar tensores de M a tensores sobre el fibrado tangente. Por ejemplo, si g es la métrica de M, L(g) es la métrica de Sasaki de TM. También tenemos $i^* : \chi_2^0(TM) \longrightarrow \chi_2^0(T_1M)$. Podríamos preguntarnos que caracteristicas debe tener $G \in \chi_2^0(M)$ para que $i^* \circ L(G)$ (respectivamente L(G)) sea natural en T_1M (respectivamente en TM).

Proposición 2.26 *$i^* \circ L(G)$ es natural sii $G = f.g$, donde $f \in F(M)$.*

Demostración: Si $(p,u) \in O(M)$
- $i^* \circ L(G)(\psi(p,u))(H_i(u), H_j(u)) = L(G)(\psi(p,u))(H_i(u), H_j(u)) = G(p)(u_i, u_j)$ $1 \leq i,j \leq n$.
- $i^* \circ L(G)(\psi(p,u))(H_i(u), V_j(u)) = 0 = i^* \circ L(G)(\psi(p,u))(V_j(u), H_i(u))$
- $i^* \circ L(G)(\psi(p,u))(V_j(u), V_l(u)) = G(p)(u_j, u_i)$ $1 \leq i,j \leq n-1$

De la proposición 2.21 se sigue
$i^* \circ L(G)$ es natural sii $G(p)(u_i, u_j) = G(p)(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = \delta_{ij} f(p),\ f \in F(M)$,
$\forall\ (p,u), (p,\bar{u}) \in O(M) \qquad (*)$
entonces si $i^* \circ L(G)$ es natural y $v, w \in M_p$ *y* $u_1, \ldots, u_n$ *base ortonormal de* M_p
$v = \sum_{i=1}^n v_i u_i$ y $w = \sum_{j=1}^n w_j u_j$
Luego $G(p)(v,w) = (\sum_{i=1}^n v_i w_i) f(p) = f(p) g(p)(v,w)$
La recíproca se deduce de $(*)$

□

Corolario 2.27 *L(G) es un tensor natural tipo (0,2) en $TM \iff G = \lambda g,\ \lambda \in \mathbb{R}$*

Demostración: Si L(G) es natural, por el corolario 2.23, $i^*(L(G))$ es natural. Teniendo en cuenta la proposición anterior, se ve que $G = fg$ con $f \in F(M)$, pero de la demostración del corolario 2.23 se deduce que $f \equiv \lambda \in \mathbb{R}$.
Con respecto a la recíproca, si $G = \lambda g \implies L(G) = \lambda L(g)$, entonces L(G) es un múltiplo de la métrica de Sasaki que es natural.

□

Para terminar el capítulo consideremos,para $R > 0$, el R-fibrado tangente $T_R M = \{v \in \ TM : \ \|v\| = R\}$. $T_R M$ al igual que $T_1 M$ es una subvariedad sumergida de TM de dimensión $2n-1$.

Sea $O_R(M) = \{(p, v_1, \ldots, v_n) : v_1, \ldots, v_n$ *base ortogonal de* M_p *y* $< v_i, v_j >= \delta_{ij} R^2\}$.

Se puede ver, al igual que en $T_1 M$, que los tensores tipo (0,2) sobre $T_R M$ están en relación biunívoca con las matrices diferenciables $T : O_R(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{(2n-1)\times(2n-1)}$ que cumplen $T \circ R_a = M(a)^t.T.M(a) \ \forall \ a \in \ O(n-1)$.

En forma análoga a $T_1 M$ se definen los tensores naturales sobre $T_R M$.

Estos se caracterizan de igual manera que en la proposición 2.21, dado para el caso del fibrado unitario tangente. También tenemos, en el caso del R-fibrado tangente , un corolario similar a 2.22, donde ahora $g_i = \frac{1}{R^2} f_i \ i = 1, 2, 3, 4 \ y \ g_5 = \frac{1}{R^2}(f_5 - f_1)$.

Para terminar, si $i^* : \chi_2^0(TM) \longrightarrow \chi_2^0(T_R M)$, $i^*(G)$ es natural en $T_R M$ si G lo es en el fibrado unitario tangente.

Capítulo 3

Tensores naturales tipo (0,2) en el espacio de geodésicas.

3.0.3 variedades simplécticas

Definición 3.1 *Sea N una variedad diferenciable de dimensión 2n y $\omega \in \Omega^2(N)$. El par (N,ω) se denomina una variedad simpléctica si :*

1) $d\omega = 0$

2) ω es no degenerada. Es decir, $\forall\ p \in N$ la aplicación bilineal $\omega_p : N_p \times N_p \longrightarrow \mathbb{R}$ es no degenerada ($\omega_p(v,u) = 0\ \forall\ u\ N_p \Longrightarrow v = 0$)

Ejemplo 3.2 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $N = T^*M$. Si $\Pi : T^*M \longrightarrow M$ es la proyección, sea ρ la 1-forma sobre T^*M definida por:*

$$\rho : \chi(T^*M) \longrightarrow F(T^*M)$$

$$\rho(X)(\omega) = \omega(\Pi_{*_\omega}(X(\omega))$$

Si $\gamma = -d\rho$, entonces (N,γ) es una variedad simpléctica.

Veamos la representación local de γ. Sea (U,x) una carta de M y (T^*U, y) la carta de T^*M inducida por (U,x).

Tenemos que $\rho = \sum_{i=1}^{2n} \rho(\partial y^i) dy^i$ y si $\omega \in T^*U$, $\Pi_{*_\omega}(\partial y^i|_\omega) \in M_{\Pi(\omega)}$.

Siendo $\Pi_{*_\omega}(\partial y^i|_\omega)(x^j) = \partial y^i|_\omega(x^j \circ \Pi)$

se tiene:

$$\Pi_{*_\omega}(\partial y^i|_\omega)(x^j) = \delta_{ij} \ si \ 1 \leq i \leq n \ y \ \ \Pi_{*_\omega}(\partial y^i|_\omega)(x^j) = 0 \ si \ n+1 \leq i \leq 2n$$

Por otra parte,

$$\rho(\partial y^i)|_\omega = \omega(\Pi_{*_\omega}(\partial y^i|_\omega)) = \omega(\partial x^i|_{\Pi(\omega)}) = y^{n+i}(\omega) \ si \ 1 \leq i \leq n$$

$$\rho(\partial y^i) = 0 \quad si \ n+1 \leq i \leq 2n$$

Luego,

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} y^{n+i} dy^i$$

Ahora $\gamma = -d\rho = -\sum_{i=1}^{n} dy^{n+i} \wedge dy^i = \sum_{i=1}^{n} dy^i \wedge dy^{n+i}$
con lo cual se ve que γ *es no degenerada, por otro lado* $d\gamma = -d^2\rho = 0$

Ejemplo 3.3 *Sea* M *una variedad riemanniana de dimensión* n*; y* $g : TM \longrightarrow T^*M$ *el difeomorfismo dado por* $g(v)(u) =< v, u >$.
Como vimos en el ejemplo anterior para T^*M *tenemos la 1-forma* ρ *y la 2-forma* $\gamma = -d\rho$*, con la cual* (T^*M, γ) *es una variedad simpléctica.*
Sea $\theta = g^*(\rho)$ *y* $\omega = g^*(\gamma)$*, que son respectivamente 1-formas y 2-formas sobre TM.*
Como $\gamma = -d\rho$*, y teniendo en cuenta las propiedades de la diferencial exterior mencionadas en el capítulo 1, resulta:*

$$\omega = g^*(\gamma) = g^*(-d\rho) = -dg^*(\rho) = -d\theta$$

y por lo tanto,

$$d\omega = -d^2\theta = 0$$

Veamos que ω *es no degenerada.*
Sea $u \in TM$ *y* $b \in (TM)_u$ *tal que para todo* $z \in (TM)_u$ *es* $\omega_u(b, z) = 0$.
Entonces

$$0 = \omega_u(b,z) = g^*(\gamma)(b,z) = \gamma_{g(u)}(g_{*_u}(b), g_{*_u}(z))$$

Luego, $g_{*_u}(b) = 0$ *y como* g_{*_u} *es un isomorfismo, entonces* $b = 0$
En consecuencia (TM, ω) *es una variedad simpléctica.*

Nota: De acuerdo con el ejemplo anterior es $\theta = g^*(\rho)$, Si $X \in \chi(TM)$.

$$\theta(X)(u) = g(u)(\Pi_{*_{g(u)}}(g_{*_u}(X(u))) =< u, \Pi_{*_{g(u)}}(g_{*_u}(X(u)) >$$

Sea (U,x) carta de M y $(TU, \bar{x})$ la inducida en el fibrado tangente, $A_i = \partial\bar{x}^i$; si $X(u) = \sum_{i=1}^{2n} \xi^i A_i(u)$ *para* $u \in TU$ es:

$$\Pi_{*_u}(X(u)) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \partial x^i|_{\Pi(u)}$$

Por otro lado,
$\Pi_{*_{g(u)}}(g_{*_u}(A_i(u))(x^l) = A_i(u)(x^l \circ \Pi \circ g) = A_i(u)(\bar{x}^l)$
con lo cual

$$\Pi_{*_{g(u)}}(g_{*_u}(X(u))) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \partial x^i|_{\pi(u)}$$

Luego, $\Pi_{*_{g(u)}}(g_{*_u}(X(u))) = \Pi_{*_u}(X(u))$
y por lo tanto

$$\theta(X)(u) =< u, \Pi_{*_u}(X(u)) >$$

Si $<,>$ es la métrica de Sasaki en TM y S es el spray geodésico asociado a la conexión de Levi-Civita podemos escribir.

$$\theta(X)(u) =< S, X >$$

Proposición 3.4 *Si* ω *es la 2-forma en TM del ejemplo anterior, entonces*

$$\omega(X,Y) =< \Pi_* X, K(Y) > - < K(X), \Pi_*(Y) >$$

donde $X, Y \in \chi(TM)$ *y* K *la función de conexión .*

Demostración: Sabiendo que $\theta(X) =< S, X >$ y que $\omega = -d\theta$, tenemos que

$$\omega(X,Y) = -X(< S,Y >) + Y(< S,X >) + < S,[X,Y] > \quad (I)$$

Definimos $B_1, B_2,\ I : Q = TM \longrightarrow TM$ como:

- I es la identidad
- $B_1(u) = \Pi_{*_u}(Y(u))$
- $B_2(u) = \Pi_{*_u}(X(u))$

Si $f = \Pi : Q \longrightarrow M$, entonces $I, B_1, B_2 \in\ \chi_f$. La igualdad (I) se escribe

$$\omega(u)(X,Y) = -X(u)(< I, B_1 >) + Y(u)(< I, B_2 >) + < u, \Pi_{*_u}([X,Y](u)) > \quad (II)$$

Veamos el termino $X(u)(< I, B_1 >)$.

De acuerdo con la propiedad 10 (capítulo 1) de la derivada covariante a lo largo de f se tiene:

$$X(u)(< I, B_1 >) =< \nabla_{X(u)} I, B_1(u) > + < I(u), \nabla_{X(u)} B_1 >=$$

$$=< \nabla_{X(u)} I, \Pi_{*_u}(Y(u)) > + < u, \nabla_{X(u)} B_1 >$$

Análogamente

$$Y(u)(< I, B_2 >) =< \nabla_{Y(u)} I, \Pi_{*_u}(X(u)) > + < u, \nabla_{Y(u)} B_2 >$$

donde $\nabla_{X(u)} I = K_u(I_{*_u}(X(u))),\ \ \nabla_{Y(u)} I = K_u(I_{*_u}(Y(u)))$

Como I es la identidad, es $I_{*_u}(X(u)) = X(u),\ I_{*_u}(Y(u)) = Y(u)$; luego las igualdades anteriores se escriben:

$$X(u)(< I, B_1 >) =< K_u X(u), \Pi_{*_u}(Y(u)) > + < u, \nabla_{X(u)} B_1 > \quad (III)$$

$$Y(u)(< I, B_2 >) =< K_u Y(u), \Pi_{*_u}(X(u)) > + < u, \nabla_{Y(u)} B_2 > \quad (IV)$$

Reemplazando (III) y (IV) en (II) y siendo $[X,Y] = -[Y,X]$ se tiene:

$$\omega(u)(X,Y) =< K_u(Y(u)), \Pi_{*_u}(X(u)) > - < K_u(X(u), \Pi_{*_u}(Y(u)) > +$$

$$+ < u, \nabla_{Y(u)}B_2 - \nabla_{X(u)}B_1 - \Pi_{*_u}([Y,X](u)) >$$

la propiedad (9) (capítulo 1) de la derivada covariante a lo largo de $f = \Pi$ nos dice que

$$\nabla_{Y(u)}B_2 - \nabla_{X(u)}B_1 = \Pi_{*_u}([Y,X](u))$$

y por lo tanto,
$\omega(u)(X,Y) =< K_u(Y(u)), \Pi_{*_u}(X(u)) > - < K_u(X(u)), \Pi_{*_u}(Y(u)) >$

□

Antes de dar el próximo ejemplo veamos primero la siguiente proposición.

Proposición 3.5 *Sea N una variedad diferenciable de dimensión n , $f \in F(N)$ y γ una 2-forma no degenerada. Existe un único campo $A \in \chi(N)$ tal que $\gamma(A,X) =$ $= X(f) = df(X)$ $\forall$ $X \in \chi(N)$.*

Demostración: Sea $\phi_p : N_p \longrightarrow N_p^*$, definida por

$$\phi_p(v)(u) = \gamma_p(v,u)$$

como γ es no degenerada, tenemos que ϕ_p es un isomorfismo. Por lo tanto, existe un único $A_p \in N_p$ *tal que* $\phi_p(A_p) = df_p$, o sea
$\gamma_p(A_p,u) = u(f)$ $\forall$ $u \in N_p$
Si definimos el campo A , $A(p) = A_p$ entonces tenemos que $\gamma(A,X) = X(f)$ $\forall$ $X \in \chi(N)$.
Veamos que A es diferenciable. Si (U,x) es una carta de N

$$\partial x^j(f) = \gamma(A, \partial x^l) = \sum_{i=1}^{n} A^i \gamma(\partial x^i, \partial x^j) = \sum_{i=l}^{n} A^i \gamma_{ij}$$

Como (γ_{ij}) es inversible y $\partial^j(f)$ $1 \leq j \leq n$ son diferenciables, entonces A^i es diferenciable si $i = 1, \ldots, n$. Luego A es diferenciable.

□

Definición 3.6 *Sea (N,γ) una variedad simpléctica y $H \in\ F(N)$. (N,γ,H) se denomina un sistema hamiltoniano y H la función hamiltoniana.*
Dado que γ es no degenerada, existe un único campo $Z_H \in\ \chi(N)$ talque $\gamma(Z_H, X) = X(H)\ \forall\ X \in\ \chi(N)$. El campo Z_H se denomina el campo hamiltoniano asociado a (N,γ,H)

Ejemplo 3.7 *Sea $E : TM \longrightarrow \mathbb{R}$, la función energía, dada por $E(v) = \frac{1}{2} < v, v >$ Consideramos el sistema hamiltoniano (TM, ω, E), entonces existe un único campo $Z_E \in\ \chi(TM)$ de modo que $\omega(Z_E, X) = X(E)\ \ \forall\ X \in\ \chi(TM)$. En este caso, el campo hamiltoniano es el spray geodésico.*
Por la proposición 3.4, es $\omega(S,X)(u) =< u, K_u(X(u)) >$.
Por otro lado si $I : TM \longrightarrow TM$ es la identidad, I es un campo a lo largo de la proyección.
entonces

$$X(E)(u) = X(u)(E) = X(u)(\frac{1}{2} < I, I >) =< u, \nabla_{X(u)}I >=< u, K_u(X(u)) >$$

con lo cual

$$\omega(S,X)(u) = X(E)$$

Nota:
En TM tenemos una orientación natural dada por el atlas de cartas inducidas de M. El atlas de las cartas inducidas es un atlas orientado.
Sean $(TV,\bar{y}), (TU,\bar{x})$ las cartas inducidas por (TV,y) y (TU,x).
$U \cap V \neq \emptyset$ *sii* $TU \cap TV$.
Sea $J_{\bar{y}\circ\bar{x}^{-1}} : (TU \cap TV) \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $J_{\bar{y}\circ\bar{x}^{-1}}(u) = \det(\frac{\partial \bar{y}^i\circ\bar{x}^{-1}}{\partial u^j}|_{\bar{x}(u)})_{1\leq i,j\leq 2n}$
entonces

$$J_{\bar{y}\circ\bar{x}^{-1}} = \begin{pmatrix} D(y\circ x^{-1}) & 0 \\ X & D(y\circ x^{-1}) \end{pmatrix} = (D(y\circ x^{-1}))^2 > 0$$

.

Con respecto a la orientación natural en TM y a la métrica de Sasaki, existe un único elemento de volumen , dV_{TM} que cumple $dV_{TM}(u)(v_1, \ldots, v_{2n}) = 1$, si $v_1, \ldots, v_{2n}$ es base ortonormal de $(TM)_u$ orientada positivamente.

La representación local respecto de $(TU, \bar{x})$ es:

$$dV_{TM} = \sqrt{\det(g)}.d\bar{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{x}^{2n}$$

donde $g : TM \longrightarrow \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}$, $g_{ij}(u) =< \partial\bar{x}^i|_u, \partial\bar{x}^j|_u >_u$
Si ω es la 2-forma en TM mencionada anteriormente y $\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$, se tiene (ver [9]), que

$$dV_{TM} = \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{n!}.\omega^n$$

donde $[\frac{n}{2}]$ es la parte entera de $\frac{n}{2}$.

Definición 3.8 *Si M es un variedad diferenciable y $X \in \chi(M)$, sea*
$C_X : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$
dado por

$$C_X(\alpha)(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \alpha(X, X_1, \ldots, X_{k-1}) \quad si\ X_i \in \chi(M)$$

C_X se denomina el operador contracción con respecto a X y satisface:

$$C_X(\alpha \wedge \beta) = C_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge C_x(\beta) \quad si\ \alpha \in \Omega^k(M)\ y\ \beta \in \Omega^l(M)$$

Sea $N \in \chi(TM)$ el campo vertical $N(v) = (\Pi_{*_v} \times K_v)^{-1}(0_{\Pi(v)}, v)$. Vimos en el capítulo 2 que $N(v) \perp (T_1M)_v$ *si* $v \in T_1M$.

Proposición 3.9 *Si $dV_{T_1M} = C_N(dV_{TM})$ entonces $dV_{T_1M} = \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]+1}}{(n-1)!}.\omega^{n-1} \wedge \theta$ y $dV_{T_1M}|_{T_1M}$ es un elemento de volumen para T_1M.*

Demostración: $C_N(\omega \wedge \omega) = C_N(\omega) \wedge \omega + \omega \wedge C_N(\omega) = 2(C_N(\omega) \wedge \omega)$.
Supongamos cierto para l-1 que $C_N(\omega^{l-1}) = (l-1).C_N(\omega) \wedge \omega^{l-2}$, y probemos que se cumple para l
$C_N(\omega^l) = C_N(\omega \wedge \omega^{l-1}) = C_N(\omega) \wedge \omega^{l-1} + \omega \wedge C_N(\omega^{l-1}) = C_N(\omega) \wedge \omega^{l-1} +$
$+(l-1)C_N(\omega) \wedge \omega^{l-1} = l.C_N(\omega) \wedge \omega^{l-1}$.
Luego, $C_N(\omega^n) = n.C_N(\omega) \wedge \omega^{n-1}$.
Ahora, $C_N(\omega)(X)(u) = \omega(u)(N, X) = - < u, \Pi_{*_u}(X(u)) >= -\theta(X)(u)$; esto nos dice que $C_N(\omega) = -\theta$, con lo cual

$$dV_{T_1M} = C_N(dV_{TM}) = \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{n!}.C_N(\omega^n) = \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]+1}}{(n-1)!}.\omega^{(n-1)} \wedge \theta$$

Sea $u \in T_1M$ y $v_1, \ldots, v_{2(n-1)}$ una base de $(T_1M)_u$. Decimos que está orientada positivamente si $\{N(u), v_1, \ldots, v_{2n-1}\}$ lo está *es decir*, $dV_{TM}(u)(N, v_1, \ldots, v_{2n-1}) > 0$

Luego, si $v_1, \ldots, v_{2n-1}$ es una base ortonormal orientada positivamente, se cumple que

$$dV_{T_1M}(u)(v_1, \ldots, v_{2n-1}) = dV_{TM}(u)(N, v_1, \ldots, v_{2n-1}) = 1$$

por lo tanto $dV_{T_1M}|_{T_1M}$ es un elemento de volumen.

□

Observación 3.10 $C_S(\omega^{n-1} \wedge \theta) = C_S(\omega^{n-1}) \wedge \theta + \omega^{n-1} \wedge C_S(\theta)$.

Como $C_S(\omega^{n-1}) = (n-1).\omega^{n-2} \wedge C_S(\omega)$ *tenemos que* $C_S(\omega^{n-1} \wedge \theta) = (n-1)\omega^{n-2} \wedge$
$\wedge C_S(\omega) \wedge \theta + \theta(S)\omega^{n-1}$

Si $X \in \chi(T_1M)$, *es* $X \perp N$,

$< u, K_u(X(u)) >= 0 \ \forall\ u \in \chi(T_1M)$.

Luego, si restringimos S *y* ω *a* T_1M *se cumple*

$\theta(S) =< S, S >= 1$, *y* $C_S(\omega)(u)(X) = \omega(u)(S, X) =< u, K_u(X(u)) >= 0$.

Por lo tanto tenemos

$$C_S(\omega^{n-1} \wedge \theta) = \omega^{n-1} \quad (\textit{sobre } T_1M)$$

3.0.4 El espacio de geodésicas

Sea M una variedad completa y consideremos el flujo $\phi : TM \times \mathbb{R} \longrightarrow TM$ del spray geodésico. Si fijamos $v \in TM$, tenemos que $\phi(v) : \mathbb{R} \longrightarrow TM$ es una curva en el fibrado tangente, que por lo visto en el capítulo 1, su proyección es una geodésica.

Si restringimos el flujo a T_1M resulta que $\phi : T_1M \times \mathbb{R} \longrightarrow T_1M$. En efecto, si $v \in T_1M$ y $c_v(t) = \Pi \circ \phi(v,t)$, entonces $c_v : \mathbb{R} \longrightarrow M$ es la geodésica que satisface $\dot{c}_v(t) = \phi(v,t)$. Como $|v| = 1$, entonces $< \dot{c}_v(t), \dot{c}_v(t) >= 1$ si $t \in \mathbb{R}$; o sea $\phi(v,t) \in T_1M$.

Definición 3.11 *Si $v \in T_1M$ la órbita de v es el conjunto $\phi(v \times \mathbb{R})$.*

En T_1M se define la relación de equivalencia: $v \sim w$ *sii* $\phi(v \times \mathbb{R}) = \phi(w \times \mathbb{R})$. Notamos $\vec{G} = T_1M/\sim$ y $\Gamma : T_1M \longrightarrow \vec{G}$ la proyección , $\Gamma(v) = \phi(v \times \mathbb{R})$.

Sea G=$\{c : \mathbb{R} \longrightarrow M :$ c es geodésica y $\dot{c}(0) \neq 0\}$. En G definimos la siguiente relación de equivalencia:

$c \sim g$ *sii* $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a > 0$ *tales que* $c(t) = g(at + b)$ *si* $t \in \mathbb{R}$.

Sea $\Pi_G : G \longrightarrow G/\sim$ la proyección al cociente.

Hay una biyección natural μ entre G *y* $\vec{G}$ definida por

$$\mu : G/\sim \longrightarrow \vec{G} \qquad \mu(\Pi_G(c)) = \Gamma(\frac{\dot{c}(0)}{|\dot{c}(0)|})$$

y por lo tanto llamamos a $\vec{G}$ el espacio de geodésicas orientadas.

Veamos que μ esta bien definida y que es efectivamente una biyección.

Sea $c \sim g \in G$. Si c_1 *y* g_1 son las parametrizaciones por longitud de arco de c, g respectivamente, se tiene que $c_1 \sim g_1$ con lo cual $\phi(\frac{\dot{c}(0)}{|\dot{c}(0)|} \times \mathbb{R}) = \phi(\frac{\dot{g}(0)}{|\dot{g}(0)|} \times \mathbb{R})$.

Sea $v \in T_1M$ *y* $\Gamma(v) = \phi(v \times \mathbb{R})$, si $c(t) = \Pi(\phi(v, t))$, entonces c es una geodésica en M que pertenence a G y $\mu(\Pi_G(c)) = \Gamma(v)$, con lo cual μ es suryectiva.

Si $\mu(\Pi_G(c_1)) = \mu(\Pi_G(c_2))$, entonces $\Gamma(v_1) = \Gamma(v_2)$, donde $v_i = \frac{\dot{c}_i(0)}{|\dot{c}_i(0)|}$, sea $\gamma_i(t) = \phi(v_i, t)$. Como $\Gamma(v_1) = \Gamma(v_2)$ existe t_0 de modo que $\phi(v_1, t_0) = v_2$. Luego, $\gamma_2(t) = \phi(v_2, t) = \phi(\phi(v_1, t_0), t) = \phi(v_1, t_0 + t)$ y por lo tanto $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Teniendo en cuenta que $\gamma_i \sim c_i$, es $c_1 \sim c_2$, y μ resulta inyectiva.

El siguiente resultado es bien conocido(ver [1])

Teorema 3.12 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $X \in \chi(M)$. Sea $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$ y sea $\phi : V \times I \longrightarrow M$ un flujo local de X, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto entorno del cero y V es un abierto de M entorno de p. Entonces existe un $\epsilon > 0$ y una carta (U, x) de M tal que $p \in U$, $x(p) = 0$, $x(U) = (-\epsilon, \epsilon)^n$ y $x^{-1}(u, t) = \phi(x^{-1}(u, 0), t)$ para $u \in (-\epsilon, \epsilon)^{n-1}$ y $|t| < \epsilon$.*

En particular, se cumple que $X(q) = \partial x^n|_q$ si $q \in U$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$.

A partir del teorema anterior el siguiente corolario nos permitirá distinguir unas cartas sobre T_1M, las cuales bajo ciertas condiciones, inducirán una estructura dife rencial sobre $\vec{G}$.

Corolario 3.13 *Para cada $v \in T_1M$ existe una carta (U, ρ) de T_1M de modo que $v \in U$, $\rho(v) = 0$, $\rho(U) = (-\epsilon, \epsilon)^{2n-1}$ y $\rho^{-1}(x, t) = \phi(\rho^{-1}(x, 0), t)$*
donde $x \in (-\epsilon, \epsilon)^{2n-2}$.

Demostración: Se debe al teorema anterior, aplicado a la variedad T_1M, al campo S y al flujo geodésico, pues $S(v) \neq 0$ *si* $v \in T_1M$.

□

Definición 3.14 *Las cartas (U, ρ) del corolario anterior se denominan regulares si para todo $u \in T_1M$ $\phi(u \times \mathbb{R})$ interseca a U en a lo sumo un $\rho^{-1}(x \times I)$, donde $x \in A = (-\epsilon, \epsilon)^{2n-2}$.*

Nota:
Si (U, ρ) es una carta regular, ésta induce una aplicación biyectiva
$\tilde{\rho} : \Gamma(U) \longrightarrow A$ dada por $\tilde{\rho}(\Gamma(u)) = (\rho^1(u), \ldots, \rho^{2n-1}(u))$
Veamos que esta bien definida. Sea $u \sim v$ tales que $u, v \in U$ y supongamos que
$\bar{u} = (\rho^1(u), \ldots, \rho^{2n-2}(u)) \neq (\rho^1(v), \ldots, \rho^{2n-2}(v)) = \bar{v}$
Ahora $u = \rho^{-1}(\bar{u}, t_1)$ para algún t_1 en $(-\epsilon, \epsilon)$, con lo cual $\phi(u, s) = \phi(\rho^{-1}(\bar{u}, 0), t_1 + s)$.
Del mismo modo $\phi(v, s) = \phi(\rho^{-1}(\bar{v}, 0), t_2 + s)$, como $\rho^{-1}(\bar{u}, 0) \neq \rho^{-1}(\bar{v}, 0)$ y
$\phi(u \times \mathbb{R}) = \phi(v \times \mathbb{R})$ tenemos una contradicción ya que (U, ρ) es regular.

La suryectividad se ve tomando $u = \rho^{-1}(a_1, \ldots, a_{2n-2}, 0)$, con lo cual tenemos que $\tilde{\rho}(\Gamma(u)) = (a_1, \ldots, a_{2n-2})$.
Si $\tilde{\rho}(\Gamma(u)) = \tilde{\rho}(\Gamma(v)) \Longrightarrow \exists\, x \in A$ *y* $t_1, t_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$
talque $u = \rho^{-1}(x, t_1) = \phi(\rho^{-1}(x, 0), t_1)$ *y* $v = \rho^{-1}(x, t_2) = \phi(\rho^{-1}(x, 0), t_2)$
Como S es completo, podemos escribir
$v = \phi(\rho^{-1}(x, 0), t_2) = \phi(\rho^{-1}(x, 0), t_1 + (t_2 - t_1)) = \phi(\phi(\rho^{-1}(x, 0), t_1), t_2 - t_1) =$
$= \phi(u, t_2 - t_1)$
y por lo tanto, $u \sim v$.

Definición 3.15 *Decimos que S es regular si para todo $v \in T_1M$, existe una carta regular (U, ρ) con $v \in U$.*

Nota: El siguiente resultado puede verse en [10], donde la topología de $\vec{G}$ no necesariamente es Haussdorff si de base numerable.

Proposición 3.16 *Si S es regular, $\vec{G}$ es una variedad diferenciable de dimensión $2n-2$, con el atlas maximal generado por el atlas inducido de cartas regulares.* $(\ (U,\rho) \longrightarrow (\Gamma(U),\tilde{\rho})\ )$.

Observación 3.17 *También se puede ver que si S es regular, entonces* $\Gamma : T_1M \longrightarrow (\vec{G})$ *es abierta y diferenciable.*

Proposición 3.18 *Sea $v \in\ T_1M$ y $\Gamma_{*_v} : (T_1M)_v \longrightarrow (\vec{G})_{\Gamma(v)}$, entonces $Nu(\Gamma_{*_v}) = [S(v)]$*

Demostración: Si (U,ρ) es una carta regular es $\tilde{\rho}\circ\Gamma\circ\rho^{-1}(x,t) = x$. Si $b \in\ (T_1M)_v$ $\Gamma_{*_v}(b)(\tilde{\rho}^i) = \nabla(\tilde{\rho}\circ\Gamma\circ\rho^{-1}).(b(\rho^i),\ldots,b(\rho^{2n-1}))$, por lo tanto

$$\Gamma_{*_v}(b) = 0 \Longleftrightarrow b(\rho^i) = 0 \quad 1 \leq i \leq 2n-2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow b = b(\rho^{2n-1})\partial\rho^{2n-1}|_v = b(\rho^{2n-1})S(v)$$

Con lo cual el núcleo de Γ_{*_v} es el subespacio generado por S(v).

□

Comentario: En [5] se muestra que si M es una variedad de Hadamard de dimensión n, o sea, M es completa, conexo, simplemente conexo y con curvatura seccional $K_\sigma \leq 0$ para todo plano tangencial σ, entonces $\vec{G}$ es una variedad diferenciable y es difeomorfa a TS^{n-1}, donde $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ es la esfera unitaria.

En [9], se construye el espacio de geodésicas, para el caso de geodésicas cerradas y se definen sobre ellas, métricas Riemannianas.

De ahora en más suponemos que $(M,<\ ,\ >)$ satisface que S es regular. Tenemos que $\Gamma_{*_u} : (T_1M)_u \longrightarrow (\vec{G})_{\Gamma(u)}$ es un epimorfismo para cada $u \in\ T_1M$. Siendo ω la 2-forma que se introdujo en la sección anterior tenemos la siguiente propososición.

Proposición 3.19 *Existe una única 2-forma $d\vec{G} \in\ \Omega^2(\vec{G})$ talque $\omega = \Gamma^*(d\vec{G})$*

Demostración: Supongamos que γ_1 *y* $\gamma_2 \in \ \Omega^2(\vec{G})$ son tales que $\omega = \Gamma^*(\gamma_1) = \Gamma^*(\gamma_2)$. Entonces

$$\gamma_1(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(b_1), \Gamma_{*_u}(b_2)) = \gamma_2(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(b_1), \Gamma_{*_u}(b_2))$$

para $u \in \ T_1M$ *y* $b_1, \ b_2 \in \ (T_1M)_u$. Como Γ_{*_u} es suryectiva para cada u se tiene que $\gamma_1 = \gamma_2$.

Existencia:

Si $H_i(u) = (\Pi_{*_u} \times K_u)^{-1}(u_i, 0)$ *para* $1 \le i \le n$

$H_{n+i}(u) = (\Pi_{*_u} \times K_u)^{-1}(0, u_i)$ *para* $1 \le i \le n-1$

donde $(u_1, \ldots, u_{n-1}, u)$ es una base ortonormal de $M_{\Pi(u)}$, se tiene que $\{H_1(u), \ldots, H_{2n-1}(u)\}$ es una base ortonornal de $(T_1M)_u$ donde $H_n(u) = S(u)$.

Como $\omega|_{T_1M}(S, X) = 0$, si $b_1, b_2 \in \ (T_1M)_u$, entonces

$$\omega(u)(b_1, b_2) = \sum_{i,j\neq n; i\neq j} \rho_1^i \rho_2^j \omega(u)(H_i(u), H_j(u))$$

donde $b_j = \sum_{i=1}^{2n-1} \rho_j^i H_i(u)$.

Sabiendo que $\{\Gamma_{*_u}(H_i(u)\}_{i\neq n}$ es base de $(\vec{G})_{\Gamma(u)}$ y que $S(u) \in \ Nu(\Gamma_{*_u})$, si $\gamma \in \ \Omega^2(\vec{G})$ se cumple:

$$\gamma(\Gamma(u))(\sum_{i\neq n} \rho_1^i \Gamma_{*_u}(H_i(u)), \sum_{j\neq n} \rho_2^i \Gamma_{*_u}(H_j(u))) = \sum_{i,j\neq n; i\neq j} \rho_1^i \rho_2^j \gamma(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(H_i(u)), \Gamma_{*_u}(H_j(u)))$$

entonces definiendo

$$\gamma(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(H_i(u)), \Gamma_{*_u}(H_j(u))) = \omega(u)(H_i(u), H_j(u))$$

tenemos $\gamma \in \ \Omega^2(\vec{G})$ que cumple que $\Gamma^*(\gamma) = \omega$

□

Observación 3.20 *Dado que* $d\vec{G} \in \ \Omega^2(\vec{G})$ *se tiene:*

$$(d\vec{G})^{n-1} = d\vec{G} \wedge \overset{n-1}{\cdots} \overset{veces}{} \wedge d\vec{G} \ \in \ \Omega^{2n-2}(\vec{G})$$

y como $\Gamma^*(d\vec{G}) = \omega$, *resulta*

$$\Gamma^*((d\vec{G})^{n-1}) = \Gamma^*(d\vec{G}) \wedge \ldots \wedge \Gamma^*(d\vec{G}) = \omega^{n-1} = C_S(\omega^{n-1} \wedge \theta)$$

La igualdad anterior, conjuntamente con las proposiciones 3.9 y 3.18, muestran que $(d\vec{G})^{n-1}$ *es un elemento de volumen para* $\vec{G}$.

Sea $i : M \longrightarrow M$ una isometría, es decir, un difeomorfismo que preserva productos internos. La misma induce un difeomorfismo $\tilde{i} : \vec{G} \longrightarrow \vec{G}$, definiendo

$$\tilde{i}(\Gamma(u)) = \Gamma(i_{*_p}(u)) \ \ si\ u \in \ M_p$$

Dado $u \in \ T_1M$, sean $u \in \ (U, \rho)$, (V, ψ) cartas regulares tales que $u \in \ U$ e $i_*(U) \subseteq V$. Si $a \in \ \tilde{\rho}(\Gamma(U))$

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{i} \circ \tilde{\rho}^{-1}(a) = \tilde{\psi} \circ \tilde{i}(\Gamma(\rho^{-1}(a, 0))) = \tilde{\psi}(\Gamma(i_{*_{\Pi(\rho^{-1}(a,0))}}(\rho^{-1}(a, 0)))) =$$

$$= (\psi^1, \ldots, \psi^{2n-2})(i_{*_{\Pi(\rho^{-1}(a,0))}}(\rho^{-1}(a, 0)))$$

como i_* es diferenciable resulta $\tilde{i}$ es diferenciable, del mismo modo $\tilde{i}^{-1}$ lo es .

Proposición 3.21 $d\vec{G}$ *es invariante por los difeomorfismos* $\tilde{i}$ *inducidos por isometrías* i*, es decir*

$$(\tilde{i})^*(d\vec{G}) = d\vec{G}$$

Demostración: Como $d\vec{G}$ es la única 2-forma sobre $\Omega^2(\vec{G})$ tal que $\omega = \Gamma^*(d\vec{G})$, si vemos que $\Gamma^*((\tilde{i})^*(d\vec{G})) = \omega$ se obtendra lo afirmado.
Sea $u \in \ T_1M, \Pi(u) = p$ y $b_1, \ b_2 \in \ (T_1M)_u$

$$\Gamma^*((\tilde{i})^*(d\vec{G}))(u)(b_1, b_2) = d\vec{G}(\Gamma(i_{*_p}(u)))(\tilde{i}_{*_{\Gamma(u)}}(\Gamma_{*_u}(b_1)), \tilde{i}_{*_{\Gamma(u)}}(\Gamma_{*_u}(b_2))) =$$

$$= d\vec{G}(\Gamma(i_{*_p}(u)))((\tilde{i} \circ \Gamma)_{*_u}(b_1), (\tilde{i} \circ \Gamma)_{*_u}(b_2)) =$$

como $\tilde{i} \circ \Gamma = \Gamma \circ (i_*)$ se sigue que

$$\Gamma^*(\tilde{i}^*(d\vec{G}))(u)(b_1,b_2) = d\vec{G}(\Gamma(i_{*_p}(u)))(\Gamma_{*_{i_{*_p}(u)}}((i_*)_{*_u}(b_1)),\Gamma_{*_{i_{*_p}(u)}}((i_*)_{*_u}(b_2))) =$$

$$= \omega(i_{*_p}(u))((i_*)_{*_u}(b_1),(i_*)_{*_u}(b_2))$$

si mostramos que :

1) $\Pi_{i_{*_p}(u)}((i_*)_{*_u}(b_i)) = i_{*_p}(\Pi_{*_u}(b_i)) \in \ M_{i(p)}$

2)$K_{i_{*_p}(u)}((i_*)_{*_u}(b_i)) = i_{*_p}(K_u(b_i)) \in \ M_{i(p)}$

entonces $\Gamma^*((\tilde{i})^*(d\vec{G})) = \omega$ es consecuencia del hecho de ser i una isometría y que $\omega(X,Y) =< \Pi_*(X), K(Y) > - < K(X), \Pi_*(Y) >$.

Ahora $\Pi_{i_{*_p}}(u)((i_*)_{*_u}(b_i))(x^j) = b_i(x^j \circ \Pi \circ i_*) = v_1(x^j \circ i \circ \Pi)$

donde $p \in \ (U,x)$ es una carta de M; por lo tanto vale 1).

La igualdad 2) se obtiene considerando las cartas $p \in (U,x)$ y $i(p) \in \ (i(U), x \circ i^{-1})$ y escribiendo la función de conexión en sus respectivas representaciones locales.

□

Observación 3.22 *Como $(\tilde{i})^*(d\vec{G}) = d\vec{G}$ entonces $(\tilde{i})^*((d\vec{G})^{n-1}) = (d\vec{G})^{n-1}$, Luego si $\vec{G}$ es hausdorff y de base numerable, podemos integrar respecto de $(d\vec{G})^{n-1}$ y esta medida de subconjuntos resulta invariante por isometrías . (ver [8]).*

3.0.5 Tensores naturales

Definición 3.23 *Sea $\vec{T} : \chi(\vec{G}) \times \chi(\vec{G}) \longrightarrow F(\vec{G})$ un tensor tipo (0,2) sobre el espacio de geodésicas orientadas. Decimos que natural si $\Gamma^*(\vec{T}) = T$ lo es sobre T_1M.*

Ejemplo 3.24 *$d\vec{G}$ es un natural, pues $\Gamma^*(d\vec{G}) = \omega$ y ω es natural en T_1M.*

Sean $X, Y \in \ \chi(T_1M)$ si los descomponemos en sus componentes horizontales y verticales tenemos:

- $\omega(X^h, Y^h)(v) = 0$
- $\omega(X^h, Y^v)(v) =< \Pi_{*_v}(X(v)), K_v(Y(v)) >$
- $\omega(X^v, Y^v)(v) = 0$
- $\omega(X^v, Y^h)(v) = - < K_v(X(v)), \Pi_{*_v}(Y(v)) >$

Luego, por corolario 2.22, ω es natural .

Nota:
Recordemos la descomposición vertical y horizontal $(TM)_u = H_u \oplus V_u$. Podemos escribir:
$H_u = H_u^1 \oplus [S(u)]$, donde $H_u^1 = \{b \in H_u :< b, S(u) >= 0\}$
$V_u = V_u^1 \oplus [N(u)]$, donde $V_u^1 = \{b \in V_u :< b, N(u) >= 0\}$
donde $< , >$ es la métrica se Sasaki.
Luego, $(T_1M)_u = H_u^1 \oplus V_u^1 \oplus [S(u)]$ y $\Gamma_{*_u} : H_u^1 \oplus V_u^1 \longrightarrow \vec{G}_{\Gamma(u)}$ es un isomorfismo
Si:

$$H_i(u) = (\Pi_{*_u} \times K_u)^{-1}(u_i, 0) \; para \; 1 \leq i \leq n-1$$

$$H_{n+i}(u) = (\Pi_{*_u} \times K_u)^{-1}(0, u_i) \; para \; 1 \leq i \leq n-1$$

donde $(u_1, \ldots, u_{n-1}, u)$ es una base ortonormal de $M_{\Pi(u)}$, se tiene que
$\{\Gamma_{*_u}(H_i(u)), \Gamma_{*_u}(H_{n+i}(u))\}$ *con* $1 \leq i \leq n-1$ es base de $\vec{G}_{\Gamma(u)}$.

Caracterizar los tensores naturales tipo (0,2) sobre $\vec{G}$ es caracterizar aquellos tensores que están en la imagen de $\Gamma^* : \Omega^2(\vec{G}) \longrightarrow \Omega^2(T_1M)$.

Observación 3.25 *Dado que estamos suponiendo que M es completa, si pedimos que sea conexa, el teorema de Hopf-Rinow ([1]) y otros, nos garantiza que dados $p, \; q \in M$, existe una geodésica $c : \mathbb{R} \longrightarrow M$ tal que $c(0) = p, \; c(1) = q$.*

Proposición 3.26 *Sea T un tensor del tipo (0,2) natural sobre T_1M. Entonces existe $\vec{T} : \chi(\vec{G}) \times \chi(\vec{G}) \longrightarrow F(\vec{G})$ tensor tipo (0,2) en $\vec{G}$ talque $\Gamma^*(\vec{T}) = T$ sii*

$$^{\nabla}T(p) = \begin{pmatrix} A_1 & 0^t & A_2 \\ 0 & (0) & 0 \\ A_4 & 0^t & A_3 \end{pmatrix}$$

donde $A_i = \lambda_i.I$ con I la identidad de $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}^{1\times(n-1)}$ y $(0) = 0 \in \mathbb{R}$.

Demostración: Si T es natural, por proposición 2.21

$$^{\nabla}T(p) = \begin{pmatrix} f_1(p)I & 0^t & f_2(p)I \\ 0 & f_5(p) & 0 \\ f_4(p)I & 0^t & f_3(p)I \end{pmatrix}$$

Si notamos con $A_i(p) = f_i(p)I \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ para $1 \leq i \leq 4$ se tiene:

- $\vec{T}(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(H_i(u)), \Gamma_{*_u}(H_j(u))) = A_1^{ij}(\Pi(u)) \quad si\ 1 \leq i, j \leq n-1$
- $\vec{T}(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(H_i(u)), \Gamma_{*_u}(H_{n+j}(u))) = A_2^{ij}(\Pi(u)) \quad si\ 1 \leq i, j \leq n-1$
- $\vec{T}(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(H_{n+i}(u)), \Gamma_{*_u}(H_j(u))) = A_4^{ij}(\Pi(u)) \quad si\ 1 \leq i, j \leq n-1$
- $\vec{T}(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(H_{n+i}(u)), \Gamma_{*_u}(H_{n+j}(u))) = A_3^{ij}(\Pi(u)) \quad si\ 1 \leq i, j \leq n-1$

Si $p \in M$, sea $S_p = \{u \in M_p : \|u\| = 1\}$
Para que $\vec{T}$ este bien definido $\vec{T}$, T debe cumplir que si $p,\ q \in M$ y $u \in S_p$ $y\ v \in S_q$ son tales que $u \sim v$ entonces $f_i(p) = f_i(q)$, pues $\Gamma(u) = \Gamma(v)$.
Esto es

$$f_i(\Pi \circ \phi(u, s)) = f_i(p)\ donde\ u \in S_p\ y\ s \in \mathbb{R}$$

Como M es arco conexo por geodésicas entonces $f_i(p) = \lambda_i$ constante para $i = 1, 2, 3, 4$.
Ahora, $f_5(p) = T(u)(S(u), S(u))$ y $S(u) \in Nu(\Gamma_*)$, por lo tanto
$f_5(p) = T(u)(S(u), S(u)) = \vec{T}(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(S(u)), \Gamma_{*_u}(S(u))) = 0\ \forall\ p \in M$
La diferenciabilidad de $\vec{T}$ se deduce de la de T.

$\square$

Observación 3.27 *Si $\vec{T}$ es una métrica de Riemann sobre $\vec{G}$ y $T = \Gamma^*(\vec{T})$, como $S(u) \in Nu(\Gamma_*)$, se tiene que T no puede ser definida positiva .*

Proposición 3.28 *Sea T un tensor tipo (0,2) en T_1M, T proviene de una métrica riemanniana $\vec{T}$ en $\vec{G}$ por Γ^* sii*

$$^{\nabla}T(p, u) = \begin{pmatrix} A_1(p, u) & 0^t & A_2(p, u) \\ 0 & (0) & 0 \\ A_4(p, u) & 0^t & A_3(p, u) \end{pmatrix}$$

donde $A_i : O(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, diferenciables. A_1 y A_3 son simétricas y $A_1^{ii} > 0,\ A_3^{ii} > 0$ para $1 \leq i \leq n-1$. $A_2 = A_4$.

Demostración: Si $\vec{T}$ es una métrica riemannniana y $T = \Gamma^*(\vec{T})$ tenemos que

$$({}^{\nabla}T(p,u))^{ni} = ({}^{\nabla}T(p,u))^{in} = 0 \quad 1 \leq i \leq n-1$$

considerando

- $\vec{T}(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(H_i(u), \Gamma_{*_u}(H_j(u))) = A_1^{ij}(p, u_1, \ldots, u_{n-1}, u) \quad si\ 1 \leq i,j \leq n-1$
- $\vec{T}(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(H_i(u), \Gamma_{*_u}(H_{n+j}(u))) = A_2^{ij}(p, u_1, \ldots, u_{n-1}, u) \quad si\ 1 \leq i,j \leq n-1$
- $\vec{T}(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(H_{n+i}(u), \Gamma_{*_u}(H_j(u))) = A_4^{ij}(p, u_1, \ldots, u_{n-1}, u) \quad si\ 1 \leq i,j \leq n-1$
- $\vec{T}(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(H_{n+i}(u), \Gamma_{*_u}(H_{n+j}(u))) = A_3^{ij}(p, u_1, \ldots, u_{n-1}, u) \quad si\ 1 \leq i,j \leq n-1$

vemos que la matrices A_i $i = 1,2,3,4$ cumplen las propiedades mencionadas. Tenemos la recíproca definiendo $\vec{T}$ según las igualdades anteriores.

$\square$

Corolario 3.29 *T proviene de una métrica riemannia $\vec{T}$ natural sobre $\vec{G}$ sii*

$$^{\nabla}T(p) = \begin{pmatrix} \lambda_1.I & 0^t & \lambda_2.I \\ 0 & (0) & 0 \\ \lambda_4.I & 0^t & \lambda_3.I \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_1 > 0, \lambda_3 > 0,\ \lambda_2 = \lambda_4.$

Nota:

Consideraremos la métrica Riemanniana $\vec{T}$ sobre $\vec{G}$ tal que $T = \Gamma^*(\vec{T})$ es

$$^{\nabla}T = \begin{pmatrix} I & 0^t & A \\ 0 & (0) & 0 \\ A & 0^t & I \end{pmatrix}$$

donde I es la identidad de $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ y $A = 0 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Luego, $\{\Gamma_{*_u}(H_i(u)), \Gamma_{*_u}(H_{n+i}(u))\}$ para $1 \leq i \leq n-1$ es base ortonormal de $\vec{G}_{\Gamma(u)}$.

Proposición 3.30 *Si* $dV_{\vec{G}} = \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]+1}}{(n-1)!}(d\vec{G})^{n-1}$ *, entonces, $dV_{\vec{G}}$ es el elemento de volumen correspondiente a la métrica Riemanniana $\vec{T}$ sobre $\vec{G}$.*

Demostración: Evaluando $dV_{\vec{G}}(\Gamma(u))$ en la base ortonormal $\{\Gamma_{*_u}(H_i(u)), \Gamma_{*_u}(H_{n+i}(u))\}$ para $i = 1, \ldots, n-1$, tenemos

$$dV_{\vec{G}}(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(H_1(u)),\ldots,\Gamma_{*_u}(H_{n-1}(u)),\Gamma_{*_u}(H_{n+1}(u)),\ldots,\Gamma_{*_u}(H_{2n-1}(u)))=$$

$$=\Gamma^*(dV_{\vec{G}})(u)(H_1(u),\ldots,H_{n-1}(u),H_{n+1}(u),\ldots,H_{2n-1}(u))=$$

$$=\frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]+1}}{(n-1)!}.(\Gamma^*(d\vec{G}))^{n-1}(u)(H_1(u),\ldots,H_{n-1}(u),H_{n+1}(u),\ldots,H_{2n-1}(u))=$$

$$=\frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]+1}}{(n-1)!}.\omega^{n-1}(u)(H_1(u),\ldots,H_{n-1}(u),H_{n+1}(u),\ldots,H_{2n-1}(u))$$

Debido a la observación 3.10 podemos escribir:

$$dV_{\vec{G}}(\Gamma(u))(\Gamma_{*_u}(H_1(u)),\ldots,\Gamma_{*_u}(H_{n-1}(u)),\Gamma_{*_u}(H_{n+1}(u)),\ldots,\Gamma_{*_u}(H_{2n-1}(u)))=$$

$$=\frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]+1}}{(n-1)!}.C_S(\omega^{n-1}\wedge\theta)(u)(H_1(u),\ldots,H_{n-1}(u),H_{n+1}(u),\ldots,H_{2n-1}(u))=$$

$$=dV_{T_1M}(u)(H_n(u),H_1(u),\ldots,H_{n-1}(u),H_{n+1}(u),\ldots,H_{2n-1}(u))$$

por ser dV_{T_1M} el elemento de volumen correspondiente a la métrica de Sasaki restringida a T_1M la última igualdad es ± 1. Como tenemos la expresión de ω y θ mediante una laboriosa cuenta con permutaciones se tiene que

$$sg((\omega^{n-1}\wedge\theta)(u)(H_n(u),H_1(u),\ldots,H_{n-1}(u),H_{n+1}(u),\ldots,H_{2n-1}(u))=(-1)^{[\frac{n-1}{2}]}$$

con lo cual

$$dV_{T_1M}(u)(H_n(u),H_1(u),\ldots,H_{n-1}(u),H_{n+1}(u),\ldots,H_{2n-1}(u))=(-1)^n$$

Por lo tanto $dV_{\vec{G}}(\Gamma(u))(v_1,\ldots,v_{2n-2})=\pm 1$ si $\{v_i\}_{i=1}^{2n-2}$ es una base ortonormal de $\vec{G}_{\Gamma(u)}$ respecto de $\vec{T}$.

$\square$

Referencias

[1] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer; *Riemannsche geometrie im groβen* , Springer, Lecture notes in math. 55(1968).

[2] O. Kowalski, M. Sekisawa; *Natural transformations of Riemannian metrics on manifolds to metrics on tangent bundles-a classification*. Bull. Tokyo Gakugei. Univ.(4) (1988), 1-29.

[3] I. Kolá$\check{r}$, P. Michor, J. Slovák; *Natural operations in differential geometry* ,Springer Verlag, (1993).

[4] M.C. Calvo y G.R. Keilhauer; *Tensor field of type (0,2) on the tangent bundle of a riemannian manifold*, Geometriae Dedicata 71:209-219, (1998).

[5] G.R. Keilhauer; *A note on the space of geodesics*, Revista de la Unión Matemática Argentina, volumen 36 (1990).

[6] M.P. Do Carmo; *Geometría riemanniana*, I.M.P.A, Proyecto Euclides, segunda edición (1988)

[7] D. Krupka, J. Jany$\check{s}$ka; *Lectures on differential invariants*, Folia.fac.Sci.Nat.Univ.Purkynianae Brunensis, Brno, (1990).

[8] L. Santaló; *Integral geometry and geometric probability*, Enciclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley,reading, (1976).

[9] A.L. Besse; *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergernisse math; Und ihrer Grenzgebiete, vol 93, Springer-Verlag, Berlin (1978).

[10] G.R. Keilhauer; *Densidad de geodésicas y de horoesferas en variedades de Riemann*, Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires (1980).

Agradecimientos

Agradezco a mi director Dr. Guillermo Keilhauer por su ayuda y sus sugerencias.

A mis viejos María Inés y José Juan y a mi hermana Gisela.

A mis abuelos, tíos y primos.

A mis amigos: Guillermo, Gonzalo, Nicolás, Gastón, Mago, Moye, Negro , Diego y Faro.

A mis amigos y compañeros: Agustín, Leo, Leandro, Daniel, Fernando, Daniela, Sandra, Lucía, Anibal, Patricia, Santiago, Rafa, Flavia, Luciano, Karina, Ezequiel M., Pablo, Nacho, Fede, Mariano, Ariel, Pablo D., Ezequiel D., Andrés, Karina B., Florencia, Ezequiel, Valeria, Virginia, Carolina, Sebastián, Leandro