



Universidad
de La Laguna

Departamento de Matemática Fundamental
Área de Álgebra

K-teoría y homología cíclica de hipersuperficies

Memoria de tesis para la obtención del título de Doctora en Matemáticas que presenta la Licenciada Dña. María Luisa de León Mallorquín y que dirige el Dr. Guillermo Cortiñas y codirige el Dr. Manuel D. García Román.

La Laguna, 3 de octubre de 2007



Universidad
de La Laguna

Departamento de Matemática Fundamental
Área de Álgebra

D. Guillermo H. Cortiñas, Profesor Asociado del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires e Investigador Ramón y Cajal por el Departamento de Algebra, Geometría y Topología de la Universidad de Valladolid.

CERTIFICA:

Que la memoria titulada *K-teoría y homología cíclica de hipersuperficies.*, con la que la autora D^a. María Luisa de León Mallorquín opta al grado de Doctora en Matemáticas por la Universidad de La Laguna, ha sido realizada bajo su dirección y

AUTORIZA la presentación de la misma.

Para que así conste a los efectos oportunos, firma la presente en La Laguna a 3 de octubre de 2007.

Fdo.: Guillermo H. Cortiñas.



Universidad
de La Laguna

Departamento de Matemática Fundamental
Área de Álgebra

D. Manuel D. García Román, Profesor Contratado Doctor del Departamento de Matemática Fundamental de la Universidad de La Laguna.

CERTIFICA:

Que la memoria titulada *K-teoría y homología cíclica de hipersuperficies.*, con la que la autora D^a. María Luisa de León Mallorquín opta al grado de Doctora en Matemáticas por la Universidad de La Laguna, ha sido realizada bajo su codirección y

AUTORIZA la presentación de la misma.

Para que así conste a los efectos oportunos, firma la presente en La Laguna a 3 de octubre de 2007.

Fdo.: Manuel D. García Román.

En memoria de mi madre
Marisa Mallorquín
(1938-2007)

Agradecimientos

A mi director Willie, por darme la oportunidad de aprender con él haciendo posible que este proyecto saliera adelante, por enseñarme el verdadero significado de la investigación matemática y porque a pesar de que es una de las personas más cultas e inteligentes que conozco siempre demuestra su gran corazón y su increíble humanidad.

A mi codirector Manolo, por apoyarme desde el principio, por estar siempre dispuesto a echar una mano y porque aunque se haya pasado al *lado oscuro de la fuerza* sigue siendo una gran persona y un gran amigo.

A Mariví por ser mi madrina de promoción y de *confirmación*, por ser una gran profesora y toda una mujer, por creer en mí antes que yo, porque siempre ha sabido demostrar su cariño y su confianza.

A Evelia por iniciarme en esto de las singularidades, por apoyarme y ayudarme cada vez que lo he necesitado y por todas esas apetecibles cenas bañadas con *esa bebida polaca*. Gracias también a Margarita por brindarme su apoyo moral, su simpatía y su cariño.

Al resto de componentes del Departamento de Matemática Fundamental de la Universidad de La Laguna por promover mis inquietudes matemáticas en cada clase.

A Antonio Campillo por la calidez y confianza con la que me ha acogido en todas mis visitas a Valladolid. Gracias también a Diego, Fernando, Julio, Oscar y Eugenia por hacer estas visitas tan agradables y motivadoras.

A Lisi, Fabiana y Silvia, del Departamento de Matemática de la Universidad de Buenos Aires, por acogerme con cariño durante mis estancias en Argentina y ofrecerme su amistad y simpatía.

A Coqui, Judit y Fefi, por ser mis compañeras, mis confidentes, mis amigas, porque nos unen tantas cosas que no caben en una frase.

A Pedro y Moy por los buenos ratos que hemos pasado y por estar siempre ahí. A Nieves por estar siempre dispuesta a echarse unas risas y unas cervezas. A Rosana y Cris, por vuestro apoyo, por saber escuchar, por demostrar ser grandes amigas y al igual que Nieves estar siempre dispuestas a echarse una cervecita.

A Mariluz y Mónica, mis dos valientes Rojaleras, por darme su amistad incondicional y su apoyo en los malos momentos. A Conchi, Ana, Susi y Natalia por hacer del trabajo algo divertido, por apoyarme y animarme, por estar ahí cuando las necesité y demostrar siempre lo mejor de sí mismas. A Pilar, por dejarme ser su amiga, empleada y de nuevo amiga, por ser una mujer valiente a pesar de las dudas y los miedos, por confiar en mí a pesar de todo y porque tu lo vales.

A las amigas del foro, Monica, Aran, Carlota, Rosa y Sita Fred, que estos últimos años me han animado y demostrado una cálida amistad mostrándome un nuevo mundo lleno de buena gente dispuestas a ofrecer lo mejor de sí mismas.

A Sara, por darme esa clase de amistad que no mata el tiempo ni la distancia, por comprenderme y escucharme, por no juzgarme, por ser mi confidente en *Prime Time*, por estar siempre ahí y porque cuando te hagas más famosa que Madonna me voy a forrar contando tu vida en Salsa Rosa. A Elena, por ser mi amiga, por perdonar mis despistes, por ser una estupenda artista escondida tras un monitor y porque es una magnífica persona y una gran mujer.

A Sergio, por animarme y apoyarme desde el principio aguantando mis ausencias y mis manías, por seguir apoyándome a pesar de todo y demostrar siempre que es un gran amigo y un ser humano excepcional.

A Guada, porque lo que tu me has enseñado no se aprende en los libros.

A mis tíos Nena, Manolo y Mariemma, y a Marita (que es como una tía adoptiva), por darme su apoyo y cariño, su confianza y sus ánimos en los momentos duros, por demostrar que siempre puedo contar con ellos. A mis hermanos, Andrés, Juanca y Mari, por mantenernos unidos ante la adversidad, por ejercer de auténticos hermanos mayores y demostrar que somos una familia. A mi padre por apoyarme aunque no esté de acuerdo conmigo, por aceptarme aunque no me entienda, por formarme como persona a pesar de tener ideologías diferentes y por quererme aunque no lo diga.

A mi madre, por ser toda una madraza, por apoyarme y animarme desde que di mi primer paso aunque no estuviera de acuerdo en algunos, por encender una vela en cada examen, por echarme la bronca cuando hacía el vago, por tratar de protegerme, por llamarme cada día, por querer sacar siempre lo mejor de mí misma y por dar todo el cariño que una madre puede dar. Y ahora es cuando te pido perdón por no cumplir mi promesa. Sin embargo, aunque no crea en ello, tengo la pequeña esperanza que desde algún lugar puedas verme en este momento.

Índice general

Índice General	I
Introducción	III
1. Preliminares	1
1.1. Homología de Hochschild	1
1.2. Producto en HH	6
1.3. Cohomología de de Rham	9
1.4. Homologías cíclica, periódica y negativa	10
1.5. Homología cíclica y derivaciones.	16
1.6. Cohomología Infinitesimal	17
1.7. Descomposición de Hodge.	20
2. Cálculos para hipersuperficies.	29
2.1. Hipersuperficies	29
2.2. El caso $f \in J$	37
2.3. Producto en HH para $f \in J$	42
2.4. Caso en que A es $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduada	43
2.5. Producto en HN para f casi homogéneo	47
3. Hipersuperficies con singularidades aisladas.	51
3.1. Cálculos previos	51
3.2. Sucesión espectral genérica	54
3.3. Degeneración de $L_*(t)$ e índice de Briançon-Skoda.	57
3.4. Evaluación de la sucesión espectral genérica.	60
3.5. El sistema inverso (HC_{p+2*}^{p+*}, S)	66
3.6. Algoritmo, observaciones y ejemplos	68
3.7. Caso $\mathfrak{b}\mathfrak{s} = 1$	73

4. K-teoría	75
4.1. K_0	75
4.1.1. Regularidad	79
4.2. K_1	79
4.3. $K_{<0}$	81
4.4. $K_{>0}$	82
4.5. Escisión	84
4.6. Caracter de Chern y K -teoría infinitesimal	90
4.7. Cambio de cuerpo base	93
4.8. Aplicaciones.	95
4.8.1. Curvas	95
4.9. Otro ejemplo	97
Anexo I: Tabla de Ejemplos.	101
Anexo II: Algoritmo.	103
Bibliografía	115
Índice de Términos	119
Lista de Símbolos	121

Introducción

Esta tesis concierne al cálculo de la homología cíclica de hipersuperficies sobre un cuerpo k de característica cero. Recordemos que si A es un álgebra conmutativa, entonces las homologías de Hochschild y cíclica de A admiten descomposiciones (llamadas de Hodge):

$$HH_n A = \bigoplus_{p=0}^n HH_n^{(p)} A \quad HC_n A = \bigoplus_{p=0}^n HC_n^{(p)} A$$

Estas homologías están relacionadas por una sucesión exacta larga

$$HC_{n-1}^{(p-1)} A \xrightarrow{B} HH_n^{(p)} A \xrightarrow{I} HC_n^{(p)} A \xrightarrow{S} HC_{n-2}^{(p-1)} A \xrightarrow{B} HH_{n-1}^{(p)} A \quad (1)$$

llamada sucesión *SBI*. En el caso en que A es una hipersuperficie, es decir $A = R/f$ con R suave, entonces la homología de Hochschild puede describirse en forma sencilla en términos del complejo de cocadenas

$$L : \Omega_R^0 \xrightarrow{df} \Omega_R^1 \xrightarrow{df} \cdots \xrightarrow{df} \Omega_R^m$$

Aquí $m = \dim R$, Ω_R^n es el módulo de n -formas diferenciales sobre k , y el operador de borde es el producto exterior con df , la diferencial exterior de f . Los grupos $HH_*^{(p)} A$ se expresan en términos del truncamiento del complejo L de nivel p :

$$HH_n^{(p)} A = H^{2p-n}(L^{\leq p}/fL^{\leq p}) \quad (2)$$

En particular¹,

$$HH_n^{(n)} A = H^n(L^{\leq n}/fL^{\leq n}) = \Omega_R^n / (f\Omega_R^n + df \wedge \Omega_R^{n-1}) = \Omega_A^n$$

¹Esta fórmula y la de $HC_n^{(n)}$ en la página siguiente, son válidas para cualquier álgebra conmutativa, ver [Lod, 4.5.12, 4.6.8].

Además, si por ejemplo R es local o un anillo de polinomios, entonces L y L/fL son isomorfos a los complejos de Koszul de las derivadas parciales de f en R y A , respectivamente. Por otro lado, en [BACH] se muestra que la imagen del operador S puede describirse en términos de cohomología de de Rham. Se tiene

$$S(HC_n^{(p)} A) = H_{dR}^{2p-n}(R/f^{n-p}) \quad (3)$$

De (1), (2) y (3) se obtiene una sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{dR}^{2p-n-1}(R/f^{n+1-p}) & \longrightarrow & HC_{n-1}^{(p-1)} A & \longrightarrow & H^{2p-n}(L^{\leq p}/fL^{\leq p}) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & HC_n^{(p)} A \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & H_{dR}^{2p-n}(R/f^{n-p}) \\ & & & & & & \longleftarrow \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

Por ejemplo, en el caso $p = n$, se tiene

$$HC_n^{(n)} A = \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1}$$

En general, esta sucesión nos dice que el cálculo de la homología cíclica de A se reduce al cálculo de la cohomología de L/fL y de la cohomología de de Rham de R/f^n para todo n . Por lo dicho antes, L/fL es esencialmente un complejo de Koszul; su cálculo está bien entendido, e incluso está implementado en Singular. El problema reside entonces en calcular los grupos $H_{dR}^*(R/f^n)$ que, en general, pueden variar cuando n varía. Una manera de evitar este problema, es concentrarse en el caso en que R admite una graduación no negativa

$$R = k \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \quad (4)$$

y f es homogéneo. En efecto, para tales R y f se tiene

$$H_{dR}^p(R/f^n) = H_{dR}^p(k) = \begin{cases} k & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}$$

Este caso ha sido considerado por diversos autores ([BV, Vig, BACH]). En esta tesis se prueba la siguiente fórmula (en el Corolario 2.4.5), que generaliza los resultados de *loc. cit.*:

Teorema A Sean R como en (4) y $A = R/fR$, con f homogéneo, entonces:

$$HC_n(A) \cong HC_n(k) \oplus \frac{\Omega_A^n}{d\Omega_A^{n-1}} \oplus \bigoplus_{q=[n/2]}^{n-1} H^{2q-n+1}(L) \quad (5)$$

$$HH_n(A) \cong \Omega_A^n \oplus \bigoplus_{q=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} H^{2q-n}(L) \oplus H^{2q-n+1}(L) \quad (6)$$

□

Por ejemplo en [BV] y en [BACH] los autores estudian el caso en que f es homogéneo y además tiene singularidades aisladas, y en [Vig] la autora se centra en estudiar los casos en los que $\dim R \leq 3$ y f es homogéneo dando resultados explícitos en estos casos.

En el caso no graduado, es poco lo que sabe sobre los grupos $H_{dR}^*(R/f^n)$. En el Capítulo 2 estudiamos los morfismos $\pi_p^q : H_{dR}^q(R/f^{p+1}) \rightarrow H_{dR}^q(R/f^p)$ y mostramos que no son isomorfismos en general. Por ejemplo, en el apartado 2.1.5 se exhibe un polinomio $f \in R = k[x, y]$ de modo que π_p^1 no es isomorfismo para ningún entero p .

En el Capítulo 3, nos centramos en el caso en que R es una k -álgebra que es un dominio regular esencialmente de tipo finito de dimensión de Krull m y tal que el grado de trascendencia de su cuerpo de fracciones sobre k es m , $A = R/fR$ y $f \in R$ tal que su lugar singular consta de puntos aislados $Sing(f) = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_u\}$. Para un tal f , consideramos su ideal jacobiano $Jac(f)$, y el *índice de Briançon-Skoda*

$$\mathfrak{bs}(f) = \max_{1 \leq i \leq u} \min\{n : f^n \in Jac(f) \cdot R_{\mathfrak{m}_i}\}$$

Recordemos que el teorema de Briançon-Skoda ([BS]) dice que $\mathfrak{bs}(f) \leq m = \dim R$. La cohomología infinitesimal de A (ver sección 1.6) está dada por

$$H_{inf}^*(A) = H^*(\varprojlim_n \Omega_{R/f^n})$$

Uno de los resultados principales de la tesis es el siguiente, ver Teorema 3.5.2 y nota 3.4.8:

Teorema B Sean R , f y A como en el párrafo anterior. Entonces existe un entero κ_0 tal que para todo $p \geq 0$, se verifica que

i) Si $p \leq m - 3$ entonces

$$HC_{p+2q}^{p+q} A = H_{dR}^p(R/f^q) = H_{inf}^p(A) = H_{dR}^p A \quad (p \leq m - 3, \quad q \geq 1).$$

ii)

$$\begin{aligned} HC_{m-2+2q}^{m-2+q} A &= H_{dR}^{m-2} R / f^q & (q \geq 1) \\ &= H_{inf}^{m-2} A & (q \geq \max\{\mathfrak{bs}(f) + 1, \kappa_0 + 1\}). \end{aligned}$$

iii) *Tenemos que*

$$\begin{aligned} S^q HC_{m-1+2(p+q)}^{m-1+p+q} A &= \text{Im} (H_{dR}^{m-1}(R/f^{p+q}) \rightarrow H_{dR}^{m-1}(R/f^{p+1})) & (q \geq 1) \\ &= H_{inf}^{m-1} A & (q \geq c - 1). \end{aligned}$$

$$\text{donde } c = \max\{\mathfrak{bs}(f) + 1 + \kappa_0 - p, \mathfrak{bs}(f) + 1\}.$$

iv) *Para* $p = m$ *y* $q \geq q_0 = \mathfrak{bs}(f) + 1 + \kappa_0$

$$HC_{m+2q}^{m+q} A \cong H_{dR}^m(R/f^{q+1}) = H_{inf}^m(A).$$

□

Otro de nuestros resultados para el caso de singularidades aisladas concierne a la homología cíclica negativa $HN_*(A)$. Los grupos $HN_*(A)$ están relacionados con los de homología de Hochschild mediante una sucesión exacta larga

$$HH_{n+1}A \longrightarrow HN_{n+2}A \xrightarrow{S} HN_nA \longrightarrow HH_nA \quad (7)$$

Notar que abusamos de la notación y llamamos con la misma letra S a operadores distintos como los de (1) y (7). El siguiente resultado es consecuencia del teorema 3.4.7 y la nota 3.4.8.

Teorema C. *Consideremos los sistemas inversos (V_κ, S) y (W_κ, S) , donde $V_\kappa = HN_{m+2\kappa}A$ y $W_\kappa = HN_{m+2\kappa+1}A$. Sea κ_0 como en el Teorema B entonces para todo $\kappa \geq \kappa_0$ se satisfacen las siguientes condiciones.*

i) $W_\kappa = 0$.

ii) $S^{\mathfrak{bs}(f)}(V_{\kappa+\mathfrak{bs}(f)}) = 0$.

iii) *Sea* $l_i := \dim_k \ker(S^i : V_{\kappa_0+i} \rightarrow V_{\kappa_0})$ *(* $i \geq 1$ *), entonces*

$$l_i = \dim_k \ker(S^i : V_{\kappa+i} \rightarrow V_\kappa).$$

□

Además damos un algoritmo que permite calcular efectivamente κ_0 y las dimensiones l_i (ver el apartado 3.6.), lo implementamos en Singular (ver Anexo II), y lo utilizamos en la lista de singularidades de Arnol'd (Anexo I).

En el caso particular en que $\mathbf{bs}(f) = 1$ probamos (ver Lema 3.7.1)

$$\text{Si } \mathbf{bs}(f) = 1, \text{ entonces } H_{dR}^*(R/f^n) = H_{dR}^*(A) \quad (n \geq 1) \quad (8)$$

Utilizando este hecho obtenemos la siguiente fórmula para la homología cíclica de A (ver Teorema 3.7.3)

$$HC_n^p(A) = \begin{cases} \frac{\Omega_A^n}{d\Omega_A^{n-1}} & p = n \\ \Omega_A^m \oplus H_{dR}^{m-1}(A) & 2p - n = m - 1 \\ H_{dR}^{2p-n}(A) & 2p - n \in \{0, \dots, m-2\} \\ 0 & \text{el resto} \end{cases} \quad (9)$$

La homología cíclica negativa $HN_*(A)$ está ligada con la K -teoría algebraica por un morfismo llamado caracter de Chern

$$ch_n : K_n(A) \rightarrow HN_n(A) \quad (10)$$

En [Cor1] se introduce una K -teoría infinitesimal, K_*^{inf} , y se prueba una sucesión exacta larga

$$HN_{n+1}(A) \longrightarrow K_n^{inf} A \longrightarrow K_n A \xrightarrow{ch} HN_n A \quad (11)$$

La K -teoría infinitesimal es invariante por extensiones nilpotentes ([Cor1]) y satisface escisión ([Cor4]). Esto implica, por ejemplo, que si A es el anillo de una curva con normalización B , entonces $K_*^{inf}(A)$ puede expresarse en términos de $K_*^{inf}(B)$ y de extensiones finitas del cuerpo k . A continuación mostramos cómo funciona esto para el caso de curvas sobre $k = \bar{\mathbb{Q}}$, la clausura algebraica de \mathbb{Q} . Primero precisamos notación. Sea A una $\bar{\mathbb{Q}}$ -álgebra de dimensión 1, tal que $A/\mathfrak{m} = \bar{\mathbb{Q}}$ para todo maximal \mathfrak{m} (por ejemplo el anillo coordenado de una curva sobre $\bar{\mathbb{Q}}$ o su localización en un maximal). Sean B la normalización de A , $I = \text{ann}_A(B/A)$ el ideal conductor, $s = \dim_{\bar{\mathbb{Q}}}(A/I)_{red}$ y $b = \dim_{\bar{\mathbb{Q}}}(B/I)_{red}$. Consideremos la K -teoría y la homología cíclica relativa al morfismo de inclusión $\phi : A \rightarrow B$; por definición, se tiene una sucesión exacta

$$K_n(\phi) \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow K_n(B) \longrightarrow K_{n-1}(\phi)$$

La homología cíclica negativa relativa satisface una sucesión exacta análoga. Obtenemos el siguiente resultado (ver 4.8.1)

Teorema D *Con las notaciones del párrafo anterior se tiene*

i) *Si $n \leq -2$, $K_{-n}\phi = 0$.*

ii) *Hay una sucesión exacta*

$$0 \rightarrow K_0(\phi) \rightarrow HN_1(\phi) \rightarrow (\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Z})^{b-s} \rightarrow K_{-1}\phi \rightarrow HN_{-1}\phi \rightarrow 0$$

iii) *Para $n \geq 1$ se tiene*

$$K_n(\phi) = (K_{n+1}(\bar{\mathbb{Q}}))^{b-s} \oplus HN_n(\phi)$$

Si además $n \geq 2$, entonces $HN_n(\phi) = HN_n(A)$.

□

En el caso particular en que $b = s$, obtenemos (ver Corolario 4.8.2);

$$K_n(A) = HN_n(A) \oplus K_n(B) (n \geq 2)$$

Así, dado que las curvas planas son hipersuperficies con singularidades aisladas, vemos cómo los métodos y resultados del Capítulo 3 nos permiten calcular sus grupos de K-teoría. Además en la sección 4.9 damos un ejemplo de una hipersuperficie que no es curva plana para el que calculamos su K-teoría

Esta memoria de tesis está organizada en cuatro capítulos estructurados de la siguiente forma.

En el **primer capítulo** se introducen ciertos conceptos y definiciones básicas sobre las teorías de homología que estudiaremos a lo largo de esta tesis como la homología cíclica o la homología de Hochschild.

En el **segundo capítulo** nos centramos en el estudio de hipersuperficies. Consideramos A una k -álgebra con una presentación del tipo $A = R/I$ donde R es un dominio regular esencialmente de tipo finito e $I = fR$ es un ideal principal propio. En las secciones 2.1 y 2.2 se obtienen complejos sencillos

para calcular las homología de Hochschild, cíclica y cíclica negativa de A . En la sección 2.1 se define un complejo \mathcal{E}_p que involucra a la siguiente sucesión exacta larga

$$H^n(\mathcal{E}_p) \longrightarrow H_{dR}^n(R/f^{p+1}) \longrightarrow H_{dR}^n(R/f^p) \longrightarrow H^{n+1}(\mathcal{E}_p) \quad (12)$$

En 2.2 consideramos R un álgebra \mathbb{Z} -graduada y f un elemento homogéneo. Para este caso obtenemos un ejemplo (ver 2.2.8) que verifica que $H^q(\mathcal{E}_p) \neq 0$ para $q = m - 1, m$ y todo p . Luego, de (12) se sigue que los morfismos π_p^q con $q = m - 2, m - 1$ no son sobreyectivos para ningún p . A continuación nos centramos en el caso en el que el polinomio f pertenece a su ideal jacobiano. En 2.2.4 se prueba que la fórmula (6) es válida para un tal f (y en particular para f homogéneo) y escribimos en función de estos isomorfismos cómo queda el producto que dota a $HH_*(A)$ de estructura de álgebra. En la sección 2.4 estudiamos el caso particular en que A es un álgebra $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduada y f un elemento homogéneo de grado positivo. El resultado principal de esta sección es el Teorema 2.4.3 del cual la fórmula (5) se obtiene como corolario (ver 2.4.5). A continuación damos algunos ejemplos en los que calculamos la homología cíclica usando este resultado. Por otro lado, en la sección 2.5 utilizando las fórmulas obtenidas antes para el producto en la homología de Hochschild, obtenemos fórmulas análogas para el producto en la homología cíclica negativa.

El **tercer capítulo** concierne al cálculo de la homología cíclica de hipersuperficies singulares cuyas singularidades son aisladas. Los teoremas A y B se prueban en 3.4.7 y 3.5.2. De la demostración constructiva de los teoremas surge un algoritmo (ver 3.6) que nos permite determinar la cota κ_0 y las dimensiones l_i . Implementamos este algoritmo en el paquete Singular y lo aplicamos a algunos ejemplos de las listas de clasificación de singularidades de [AGLV]. Tanto la tabla de ejemplos como la explicación del algoritmo aparecen en los anexos I y II. En la última sección de este capítulo, la 3.7, nos centramos en el caso en que $\mathbf{bs}(f) = 1$ y probamos (8) y (9).

En el **cuarto capítulo** aplicamos los resultados obtenidos para calcular los grupos de K -teoría de ciertas hipersuperficies. En las secciones 4.1-4.4 se introducen conceptos básicos de K -teoría. En 4.5 se estudia el concepto de escisión y los cuadrados de Milnor. En la sección 6 se definen el caracter de Chern y la K -teoría infinitesimal. El resultado principal de la sección 4.8 es el Teorema 4.8.1, donde se prueba el Teorema D. Usando el Teorema D y el Teorema C podemos calcular la K -teoría de curvas planas con singularidades aisladas en función de la K -teoría de extensiones finitas del cuerpo base.

También calculamos la K -teoría en un ejemplo concreto que no es una curva plana.

En el **anexo I** exponemos una tabla que refleja el resultado obtenido cuando probamos los ejemplos de la lista de singularidades aisladas de [AGLV] en nuestro algoritmo.

En el **anexo II** explicamos el mecanismo de implementación de nuestro algoritmo en lenguaje Singular. También lo mostramos en pseudocódigo y realizamos una traza sobre un ejemplo concreto.

Capítulo 1

Preliminares

La principal intención de este capítulo es proporcionar unas ideas básicas sobre los conceptos que abarca este trabajo. Para ello empezaremos dando definiciones y propiedades de las teorías de homología que utilizaremos. También explicaremos cómo se relacionan. Finalmente expondremos uno de los métodos para calcular estas teorías de homología, utilizando álgebras de cadena, desarrollado en [FT], [FT1], [BV] y [CGG].

A lo largo de todo este trabajo k será un cuerpo de característica cero y A una k -álgebra asociativa con unidad. Para una introducción mas detallada al tema se puede consultar el libro [Lod].

1.1. Homología de Hochschild

Definición 1.1.1 El **complejo de Hochschild** $C_*(A)$ es el complejo dado por $C_n(A) = A \otimes A^{\otimes n}$ con el borde

$$\begin{aligned} b(a_0, \dots, a_n) &= \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (a_0, a_1, \dots, a_i \cdot a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n) + (-1)^n (a_n \cdot a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \end{aligned}$$

Aquí y en adelante \otimes denota a \otimes_k y $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ denota a $a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \in C_n(A)$. Los grupos $HH_*(A) = H_*(C(A), b)$ son la **homología de Hochschild de A** .

Notemos que $[n] \mapsto C_n(A)$ es un espacio vectorial simplicial, con morfismos cara y degeneración dados por

$$\begin{aligned} \mu_i : C_{n+1}(A) &\rightarrow C_n(A) & 0 \leq i \leq n+1 \\ \mu_i(a_0, \dots, a_n) &= \begin{cases} (a_0, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) & i \leq n \\ (a_{n+1} a_0, a_1, \dots, a_n) & i = n+1 \end{cases} \\ s_j : C_n(A) &\rightarrow C_{n+1}(A), & (0 \leq j \leq n) \\ s_j(a_0, \dots, a_n) &= (a_0, \dots, a_{j-1}, 1, a_j, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Observemos que

$$b = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \mu_i : C_{n+1}(A) \rightarrow C_n(A) \quad (n \geq 0)$$

Por [8.3.8] de [Wei], el subespacio graduado $D_*(A)$ con

$$D_{n+1}(A) = \sum_{i=0}^n s_i(C_n(A)) \subset C_{n+1}(A)$$

es un subcomplejo acíclico. Por tanto la proyección $C_*(A) \rightarrow \bar{C}_*(A) := C_*(A)/D_*(A)$ es un cuasi-isomorfismo. Se tiene

$$\bar{C}_n(A) = A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$$

donde $\bar{A} = A/k$.

Propiedades de la Homología de Hochschild

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ los grupos $HH_n(A)$ son k -espacios vectoriales.
2. Todo morfismo de k -álgebras $f : A \rightarrow A'$ induce un morfismo k -lineal de complejos entre $C(A)$ y $C(A')$ el cual induce un morfismo $f_n : HH_n(A) \rightarrow HH_n(A')$, es decir HH_n es un funtor covariante en la categoría de k -álgebras asociativas.
3. El funtor HH_n respeta el producto en el sentido siguiente:

$$HH_n(A \times A') = HH_n(A) \oplus HH_n(A').$$

Esto es debido a que el morfismo $C(A) \oplus C(A') \rightarrow C(A \otimes A')$ inducido por las inclusiones $A \rightarrow A \times A' \leftarrow A'$, es un cuasi-isomorfismo.

4. Sea $A^e = A \otimes A^{op}$. Notemos que A es un A^e -módulo a izquierda vía $(a \otimes b) \cdot x := axb$ y es un A^e -módulo a derecha vía $x \cdot (a \otimes b) := bxa$. Se prueba en [Lod, 1.1.13] que

$$HH_n(A) \cong Tor_n^{A^e}(A, A)$$

5. Si A es conmutativa, A^e también lo es y por tanto los $Tor_n^{A^e}(A, A)$, es decir, los $HH_n(A)$ son A -módulos. Esto también puede verse directamente a partir del complejo, ya que los $C_n(A)$ tienen estructura de A -módulos a izquierda, y como b es un morfismo de módulos para A conmutativa, se sigue que los grupos de homología $HH_n(A)$ son A -módulos.

6.

$$HH_0(A) = A \otimes_{A^e} A = \frac{A}{k \cdot \{a_0 a_1 - a_1 a_0 \mid a_0 \in A, a_1 \in A/k\}}$$

Luego si A es conmutativa se tiene que $HH_0(A) = A$

7. Si A es conmutativa, entonces $b : A \otimes A \rightarrow A$ es el morfismo 0, y se tiene

$$HH_1(A) = \frac{A \otimes A}{\{a \otimes bc - ab \otimes c - ac \otimes b \mid a, b, c \in A\}}$$

Se sigue de esta presentación que la aplicación $d : A \rightarrow HH_1(A)$ inducida por $A \rightarrow A \otimes A$, $a \mapsto 1 \otimes a$ es una derivación. Más aún, no es difícil ver que d es universal; por tanto $HH_1(A) = \Omega_A^1 := \Omega_{A/k}^1$, el módulo de diferenciales de Kähler (ver [Lod, 1.1.10]).

8. Sea A conmutativa, entonces para todo conjunto multiplicativamente cerrado $S \subseteq A$ se tiene que el funtor HH_* conmuta con el funtor localización, es decir

$$HH_*(S^{-1}(A)) = S^{-1}(HH_*(A))$$

Esto se deduce de la propiedad 4 y del hecho de que localizar es exacto.

Ejemplo $S(V)$.

Sea V un k -espacio, entonces denotamos por $A = S(V)$ al álgebra simétrica de V . Si $\{x_i : i \in I\}$ es una base de V se tiene que $S(V)$ se puede identificar con el anillo de polinomios $k[x_i]_{i \in I}$. Identificando $V \oplus 0$ con $V \otimes 1$ y $0 \oplus V$ con $1 \otimes V$ obtenemos $A^e = S(V \oplus V)$. Consideremos el morfismo $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ tal que $\mu(a \otimes b) = ab$. El núcleo de la restricción de μ a $V \oplus V$, que denotaremos por qV , es el espacio generado por los elementos de la forma $\{(v, -v) : v \in V\}$, donde $qv := (v, -v)$ se identifica con el elemento $v \otimes 1 - 1 \otimes v \in A \otimes A$. Entonces tenemos las igualdades $S(V) \otimes S(V) = S(V \oplus V) = S(V \oplus qV)$. Denotando dV a $V[-1]$ definimos el álgebra de cadenas

$$R_* : \dots \longrightarrow S(V \oplus qV) \otimes \Lambda^2 dV \xrightarrow{\partial} S(V \oplus qV) \otimes dV \xrightarrow{\partial} S(V \oplus qV)$$

donde $\partial : R_* \rightarrow R_{*-1}$ viene determinada por ser la única derivación que sobre los generadores verifica que $\partial dv = qv$ y $\partial v = \partial qv = 0$. Notar que $[\partial, \partial] = 2\partial^2$ puesto que ∂ tiene grado impar, por tanto ∂^2 es una derivación. Luego para ver que ∂^2 es cero basta ver que es cero sobre los generadores, pero esto es cierto ya que $\partial^2 v = \partial^2 qv = 0$ por definición y $\partial^2 dv = \partial qv = 0$. Por tanto R_* es un complejo de cadenas.

Veamos que además es una resolución proyectiva de A como A^e -módulo. Consideremos $D : R_* \rightarrow R_{*+1}$ la única derivación tal que $Dv = Ddv = 0$ y $Dqv = dv$. Entonces se tiene que sobre los generadores la derivación $[\partial, D]$ actúa como $[\partial, D](v) = 0$, $[\partial, D](qv) = qv$ y $[\partial, D](dv) = dv$. Definamos ahora una nueva graduación inducida por los pesos $\omega(v) = 0$ y $\omega(qv) = \omega(dv) = 1$. Sea $E : R_* \rightarrow R_*$ la derivación de Euler correspondiente a esta graduación, es decir $E(x) = \omega(x)x$ para cada x homogéneo con respecto a la graduación ω . Entonces E es la única derivación que sobre los generadores verifica que $E(v) = 0$, $E(qv) = qv$ y $E(dv) = dv$, por tanto $E = [\partial, D]$. En particular, $[E, \partial] = 0$, y por tanto $\omega(\partial x) = \omega(x)$ si $\partial x \neq 0$.

Sea $h : R_* \rightarrow R_{*+1}$ la aplicación $S(V)$ -lineal que para cada elemento homogéneo x lo envía a 0 si $\omega(x) = 0$ y a $1/\omega(x)D(x)$ si $\omega(x) \neq 0$. Consideremos la aumentación $\varepsilon : R_* \rightarrow S(V)$ definida a partir de los generadores como $\varepsilon(v) = v$ y $\varepsilon(qv) = \varepsilon(dv) = 0$. Entonces tenemos que $[\partial, h] \equiv id$ en $\ker \varepsilon$, para probarlo basta verlo para x homogéneo no nulo de grado positivo. Si $\partial x \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
[\partial, h](x) &= \partial h(x) + h\partial(x) \\
&= \partial\left(\frac{1}{\omega(x)}D(x)\right) + \frac{1}{\omega(\partial x)}D\partial(x) \\
&= \frac{1}{\omega(x)}[\partial, D](x) \\
&= \frac{1}{\omega(x)}E(x) \\
&= x
\end{aligned}$$

Una cuenta similar prueba que también se tiene $[\partial, h](x) = x$ si $\partial(x) = 0$. Está así demostrado que R_* es una resolución de $S(V)$. Luego usando la propiedad 4, tenemos que la homología de Hochschild de $S(V)$ es la homología del complejo

$$A \otimes_{A^e} R_* : \dots \xrightarrow{0} S(V) \otimes \Lambda^2 V \xrightarrow{0} S(V) \otimes V \xrightarrow{0} S(V)$$

Por tanto se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$HH_n(S(V)) = S(V) \otimes \Lambda^n V$$

Ejemplo $T(V)$.

Sea $A = T(V)$ el álgebra tensorial de V , es decir, $A = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ donde $V^{\otimes 0} = k$ y la multiplicación en A es la inducida por

$$(\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_p) \cdot (\nu_{p+1} \otimes \dots \otimes \nu_{p+q}) = (\nu_1 \otimes \nu_p \otimes \nu_{p+1} \otimes \dots \otimes \nu_{p+q})$$

Se demuestra que

$$P : A \otimes V \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{b'} A \quad (1.1)$$

es una A^e -resolución proyectiva aumentada de A , donde $b'(a \otimes b) = ab$ y $b'(a \otimes v \otimes b) = av \otimes b - a \otimes vb$. Para ver esto definiremos una aplicación k -lineal $s_* : P_* \rightarrow P_{*+1}$ tal que

$$sb' + b's = 1 \quad (1.2)$$

Sea $s_{-1} : A \rightarrow A \otimes A$, $s_{-1}(a) = 1 \otimes a$. Para definir s_0 consideremos primero la derivación $D : A \rightarrow A \otimes V \otimes A$ determinada por $D = 1 \otimes v \otimes 1$. Ponemos $s_0(a \otimes b) = aD(b)$; si $b = v_1 \otimes \dots \otimes v_p \in A$ entonces

$$s_0(a \otimes b) = - \sum_{i=1}^{p-1} av_1 \dots v_{i-1} \otimes v_i \otimes v_{i+1} \dots v_p - av_1 \dots v_{p-1} \otimes v_p \otimes 1$$

Utilizando estas fórmulas se tiene (1.2) por cálculo directo. En virtud de la propiedad 4, se tiene que la homología de Hochschild de A es la homología del complejo

$$A \otimes_{A^e} P_{\geq 0} : A \otimes V \xrightarrow{1-\sigma} A$$

Donde $P_{\geq 0}$ denota la parte P_i con $i \geq 0$ y σ es la permutación cíclica sobre cada potencia tensorial $V^{\otimes m}$, $\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = v_m \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{m-1}$. Por tanto

$$HH_n(T(V)) = \begin{cases} 0 & n \geq 2 \\ \ker(1 - \sigma) = \bigoplus_{m \geq 1} (V^{\otimes m})^\sigma & n = 1 \\ k \oplus \bigoplus_{m \geq 1} (V^{\otimes m})_\sigma & n = 0 \end{cases}$$

Aquí $(V^{\otimes m})^\sigma$ y $(V^{\otimes m})_\sigma$ son los invariantes y los coinvariantes bajo la acción de σ .

1.2. Producto en HH

Definición 1.2.1 Sea S_n el grupo simétrico actuando sobre el conjunto $\{1, \dots, n\}$. Una (p, q) -**permutación barajada** es una permutación σ en S_{p+q} tal que

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p) \quad y \quad \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \cdots < \sigma(p+q)$$

Para toda k -álgebra A , el grupo S_n actúa sobre $C_n(A)$ por

$$\sigma \cdot (a_0, a_1, \dots, a_n) := (a_0, a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(n)})$$

Denotemos por $Sh_{p,q}$ al conjunto de las permutaciones barajadas de tipo p, q . Sea A' otra k -álgebra. El **producto barajado**

$$- \times - = sh_{p,q} : C_p(A) \otimes C_q(A') \longrightarrow C_{p+q}(A \otimes A')$$

es el definido por

$$(a_0, a_1, \dots, a_p) \times (a'_0, a'_1, \dots, a'_q) = \sum_{\sigma \in Sh_{p,q}} sgn(\sigma) \sigma \cdot (a_0 \otimes a'_0, a_1 \otimes 1, \dots, a_p \otimes 1, 1 \otimes a'_1, \dots, 1 \otimes a'_q)$$

Propiedades del producto barajado

- El borde de Hochschild es una derivación graduada para este producto. En efecto, se tiene (ver [Lod, 4.2.2])

$$b(x \times y) = b(x) \times y + (-1)^{|x|} x \times b(y) \quad x \in C_p(A), y \in C_q(A') \quad (1.3)$$

- Sea

$$sh_n : (C_*(A) \otimes C_*(A'))_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p(A) \otimes C_q(A') \rightarrow C_n(A \otimes A')$$

la aplicación $sh_n = \sum_{p+q=n} sh_{p,q}$. La aplicación $sh_* : C_*(A) \otimes C_*(A') \rightarrow C_*(A \otimes A')$ es la llamada aplicación barajada o shuffle; es un cuasi-isomorfismo por el teorema de Eilenberg-Zilber (ver [Lod, 4.2.2]).

- Si A es conmutativa, entonces el morfismo $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ dado por $\mu(a \otimes b) = ab$ es un morfismo de álgebras. Componiendo el producto barajado con la aplicación inducida por μ se obtiene un producto barajado interno en $HH(A) = \bigoplus_{n \geq 0} HH_n(A)$ que, abusando de la notación, denotamos también como \times . Este producto junto con la derivación b dotan a $HH(A)$ de estructura de álgebra diferencial graduada.

Formas diferenciales

Definición 1.2.2 Se define el A -módulo de n -formas diferenciales como el producto exterior de A -módulos

$$\Omega_A^n = \Lambda_A^n \Omega_A^1,$$

que está generado por los elementos de la forma $a_0 da_1 \wedge \cdots \wedge da_n$, que denotaremos por $a_0 da_1 \dots da_n$. El álgebra exterior $\Omega_A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega_A^n$ es el **álgebra de formas diferenciales de A** .

Por la propiedad universal del álgebra exterior, el isomorfismo $\Omega_A^1 = HH_1(A)$ de 1.1.7 se extiende a un morfismo de álgebras graduadas

$$\varepsilon : \Omega_A \rightarrow HH(A)$$

que asigna a la forma $a_0 da_1 \dots da_n$, la clase de

$$(a_0, a_1) \times (1, a_2) \times \cdots \times (1, a_n) \quad (1.4)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (a_0, a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) \quad (1.5)$$

Por otra parte tenemos la aplicación

$$\mu : C_*A \rightarrow \Omega_A^*, \quad \mu(a_0, \dots, a_n) = \frac{1}{n!} a_0 da_1 \dots da_n \quad (1.6)$$

Un cálculo sencillo muestra que $\mu \circ b = 0$; en otras palabras, μ es un morfismo de complejos $(C_*(A), b) \rightarrow (\Omega_A^*, 0)$. Por tanto μ induce un morfismo en homología $HH_*A \rightarrow \Omega_A^*$. Se sigue de (1.4) que $\mu \circ \varepsilon = 1$. Por tanto Ω_A^* es un sumando directo de HH_*A :

$$HH_*(A) = \Omega_A^* \oplus ? \quad (1.7)$$

Para el siguiente teorema recordamos algunos conceptos de álgebra conmutativa. Sea A una k -álgebra conmutativa. Decimos que A es **de tipo finito** si A es isomorfa a un cociente $A = k[x_1, \dots, x_m]/I$ de un anillo de polinomios en un número finito de variables y que es **esencialmente de tipo finito** si es de la forma $A = S^{-1}B$ para algún álgebra B de tipo finito y alguna parte multiplicativamente cerrada $S \subset B$. Notemos que toda álgebra esencialmente de tipo finito es un anillo noetheriano. Un anillo noetheriano A se dice **regular** si todo A -módulo finitamente generado admite una resolución proyectiva de longitud finita.

Teorema 1.2.3 (Hochschild-Kostant-Rosenberg, ver [Lod]) *Sea A una k -álgebra conmutativa esencialmente de tipo finito. Si A es regular, entonces el término ? de (1.7) es cero. En particular los morfismos ε y μ definidos arriba son isomorfismos inversos.*

Observación 1.2.4 Notemos que el morfismo ε está definido aún en el caso en que k tenga característica positiva. De hecho el teorema anterior es cierto para k perfecto. La recíproca del teorema, es decir, que el hecho de que ε_* sea un isomorfismo implica que A es regular, fue probado por A. Campillo, J.A. Guccione, J.J. Guccione, M.J. Redondo, A. Solotar y O.E. Villamayor ([CBACH]) para el caso de característica cero; casi simultáneamente Avramov y Vigué ([AV]) probaron el mismo resultado para característica arbitraria.

1.3. Cohomología de de Rham

Sean A una k -álgebra conmutativa, y Ω_A^* el álgebra de formas diferenciales. La derivación universal $d : A \rightarrow \Omega_A^1$ se extiende de forma única a una derivación $d : \Omega_A^* \rightarrow \Omega_A^{*+1}$; se tiene

$$d(a_0 da_1 \dots da_n) = da_0 \dots da_n$$

Dado que $d^2 = 0$, se tiene que $d \circ d = 0$; por tanto Ω_A^* es un álgebra diferencial graduada (de cocadenas). Su cohomología se llama **cohomología de de Rham** de A

$$H_{dR}^* A := H^*(\Omega_A, d)$$

La estructura de álgebra diferencial de Ω_A^* induce una de álgebra graduada en $H_{dR}^* A$. Notemos además que todo morfismo de k -álgebras $A \rightarrow B$ induce uno de k -álgebras diferenciales graduadas $\Omega_A \rightarrow \Omega_B$, y por tanto uno de álgebras $H_{dR}^* A \rightarrow H_{dR}^* B$.

Acción de derivaciones en $H_{dR}^*(A)$.

Sea $D : A \rightarrow A$ una derivación k -lineal. Por la propiedad universal de $d : A \rightarrow \Omega_A^1$, D se factoriza en forma única como d seguida de un morfismo de A -módulos. Tenemos $D = \iota_D \circ d$, donde $\iota_D(adb) = aDb$. A su vez, ι_D se extiende en forma única a una derivación A -lineal $\iota_D : \Omega_A^* \rightarrow \Omega_A^{*-1}$. Dado que $\iota_D^2(da) = \iota_D(Da) = 0$, se sigue que $\iota_D^2 = 0$. Sea

$$L_D = [d, \iota_D] = d\iota_D + \iota_D d \quad (1.8)$$

Entonces L_D es una derivación,

$$[L_D, d] = 0 \text{ y } L_D(a) = \iota_D d(a) = D(a) \quad (a \in A) \quad (1.9)$$

Más aún, es fácil ver que L_D es la única derivación que verifica (1.9). En particular L_D es un morfismo de complejos; (1.8) dice que este morfismo es homotópico a 0. Por tanto la aplicación inducida es nula

$$L_D \equiv 0 : H_{dR}^* A \rightarrow H_{dR}^* A$$

Aplicación 1.3.1 Sean $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ un álgebra graduada, y $E : A \rightarrow A$, $E(a) = |a|a$, la derivación de Euler asociada a la graduación.

La graduación de A induce una en Ω_A^* ,

$$\Omega_A^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} {}_n\Omega_A^*$$

La restricción de L_D a ${}_n\Omega_A^*$ es la homotecia de razón n . Como $[L_D, d] = 0$, se sigue que d preserva esta descomposición en pesos; por tanto $H_{dR}^*(A) = \bigoplus_n H^*({}_n\Omega_A^*)$. De lo visto en el apartado anterior se sigue que $H^*({}_n\Omega_A^*) = 0$ si $n \neq 0$. Por tanto

$$H_{dR}^*(A) = H^*({}_0\Omega_A^*)$$

En el caso en que la graduación es no negativa (es decir $A_n = 0$ para $n < 0$) se tiene además ${}_0\Omega_A^* = \Omega_{A_0}^*$, y por tanto

$$H_{dR}^*(A) = H_{dR}^*(A_0) \quad \text{si } A_n = 0 \text{ para } n < 0 \quad (1.10)$$

Ejemplo 1.3.2 Sea $A = S(V)$, el álgebra simétrica del espacio vectorial V . Entonces, por lo visto en la sección 1.1, $\Omega_A^1 = A \otimes V$, y $d : A \rightarrow A \otimes V$ es la derivación determinada por $dv = 1 \otimes v$. Por tanto $\Omega_A^* = A \otimes \Lambda^*V$, y $d : A \otimes \Lambda^*V \rightarrow A \otimes \Lambda^{*+1}V$ es la única derivación con $dv = 1 \otimes v$ y $d \circ d = 0$. Si E es la derivación de Euler y $v \in V$, entonces ι_E es la única derivación A -lineal tal que $\iota_E(dv) = v$. En particular si $\dim V = m < \infty$, y $\{x_1, \dots, x_m\}$ es una base, entonces $A = k[x_1, \dots, x_m]$ y (Ω_A, ι_E) es el complejo de Koszul de x_1, \dots, x_m .

1.4. Homologías cíclica, periódica y negativa

Ya vimos que si A es un álgebra entonces $(C(A), b)$ y su cociente $(\bar{C}(A), b)$ son complejos de cadenas cuasi-isomorfos. Además tenemos un operador $B : \bar{C}_*(A) \rightarrow \bar{C}_{*+1}(A)$, el **operador de Connes**, definido por

$$B(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n \cdot i} (1, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n, a_0, \dots, a_{i-1})$$

Vemos que $B^2 = 0$; por tanto $(\bar{C}_*(A), B)$ es un complejo de cocadenas. Además un cálculo sencillo muestra que b y B anticonmutan:

$$[b, B] = bB + Bb = 0$$

Toda vez que tenemos un triple (\bar{C}_*, b, B) de modo que (\bar{C}_*, b) es complejo de cadenas, (\bar{C}_*, B) de cocadenas y b y B anticonmutan, decimos que (\bar{C}_*, b, B) es un **complejo mezclado**.

Consideremos el complejo doble $\mathcal{CP}(A)$, que llamaremos complejo doble periódico

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\
 \cdots & \xleftarrow{B} & A \otimes \bar{A}^{\otimes 4} & \xleftarrow{B} & A \otimes \bar{A}^{\otimes 3} & \xleftarrow{B} & A \otimes \bar{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & A \otimes \bar{A} & \xleftarrow{B} & \cdots \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\
 \cdots & \xleftarrow{B} & A \otimes \bar{A}^{\otimes 3} & \xleftarrow{B} & A \otimes \bar{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & A \otimes \bar{A} & \xleftarrow{B} & A & & \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & & & \\
 \cdots & \xleftarrow{B} & A \otimes \bar{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & A \otimes \bar{A} & \xleftarrow{B} & A & & & & \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & & & & & \\
 \cdots & \xleftarrow{B} & A \otimes \bar{A} & \xleftarrow{B} & A & & & & & & \\
 & & \downarrow b & & & & & & & & \\
 \cdots & \xleftarrow{B} & A & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 \cdots & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 & & \cdots
 \end{array}$$

Se define la **homología cíclica periódica** de A como la homología del complejo total (producto)

$$HP_n(A) = H_n(Tot_*(\mathcal{CP}(A), b + B)).$$

Notar que si tenemos un morfismo entre dos álgebras $f : A \rightarrow B$ éste induce un morfismo a nivel de los complejos $\mathcal{CP}(A) \rightarrow \mathcal{CP}(B)$. Que dicho morfismo conmuta con la b ya se tenía por el apartado de homología de Hochschild y que conmuta con la B se deduce a partir de la fórmula de B . Por tanto se tiene que HP_* es un funtor.

Observar que para cada n entero, $Tot_{2n}(\mathcal{CP}(A)) = A \times A \otimes \bar{A}^{\otimes 2} \times A \otimes \bar{A}^{\otimes 4} \times \dots$ y que $Tot_{2n+1}(\mathcal{CP}(A)) = A \otimes \bar{A} \times A \otimes \bar{A}^{\otimes 3} \times \dots$. Por tanto el complejo total de $\mathcal{CP}(A)$ es un complejo periódico de orden 2.

Si en vez de considerar este complejo, consideramos el subcomplejo truncado formado por la columna cero y las columnas negativas se obtiene un nuevo complejo doble que denotaremos $\mathcal{CN}(A)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\
 \cdots & \xleftarrow{B} & A \otimes \overline{A}^{\otimes 3} & \xleftarrow{B} & A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} & & \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\
 \cdots & \xleftarrow{B} & A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & A \otimes \overline{A} & & \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\
 \cdots & \xleftarrow{B} & A \otimes \overline{A} & \xleftarrow{B} & A & & \\
 & & \downarrow b & & & & \\
 \cdots & \xleftarrow{B} & A & & & & \\
 & & & & & & \\
 \cdots & & -1 & & 0 & &
 \end{array}$$

Se definen los grupos de **homología cíclica negativa** como los grupos de homología del complejo total de $\mathcal{CN}(A)$

$$HN_n(A) = H_n(\text{Tot}_*(\mathcal{CN}(A), b + B)).$$

Si ahora consideramos el complejo cociente entre $\mathcal{CP}(A)$ y $\mathcal{CN}(A)$ obtenemos el complejo doble

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\
 A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & A \otimes \overline{A} & \xleftarrow{B} & A & & \\
 \downarrow b & & \downarrow b & & & & \\
 A \otimes \overline{A} & \xleftarrow{B} & A & & & & \\
 \downarrow b & & & & & & \\
 A & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & 2 & & 3 & & 4 & \cdots
 \end{array}$$

Definimos el complejo doble $\mathcal{B}(A)$ como el complejo anterior rodado dos columnas a la izquierda, de esta forma tenemos la sucesión exacta de complejos

$$0 \rightarrow Tot_*(\mathcal{CN}(A)) \rightarrow Tot_*(\mathcal{CP}(A)) \rightarrow Tot_*(\mathcal{B}(A))[-2] \rightarrow 0. \quad (1.11)$$

Se define la **homología cíclica** de A como la homología del complejo total de $\mathcal{B}(A)$

$$HC_n(A) = H_n(Tot_*(\mathcal{B}(A)), b + B).$$

Tal y como están definidos los complejos se pueden deducir fácilmente varias sucesiones exactas de complejos como

$$0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow Tot_*(\mathcal{B}(A)) \rightarrow Tot_*(\mathcal{B}(A))[-2] \rightarrow 0 \quad (1.12)$$

$$0 \rightarrow Tot_*(\mathcal{CN}(A))[2] \rightarrow Tot_*(\mathcal{CN}(A)) \rightarrow C_*(A) \rightarrow 0$$

Estas sucesiones, junto con la sucesión (1.11), dan lugar a las sucesiones exactas largas de homología

$$\cdots \longrightarrow HH_n(A) \xrightarrow{I} HC_n(A) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B} HH_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \quad (1.13)$$

$$\cdots \longrightarrow HN_{n+2}(A) \xrightarrow{S} HN_n(A) \xrightarrow{I} HH_n(A) \xrightarrow{B} HN_{n+1}(A) \longrightarrow \cdots \quad (1.14)$$

$$\cdots \longrightarrow HC_{n-1}(A) \xrightarrow{B} HN_n(A) \xrightarrow{I} HP_n(A) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A) \longrightarrow \cdots \quad (1.15)$$

La sucesión (1.13) se denomina **sucesión exacta de Connes**.

Propiedades de la homología cíclica

- Todas estas teorías de homología son funtoriales pues todas se deducen del complejo \mathcal{CP} y éste verifica que todo morfismo $f : A \rightarrow B$ induce un morfismo de complejos doble $\mathcal{CP}(A) \rightarrow \mathcal{CP}(B)$ y por tanto entre las homologías.
- Sea $\{f_i : A_i \rightarrow A_{i+1}\}_{i \in I}$ un sistema directo en la categoría de k -álgebras asociativas. Entonces se tiene que para todo n ,

$$\varprojlim_i HC_n(A_i) \cong HC_n(\varprojlim_i A_i)$$

- De la sucesión (1.13) se deduce que $HC_0(A) = HH_0(A)$ y que $HC_1(A) = \text{coker}(BI : HH_0A \rightarrow HH_1A)$. Si A es conmutativa se tiene $HH_0(A) = A$, $HH_1(A) = \Omega_A^1$ y $BI = d$; por tanto $HC_0(A) = A$ y $HC_1(A) = \Omega_A^1/d\Omega_A^0$.

Teorema 1.4.1 (Goodwillie) Sean A un álgebra, e $I \subset A$ un ideal nilpotente. Entonces el morfismo $HP_*(A) \rightarrow HP_*(A/I)$ inducido por la proyección al cociente es un isomorfismo.

Para la demostración ver el apartado 4.1.15 de [Lod].

Ejemplo 1.4.2 Si consideramos $A = k$ tenemos que $\bar{A} = 0$ por tanto el complejo $\mathcal{CP}(k)$ queda

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b \\
 \cdots & \xleftarrow{B} & 0 & \xleftarrow{B} & 0 & \xleftarrow{B} & k \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\
 \cdots & \xleftarrow{B} & 0 & \xleftarrow{B} & k & & \\
 & & \downarrow b & & & & \\
 \cdots & \xleftarrow{B} & k & & & & \\
 & & & & & & \\
 \cdots & & -1 & & 0 & & 1 & & \cdots
 \end{array}$$

En consecuencia las homología cíclica, periódica y negativa son

$$HC_n(k) = \begin{cases} k & n \text{ par } n \geq 0 \\ 0 & n \text{ impar o } n < 0 \end{cases}$$

$$HP_n(k) = \begin{cases} k & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$HN_n(k) = \begin{cases} k & n \text{ par } n \leq 0 \\ 0 & n \text{ impar o } n > 0 \end{cases}$$

Homología cíclica y formas diferenciales.

Sea A una k -álgebra conmutativa. El morfismo de complejos $\mu : (\bar{C}_*(A), b) \rightarrow (\Omega_A^*, 0)$ de (1.6) verifica además que $\mu B = d\mu$. En otras palabras la aplicación

$\mu : (\bar{C}_*(A), b, B) \rightarrow (\Omega_A^*, 0, d)$ es morfismo de complejos mezclados. Por tanto induce morfismos de complejos dobles periódicos, cíclicos y cíclicos negativos. Tomando homología obtenemos morfismos:

$$\begin{aligned} HC_n(A) &\rightarrow \frac{\Omega_A^n}{d\Omega_A^{n-1}} \oplus H_{dR}^{n-2}(A) \oplus H_{dR}^{n-4}(A) \oplus \dots \\ HN_n(A) &\rightarrow Z^n \Omega_A \oplus \prod_{j \geq 0} H_{dR}^{2j+n}(A) \\ HP_n(A) &\rightarrow \prod_{j \geq 0} H_{dR}^{2j+n}(A) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Aquí

$$Z^n \Omega_A := \ker(d : \Omega_A^n \rightarrow \Omega_A^{n+1}). \quad (1.17)$$

Si A es esencialmente de tipo finito y regular, entonces por el teorema (1.2.3) y la sucesión (1.13), se sigue que el primero de los morfismos (1.16) es un isomorfismo. Utilizando 3.5.8 de [Wei] se prueba que también el tercero es un isomorfismo; de (1.15) deducimos que lo mismo es cierto del segundo.

Ejemplo 1.4.3 Si $A = k[x_1, \dots, x_m]$ entonces por 1.3.1 se tiene

$$HC_n(A) = \begin{cases} HC_n(k) \oplus \Omega_A^n / d(\Omega_A^{n-1}) & n \geq 1 \\ A & n = 0 \end{cases}$$

□

Se prueba en [Lod, 4.3.3] que para $x, y \in \bar{C}_*(A)$,

$$B(x \times y) \equiv B(x) \times y + (-1)^{|x|} x \times B(y) \pmod{b(\bar{C}(A))}$$

En particular el morfismo $BI : HH_*(A) \rightarrow HH_{*+1}(A)$ inducido por B es una derivación para el producto barajado (ver 4.3.4 de [Lod]). Se sigue de (1.4) que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega_A^n & \xrightarrow{d} & \Omega_A^{n+1} \\ \varepsilon_n \downarrow & & \downarrow \varepsilon_{n+1} \\ HH_n(A) & \xrightarrow{BI} & HH_{n+1}(A) \end{array}$$

conmuta. En particular ε_n envía $d\Omega_A^{n-1}$ en $B(HC_{n-1}(A))$ y por tanto induce un morfismo

$$\varepsilon_n : \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1} \rightarrow HC_n(A) \quad (1.18)$$

Se sigue que el morfismo $HC_n(A) \rightarrow \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1}$ inducido por μ es sobreyectivo, del cual (1.18) es una inversa a derecha. Por tanto

$$HC_n A = \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1} \oplus ?$$

1.5. Homología cíclica y derivaciones.

1.5.1 Sean A una k -álgebra y D una derivación en A . En la sección 1.3 se muestra que si A es conmutativa, podemos extender D a una derivación $L_D : \Omega_A \rightarrow \Omega_A$ que es un morfismo de complejos homotópico a cero. En general, para A no necesariamente conmutativa, D se extiende a un endomorfismo de complejos mezclados de $(\bar{C}_*(A), b, B)$ dado por

$$L_D(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i \geq 0} a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes D(a_i) \otimes \cdots \otimes a_n$$

Si A es conmutativa, el morfismo de complejos mezclados $\mu : (\bar{C}_*(A), b, B) \rightarrow (\Omega_A^*, 0, d)$ introducido en la sección anterior conmuta con la acción de D , esto es, $L_D \mu = \mu L_D$.

Teorema 1.5.2 (Goodwillie, ver [Lod, 4.1.10]) Sean A una k -álgebra y D una derivación en A . Entonces

$$L_D \circ S = 0$$

en $HC_*(A)$, donde S es el morfismo que aparece en la sucesión de Connes.

Corolario 1.5.3 En las condiciones del teorema anterior se tiene que

$$L_D = 0$$

en $HP_*(A)$.

Para la demostración ver [Lod] corolario 4.1.11.

Aplicación 1.5.4 Si A es un álgebra no negativamente graduada, un razonamiento similar al expuesto en (1.3.1) muestra que

$$HP_*(A) = HP_*(A_0)$$

Similarmente, si $HC_*(A)_+$ es la parte de peso estrictamente positivo para la descomposición inducida por la graduación, se tiene que

$$HC_*(A) = HC_*(A_0) \oplus HC_*(A)_+ \quad \text{y} \quad S(HC_*(A)_+) = 0$$

1.6. Cohomología Infinitesimal

Definición 1.6.1 Sea A una k -álgebra conmutativa. Se dice que A es **formalmente suave** si para todo par (C, I) , donde C es una k -álgebra conmutativa e I un ideal de C tal que $I^2 = 0$, se verifica que para todo morfismo de k -álgebras $f : A \rightarrow C/I$ existe un morfismo $h : A \rightarrow C$ tal que $\pi \circ h = f$

$$\begin{array}{ccc}
 k & \xrightarrow{\quad} & C \\
 \downarrow & \nearrow \exists h & \downarrow \pi \\
 A & \xrightarrow{f} & C/I
 \end{array}$$

Ejemplo 1.6.2 El álgebra simétrica $S(V)$ de un espacio vectorial V tiene la propiedad de levantamiento de la definición anterior para todo morfismo sobreyectivo π , sea su núcleo nilpotente o no. En particular, $S(V)$ es formalmente suave. La clase de las álgebras formalmente suaves es cerrada por localización y por producto tensorial sobre k . Si R es esencialmente de tipo finito, entonces R es suave si y sólo si es regular.

Notemos que toda álgebra conmutativa A puede escribirse como un cociente $A = S/I$ con S formalmente suave; basta tomar $S = S(A)$. Si A es (esencialmente) de tipo finito, puede tomarse S como (una localización de) un anillo de polinomios en finitas variables.

Definición 1.6.3 Sea A una k -álgebra conmutativa. Entonces existen una k -álgebra formalmente suave R y un ideal I de R tal que $A \cong R/I$. Para todo $p \geq 0$ se define el p -ésimo grupo de **cohomología infinitesimal** de A como

$$H_{inf}^p(A) = H^p(\varprojlim_n \Omega_{R/I^n}^*, d),$$

donde el límite está tomado sobre los morfismos de complejos

$$\pi_\kappa : (\Omega_{R/I^{\kappa+1}}^*, d) \rightarrow (\Omega_{R/I^\kappa}^*, d).$$

La definición anterior es independiente de la presentación $A = R/I$ elegida y resulta funtorial; esto requiere una demostración, que bosquejamos a continuación (ver [Har] para otra demostración en el caso esencialmente de tipo finito). Veamos primero que todo morfismo $f : A = R/I \rightarrow B = S/J$ puede levantarse a un morfismo de sistemas inversos $\{f_n : R/I^{n+1} \rightarrow S/J^{n+1}\}_n$ con

$f_0 = f$. Esto se sigue de la suavidad formal de R . Por ejemplo para el primer paso consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & S/J^2 \\
 & & & & & \nearrow & \downarrow \\
 & & & & & f_1 & \\
 R & \longrightarrow & R/I^2 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & C/J = B
 \end{array}$$

La flecha punteada exterior existe porque R es formalmente suave. Como el diagrama exterior conmuta, esta flecha envía I en J/J^2 y por tanto I^2 en 0 ; por tanto induce la flecha f_1 . De forma análoga se va construyendo un morfismo de sistemas inversos $\{f_n\}$ el cual induce un morfismo entre los sistemas inversos de complejos de de Rham $((\Omega_{R/I^n}, d), \pi_n) \rightarrow ((\Omega_{S/J^n}, d), \pi_n)$. Tomando límite se obtiene un morfismo de complejos

$$\hat{f} : \hat{\Omega}_R := \varprojlim \Omega_{R/I^n} \rightarrow \hat{\Omega}_S$$

que a su vez induce otro morfismo en la cohomología $\hat{f} : H_{inf}^n(A) \rightarrow H_{inf}^n(B)$. Supongamos que $\{g_n : R/I^{n+1} \rightarrow S/J^{n+1}\}$ es otro morfismo de sistemas inversos con $g_0 = f$. Sea $\hat{g} = \varprojlim g_n$ y consideremos

$$\{h_n = f_n \otimes g_n : R/I^{n+1} \otimes R/I^{n+1} \rightarrow S/J^{n+1}\}_n$$

y $\hat{h} = \varprojlim h_n$. Si $\iota, \iota' : R \rightarrow R \otimes R$ son las dos inclusiones canónicas, e $\iota_n, \iota'_n, \hat{\iota}$ los morfismos inducidos, entonces $f_n = h_n \iota_n$ y $g_n = h_n \iota'_n$, de donde

$$\hat{f} = \hat{h} \hat{\iota} \text{ y } \hat{g} = \hat{h} \hat{\iota}'. \quad (1.19)$$

Sea $qR = \ker(R \otimes R \rightarrow R)$; como $f_0 = g_0 = f$, $h_n(qR^n) = 0$. Notemos que las filtraciones $\{qR^{n+1} + I^{n+1} \otimes R + R \otimes I^{n+1}\}_n$ y $\{qR^{n+1} + I^{n+1} \otimes R\}_n$ definen la misma topología en $R \otimes R$. Se prueba (como en 2.1 de [Cor3]) que hay un isomorfismo

$$\frac{R \otimes R}{qR^{n+1}} = \bigoplus_{p=0}^n S_R^p(\Omega_R^1) \quad (1.20)$$

Aquí S_R^n es la potencia simétrica de R -módulos. El isomorfismo envía ι_n en la inclusión canónica $\hat{R} = S_R^0(\Omega_R^1)$; $\iota'_n - \iota$ envía R en $S_R^+(\Omega_R^1)$. Se sigue que

$$\frac{R \otimes R}{qR^{n+1} + I^{n+1} \otimes R} = \bigoplus_{p=0}^n \frac{S_R^p(\Omega_R^1)}{I^{n+1} S_R^p(\Omega_R^1)}$$

Utilizando la derivación de Euler asociada a esta graduación, procediendo como en (1.3.1) y tomando límite, se obtiene una homotopía $\hat{l} \sim \hat{l}' : \hat{\Omega}_R \rightarrow \hat{\Omega}_{R \otimes R}$; en vista de la factorización (1.19), $\hat{f} \sim \hat{g} : \hat{\Omega}_R \rightarrow \hat{\Omega}_S$, y por tanto inducen el mismo morfismo en cohomología.

Como consecuencia se tiene que si tenemos dos morfismos componibles f y g , puede que la composición de los levantamientos \hat{f} y \hat{g} elegidos no sea el levantamiento $\widehat{g \circ f}$ elegido para la composición, pero son homotópicamente equivalentes, y por tanto inducen el mismo morfismo a nivel de cohomología. Si ahora $R/I \cong A \cong S/J$ son dos presentaciones de la misma álgebra A , tenemos isomorfismos inversos $f : R/I \leftrightarrow S/J : g$, y sus levantados

$$\{f_n : R/I^n \rightarrow S/J^n : g_n\}$$

inducen equivalencias de homotopía inversas $\hat{f} : \hat{\Omega}_R \leftrightarrow \hat{\Omega}_S : \hat{g}$. Se sigue que la definición de $H_{inf}^*(A)$ no depende de la representación elegida de A . De la demostración presentada es claro también que H_{inf}^* es un funtor.

Cohomología infinitesimal y homología cíclica periódica.

Sean A un álgebra conmutativa y $A = R/I$ una presentación como cociente de un álgebra formalmente suave R . Sea μ el morfismo de complejos mezclados introducido en (1.6). Tenemos un morfismo de sistemas inversos de complejos mezclados $\mu : \{(\bar{C}(R/I^n), b, B)\}_n \rightarrow \{(\Omega_{R/I^n}, 0, d)\}_n$ y en particular uno entre los sistemas de complejos periódicos asociados

$$\mu : \{(\mathcal{CP}_*(R/I^n), b + B)\}_n \rightarrow \left\{ \prod_{j \in \mathbb{Z}} (\Omega_{R/I^n}^{-*+2j}, d) \right\}$$

Tomando límite se obtiene la flecha horizontal del diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} \lim_n \mathcal{CP}_*(R/I^n) & \xrightarrow{\mu} & \prod_{j \in \mathbb{Z}} (\Omega_{R/I^n}^{-*+2j}, d) \\ \pi \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{CP}_*(A) & & \end{array} \quad (1.21)$$

La flecha vertical es el morfismo natural del límite a $\mathcal{CP}_*(R/I)$. Dado que HP es invariante por extensiones nilpotentes (1.4.1) π es una equivalencia homotópica. La flecha punteada se obtiene componiendo μ con una inversa

homotópica de π ; el diagrama conmuta módulo homotopía. En particular la flecha punteada induce un morfismo en homología

$$HP_n(A) \rightarrow \prod_{j \in \mathbb{Z}} H_{inf}^{2j-n} A \quad (1.22)$$

Teorema 1.6.4 *La aplicación (1.22) es un isomorfismo.*

El teorema anterior fue probado por Feigin y Tsygan [FT] para el caso esencialmente de tipo finito; el caso general se prueba en [Cor2].

1.7. Descomposición de Hodge.

Definición 1.7.1 Un álgebra conmutativa R se dice que es **homológicamente regular** si la aplicación canónica

$$HH_n(R) \rightarrow \Omega_R^n$$

es un isomorfismo para todo n .

Observación 1.7.2 Si V es un espacio vectorial, $S(V)$ es homológicamente regular (1.1). Si R es esencialmente de tipo finito, entonces R es homológicamente regular si y sólo si es regular, por (1.2.4).

Definición 1.7.3 Un **álgebra de cadenas** es un álgebra diferencial Γ cuya diferencial ∂ tiene grado -1 ; $\partial : \Gamma_* \rightarrow \Gamma_{*-1}$. Notemos que toda álgebra conmutativa puede verse como un álgebra de cadenas concentrada en grado cero.

Definición 1.7.4 Sea A una k -álgebra conmutativa, un **modelo de cadena** de A es un cuasi-isomorfismo sobreyectivo $\pi : \Gamma \rightarrow A$ de álgebras de cadena, tal que $R = \Gamma_0$ es homológicamente regular y $\Gamma = R \otimes \Lambda V$ como álgebra graduada, para algún espacio vectorial $V = \bigoplus_{i \geq 1} V_i$.

Es un hecho conocido que toda álgebra conmutativa A tiene un modelo de cadenas. Si A es esencialmente de tipo finito, se pueden tomar R regular y los V_i de dimensión finita. Sea $\Gamma \rightarrow A$ un modelo de cadenas. Denotamos $dV = V[-1]$ y consideramos el morfismo identidad $d : V \rightarrow dV$ que va a ser un morfismo de grado -1 . Entonces, para cada $p \geq 0$ el Γ -módulo diferencial de p -formas diferenciales es

$$\Omega_\Gamma^p = \bigoplus_{p_0 + p_1 = p} \Omega_R^{p_0} \otimes \Lambda(V) \otimes \Lambda^{p_1}(dV)$$

Tenemos un único morfismo homogéneo $d : \Omega_\Gamma^p \rightarrow \Omega_\Gamma^{p+1}$ de grado -1 , determinado por la regla de Leibniz, la condición de que extienda a los morfismos $d : V \rightarrow dV$ y $d : \Omega_R^* \rightarrow \Omega_R^{*+1}$, y la condición de que $d \circ d = 0$. Por otro lado también existe una única diferencial $\partial : (\Omega_\Gamma^p)_* \rightarrow (\Omega_\Gamma^p)_{*-1}$, determinada por la regla de Leibniz, la condición de que extienda la derivación $\partial : \Gamma_* \rightarrow \Gamma_{*-1}$ y la condición de que $[\partial, d] = 0$.

Luego se obtiene un complejo doble en el segundo cuadrante $\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}_{p,q}, \partial, d)$ con la parte de grado $q - p$ de Ω_Γ^p colocada en el lugar (p, q) .

$$\mathfrak{C}_{p,q} = (\Omega_\Gamma^{-p})_{p+q} \quad (1.23)$$

El complejo total $\widehat{\Omega}_\Gamma := Tot_*(\mathfrak{C})$ es un álgebra de cadenas. Consideremos los ideales diferenciales

$$\widehat{\Omega}_\Gamma^{\geq p+1} := Tot_*(\mathfrak{C}_{\leq -p-1,*})$$

de $\widehat{\Omega}_\Gamma \supset \widehat{\Omega}_\Gamma^{\geq p+1}$, y denotemos $\Omega_\Gamma^{\leq p} = \widehat{\Omega}_\Gamma / \widehat{\Omega}_\Gamma^{\geq p+1}$. Consideremos también los ideales diferenciales $\mathcal{F}^p \Omega_R \subset \Omega_R$, dados por

$$\mathcal{F}^p \Omega_R^q = \begin{cases} I^{p-q} \Omega_R^q, & q < p \\ \Omega_R^q, & q \geq p \end{cases}$$

Aquí $I = \ker(\pi : R \rightarrow A)$.

Entonces por [CGG] y [FT] tenemos morfismos naturales

$$H_*(\Omega_\Gamma^p) \rightarrow H^{-*}(\mathcal{F}^p \Omega_R / \mathcal{F}^{p+1} \Omega_R) \quad (1.24)$$

$$H_*(\Omega_\Gamma^{\leq p}) \rightarrow H^{-*}(\Omega_R / \mathcal{F}^{p+1} \Omega_R) \quad (1.25)$$

que son compatibles con el producto así como con las inclusiones y las proyecciones que hacen conmutativos los cuadrados

$$\begin{array}{ccc} H_*(\Omega_\Gamma^p) & \longrightarrow & H^{-*}(\mathcal{F}^p \Omega_R / \mathcal{F}^{p+1} \Omega_R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(\Omega_\Gamma^{\leq p}) & \longrightarrow & H^{-*}(\Omega_R / \mathcal{F}^{p+1} \Omega_R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(\Omega_\Gamma^{\leq p-1}) & \longrightarrow & H^{-*}(\Omega_R / \mathcal{F}^p \Omega_R) \end{array}$$

Una serie de cálculos (ver Lema 3 de [BACH]) muestran que

$$\mathrm{Im}(H_n \Omega_R / \mathcal{F}^{p+1} \Omega_R \rightarrow H_n \Omega_R / \mathcal{F}^p \Omega_R) = H_{dR}^{-n}(R/I^{-n-p}) \quad (1.26)$$

Luego el morfismo (1.25) induce una aplicación natural

$$\mathrm{Im}(H_n(\Omega_\Gamma^{\leq p}) \rightarrow H_n(\Omega_\Gamma^{\leq p-1})) \rightarrow H_{dR}^{-n}(R/I^{-n-p}). \quad (1.27)$$

Se demuestra en [CGG] y en [FT] que si I es intersección completa entonces las aplicaciones (1.24) y (1.25), y como consecuencia también (1.27), son isomorfismos. Por el mismo método de [CGG] y [FT], se define una aplicación compatible con S y con las estructuras de producto

$$H_*(\hat{\Omega}_\Gamma^{\geq p}) \rightarrow H^{-*}(\mathcal{F}^p \hat{\Omega}_R), \quad (1.28)$$

la cual es un isomorfismo cuando I es intersección completa.

Sea t una indeterminada de grado $+2$. Consideremos entonces las series formales de Laurent

$$\hat{\Omega}_\Gamma[[t, t^{-1}]] := \left\{ \sum_{n=n_0}^{\infty} \omega_n t^n : n_0 \in \mathbb{Z}, \omega_n \in \hat{\Omega}_\Gamma^* \right\}$$

equipadas con la diferencial continua $d + \partial$ que extiende la de $\hat{\Omega}_\Gamma$ y envía t al 0. Definimos

$$\mathfrak{A} := \prod_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\Omega}_\Gamma^{\geq p} t^p \subset \hat{\Omega}_\Gamma[[t, t^{-1}]] \quad (1.29)$$

Notar que \mathfrak{A} es una subálgebra diferencial de $\hat{\Omega}_\Gamma[[t, t^{-1}]]$. De hecho es el álgebra de Rees asociada a la filtración $\hat{\Omega}_\Gamma^{\geq *}$. Para cada $q \geq 0$ se definen los ideales diferenciales

$$\mathfrak{A}^q = \prod_{p \in \mathbb{Z}} (\hat{\Omega}_\Gamma^{\geq p+q}) t^p \triangleleft \mathfrak{A}$$

entonces se tiene que

$$\mathfrak{A}^q / \mathfrak{A}^{q+1} = \prod_{p \geq -q} \Omega_\Gamma^{p+q} t^p = \bigoplus_{p \geq -q} \Omega_\Gamma^{p+q} t^p. \quad (1.30)$$

La última igualdad se sigue del hecho de que para cada grado r , existen sólo un número finito de enteros p tales que $(\Omega_\Gamma^{\geq p+q})_r \neq 0$. Como caso particular de (1.30) se tiene

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^1 = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega_{\Gamma}^p t^p. \quad (1.31)$$

Notar que (1.31) es el anillo graduado de la filtración $\hat{\Omega}_{\Gamma}^{\geq *}$ de $\hat{\Omega}_{\Gamma}$. Por otro lado también podemos considerar el complejo mezclado $\mathcal{M} := (\bigoplus_{p \geq 0} \Omega_{\Gamma}^p t^p, \partial, d)$. Entonces por resultados de [CGG] existen equivalencias débiles naturales de complejos mezclados

$$(A \otimes (A/k)^{\otimes *}, b, B) \xleftarrow{\sim} (\Gamma \otimes (\Gamma/k)^{\otimes *}, b + \partial, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}. \quad (1.32)$$

A partir de estas equivalencias se deduce que los complejos $(\hat{\Omega}_{\Gamma}[[t, t^{-1}]], \partial + d)$, $(\mathfrak{A}, \partial + d)$, $(\hat{\Omega}_{\Gamma}[[t, t^{-1}]]/\mathfrak{A}, \partial + d)$ y $(\bigoplus_{p \geq 0} \Omega_{\Gamma}^p t^p, \partial)$ son respectivamente los complejos cíclico periódico, cíclico negativo, cíclico y de Hochschild de \mathcal{M} . Por tanto se tiene que

$$\begin{aligned} HP_*(A) &= H_*(\hat{\Omega}_{\Gamma}[[t, t^{-1}]]) = H_*(\hat{\Omega}_{\Gamma})[[t, t^{-1}]], \\ HN_*(A) &= H_*(\mathfrak{A}) = \prod_{p \in \mathbb{Z}} H_*(\hat{\Omega}_{\Gamma}^{\geq p})t^p, \\ HC_*(A) &= H_*(\hat{\Omega}_{\Gamma}[[t, t^{-1}]]/\mathfrak{A}) = \bigoplus_{p \geq 0} H_*(\Omega_{\Gamma}^{\leq p})t^p, \\ HH_*(A) &= H_*(\bigoplus_{p \geq 0} \Omega_{\Gamma}^p t^p) = \bigoplus_{p \geq 0} H_*(\Omega_{\Gamma}^p)t^p. \end{aligned} \quad (1.33)$$

El grado con respecto a t es el índice de Hodge; luego por ejemplo, la parte de Hodge de índice p en $HH_n(A)$ es

$$HH_n^p(A) = H_{n-p} \Omega_{\Gamma}^p \cong H_{n-p} \Omega_{\Gamma}^p t^p,$$

es decir, la parte de grado total n de $H_*(\Omega_{\Gamma}^p)t^p$. Por otro lado la homología cíclica periódica también se puede poner como

$$HP_*(A) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} HP_*^i(A) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} H_*(\hat{\Omega}_{\Gamma}[-2i]) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} H_{*-2i}(\hat{\Omega}_{\Gamma}).$$

Por otro lado, según (1.6.4) la aplicación de (1.22) es un isomorfismo

$$HP_*(A) \xrightarrow{\cong} \prod_{i \in \mathbb{Z}} H_{inf}^{2i-*}(A).$$

Vamos a ver que

$$HP_*^i(A) \cong H_{inf}^{2i-*}(A). \quad (1.34)$$

Para probar este isomorfismo utilizaremos la λ -descomposición de Loday (ver §4.5 y §4.6 de [Lod]), y probaremos que es equivalente a la descomposición de Hodge presentada aquí. La λ -descomposición es una descomposición natural

$$\bar{C}_n(A) = \bigoplus_{0 \leq i \leq n} \bar{C}_n^i(A)$$

tal que $b(\bar{C}_*^i(A)) \subset \bar{C}_{*-1}^i(A)$ y $B(\bar{C}_*^i(A)) \subset \bar{C}_{*+1}^{i+1}(A)$. Esta descomposición induce una en cada uno de los complejos $\mathcal{CP}(A)$, $\mathcal{B}(A)$, y $CN(A)$; por naturalidad, es preservada por morfismos de álgebras, y en particular por $\Gamma \rightarrow A$ y, si $R/I = A$ es una presentación formalmente suave, por $R/I^{n+1} \rightarrow R/I^n$. Por otro lado se comprueba que los morfismos de complejos mixtos $(\bar{C}(\Gamma), b + \partial, B) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}, \partial, d)$ y $(\bar{C}(R/I^n), b, B) \rightarrow (\Omega_{R/I^n}, 0, B)$ envían la descomposición de Loday en la descomposición natural utilizada arriba. En particular los cuasi-isomorfismos (1.21), π y μ , inducen cuasi-isomorfismos

$$\hat{\Omega}_R[2i] \xleftarrow{\sim} \mathcal{CP}^i(A) \xleftarrow{\sim} \mathcal{CP}_*^i(\Gamma) \xrightarrow{\sim} \hat{\Omega}_\Gamma[-2i]$$

lo que prueba (1.34). Notar que las igualdades de (1.33) describen a $HP_*(A)$, $HN_*(A)$ y $HH_*(A)$ como la homología de un álgebra diferencial graduada; por tanto éstas tienen de forma natural una estructura de álgebra graduada. De forma análoga se tiene que $HC_*(A)$ es un módulo sobre $HN_*(A)$.

Vimos en la Sección 1.2 que el producto barajado \times hace de $HH_*(A)$ un álgebra; por naturalidad es preservado por $HH_*(\Gamma) \cong HH_*(A)$. Se comprueba además que el morfismo $\bar{C}_*(\Gamma) \rightarrow \mathcal{M}$ envía el producto barajado en el producto de formas. También es posible dar una estructura de producto natural en CN_* y \mathcal{CP}_* , utilizando \times junto con un término adicional inducido por el producto barajado cíclico \times' (ver [5.1.13] de [Lod]). Se comprueba que $\bar{C}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{M}$ envía \times' a cero y por tanto los productos vistos arriba coinciden con los de [Lod]. Hay un diagrama de \mathfrak{A} -módulos

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} & \longrightarrow & \hat{\Omega}_\Gamma[[t, t^{-1}]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{p \geq 0} \Omega_\Gamma^p t^p & \longrightarrow & \bigoplus_{p \geq 0} \Omega_\Gamma^{\leq p} t^p \end{array} \quad (1.35)$$

donde las flechas que salen de \mathfrak{A} son morfismos de álgebras. Notemos que las aplicaciones verticales son sobreyectivas y tienen el mismo núcleo y que las

horizontales son inyectivas y tienen el mismo conúcleo. El núcleo común de las aplicaciones verticales es \mathfrak{A}^1 y el conúcleo común de las horizontales es $\bigoplus_{p \geq 0} \Omega_{\Gamma}^{\leq p-1} t^p$. Las sucesiones exactas de homología asociadas a las filas de este diagrama son las *SBI* de (1.15) y las columnas son las sucesiones (1.14) (ver [Lod] para más detalles):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & HN_{n+2}A & \equiv & HN_{n+2}A & & (1.36) \\
 & & \downarrow S & & \downarrow & & \\
 HC_{n-1}A & \xrightarrow{B} & HN_nA & \xrightarrow{I} & HP_nA & \xrightarrow{S} & HC_{n-2}A \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 HC_{n-1}A & \xrightarrow{B} & HH_nA & \xrightarrow{I} & HC_nA & \xrightarrow{S} & HC_{n-2}A \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & HN_{n+1}A & \equiv & HN_{n+1}A & &
 \end{array}$$

Todas las aplicaciones que aparecen en el diagrama anterior son homogéneas con respecto a la t -graduación y por tanto respetan la descomposición de Hodge. Los morfismos I son de grado 0, los S son de grado -1 y los B son de grado $+1$. Por ejemplo $HN_*(k) = k[t^{-1}]$, luego todas las aplicaciones S que aparecen en el diagrama se pueden ver como la multiplicación por t^{-1} en $HN_{-2}(k) = HN_{-2}^{-2}k$. Como por otro lado se tiene que $I : HN_nA \rightarrow HP_nA$ es un isomorfismo para $n \leq 0$, se obtiene un isomorfismo de álgebras

$$HN_*(A)[1/S] = HP_*(A). \quad (1.37)$$

Álgebras Graduadas

Si $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$ es una k -álgebra graduada y $A_0 = k$, entonces por (1.3.1) y por (1.5.4) la inclusión $k \rightarrow A$ induce un isomorfismo al nivel de HP_* , SHC_* y H_{dR}^* . Usando esta propiedad y la sucesión (1.15), se comprueba que la aplicación (1.6) induce un isomorfismo

$$HN_n^n(A) = Z^n \Omega_A := \ker(d : \Omega_A^n \rightarrow \Omega_A^{n+1}).$$

Por tanto tenemos un isomorfismo bihomogéneo de álgebras bigraduadas

$$HN_*(A) = k[t^{-1}] \oplus \bigoplus_{p \geq 1} Z^p \Omega_A t^p \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \bigoplus_{1 \leq p < n} HN_n^p(A) t^p. \quad (1.38)$$

También se sigue de (1.15) que si $n \geq 0$, la aplicación

$$B : HC_n(A)_+ \xrightarrow{\cong} HN_{n+1}(A) \quad (1.39)$$

es un isomorfismo. En particular $S \equiv 0 : HN_{\geq 1}(A) \rightarrow HN_{\geq -1}(A)$. Como por otro lado la acción de multiplicar por t en (1.38) es aplicar el morfismo S , se tiene que si $\omega \in Z^p\Omega_A$ entonces $t^{-1}(\omega t^p) = 0$ y no ωt^{p-1} . También se sigue de (1.39), y del hecho de que B sube el índice de Hodge en 1, que hay un isomorfismo de $HN_*(A)$ -módulos bihomogéneo

$$HC_*(A) = k[t] \oplus \bigoplus_{p \geq 1} Z^{p+1}\Omega_A t^p \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \bigoplus_{1 \leq p < n} HN_{n+1}^{p+1}(A) t^p. \quad (1.40)$$

Álgebras de tipo finito

Sea A una k -álgebra de tipo finito, entonces por [Har, Ch. II, Thm. 6.1], los espacios vectoriales $H_{inf}^* A$ son de dimensión finita (esto es falso si se reemplaza *de tipo finito* por *esencialmente de tipo finito*, ver el ejemplo 1.7.5). El Lema de Gray ([Emm, Prop.A.3]) establece que todo sistema inverso $V = \{\sigma : V_{n+1} \rightarrow V_n\}_n$ de espacios vectoriales con base numerable cuyo límite inverso también tiene una base numerable satisface la condición de Mittag-Leffler:

$$(\forall n) \quad (\exists l(n) \geq n) \text{ tal que } \forall l' \geq l(n) \sigma^{l'-n}(V_{l'}) = \sigma^{l(n)-n}(V_{l(n)}) \subset V_n.$$

En particular, como fue observado por Emmanouil ([Emm, Thm.2.4]), si A es de tipo finito el Lema de Gray se puede aplicar a cada uno de los sistemas inversos $\{HC_{p+2*}^{p+*} A, S\}$ ($p \geq 0$). Además observamos que si $A = R/I$ es una presentación de A con R de tipo finito, el mismo argumento muestra que para cada p el sistema inverso $\{H_{dR}^p(R/I^n)\}_n$ es Mittag-Leffler. Por otro lado se prueba en [Emm, Thm.2.7], que la aplicación $H_{inf}^*(A) \rightarrow H_{dR}^*(A)$ es inyectiva. De (1.27) se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{inf}^p(A) & \xrightarrow{\quad} & H_{dR}^p A \\ \downarrow & & \uparrow \\ HC_{p+2n}^{p+n} A & \longrightarrow & H_{dR}^p(R/I^{n-p+1}) \end{array}$$

Luego para $p, n \geq 0$ la sucesión SBI que relaciona las componentes de Hodge de HN , HP y HC se escinde en sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow H_{inf}^p A \rightarrow HC_{p+2n}^{p+n} A \rightarrow HN_{p+2n+1}^{p+n+1} A \rightarrow 0.$$

Ejemplo 1.7.5 Consideremos el anillo local $A = k[t]_{(t)}$. Tenemos un diagrama conmutativo con aplicaciones verticales inyectivas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & \Omega_A^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A} & \xrightarrow{1 \otimes d} & \hat{A} \otimes_A \Omega_A^1, \end{array}$$

donde $\hat{A} = k[[t]]$ denota la completación de A con respecto al ideal maximal tA . En grado cero, la cohomología de ambas filas es k ; en grado 1 la de la fila inferior es cero. Por tanto, dado que el elemento $\log(t - \lambda)$ es una serie infinita y no un polinomio, el siguiente coborde de $\hat{A} \otimes_A \Omega_A^1$

$$(1 \otimes d)\log(t - \lambda) = dt/(t - \lambda) \in \Omega_A^1,$$

no puede ser un coborde en Ω_A^* . Por otra parte la unicidad de la descomposición de fracciones como suma de fracciones simples prueba que la imagen de $\{dt/t - \lambda : \lambda \in k\}$ en $H_{dR}^1(A)$ es un conjunto linealmente independiente. Como k es infinito, se sigue que $H_{dR}^1(A)$ es de dimensión infinita. Además como A es suave tenemos que $HC_3^2(A) = H_{dR}^1(A) = H_{inf}^1(A)$. Sin embargo se tiene que todas las aplicaciones en el sistema inverso $\{HC_{3+2n}^{2+n} A\}_n$ son isomorfismos, por tanto se satisface la condición de Mittag-Leffler.

Capítulo 2

Cálculos para hipersuperficies.

2.1. Hipersuperficies

A lo largo de este capítulo consideraremos A una k -álgebra que tiene una presentación del tipo $A = R/I$, con R un dominio regular esencialmente de tipo finito sobre k , donde $I = fR$ es un ideal principal propio. Denotamos por m al rango del R -módulo proyectivo $\Omega^1 := \Omega_{R/k}^1$, o equivalentemente, al grado de trascendencia sobre k del cuerpo de fracciones de R .

Sean $V = k \oplus ky$, $\Gamma = R \oplus Ry = R \otimes \Lambda(V)$ y $\partial : \Gamma_* \rightarrow \Gamma_{*-1}$ la derivación determinada por $\partial(y) = f$. Entonces $\Gamma \rightarrow R/fR = A$ es un modelo de cadena en el sentido de 1.7.4. Luego si definimos

$$dy^{(i)} := \frac{1}{i!} dy^i$$

queda que

$$\Omega_{\Gamma}^p = \bigoplus_{p_0+p_1=p} (\Omega_R^{p_0} dy^{(p_1)} \oplus \Omega_R^{p_0} y dy^{(p_1)}).$$

La parte homogénea de grado r de Ω_{Γ}^p es

$$(\Omega_{\Gamma}^p)_r = \Omega_R^{1-r} y dy^{(p+r-1)} \oplus \Omega_R^{-r} dy^{(p+r)}.$$

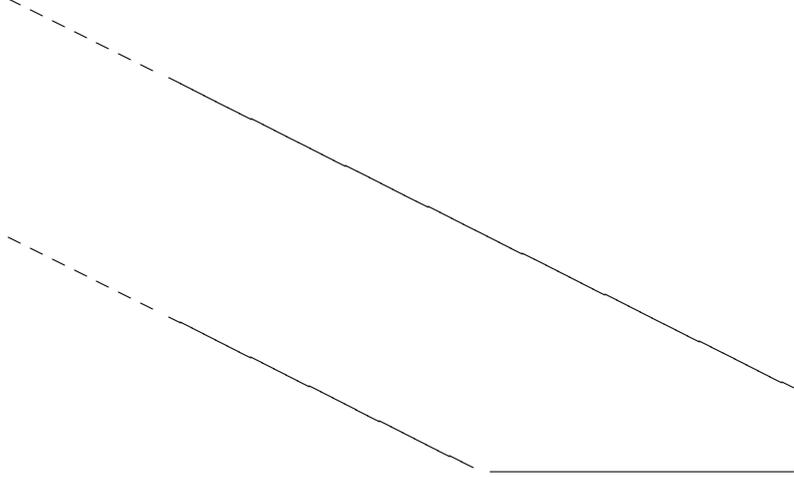
Consideremos el complejo \mathfrak{C} como lo hacíamos en la sección 1.7 del primer capítulo (ver (1.23)). Entonces $\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}, \partial, d)$ es un complejo doble que en el lugar (p, q) tiene a $(\Omega_{\Gamma}^p)_{q-p}$. Bajo el isomorfismo evidente entre $\Omega^{1-q+p} \oplus \Omega^{-q+p}$ y $(\Omega_{\Gamma}^p)_{q-p}$ tenemos que los bordes d y ∂ vienen dados por las matrices

$$d = \begin{pmatrix} d & 0 \\ (-1)^{p+q-1}q & d \end{pmatrix} \quad y \quad \partial = \begin{pmatrix} -df & 0 \\ (-1)^{p+q-1}f & -df \end{pmatrix}.$$

Luego, si $\Omega^i := \Omega_R^i$ y $\Delta := \partial + d$, tenemos que $(\Omega_{\Gamma}^{\leq m}, \Delta)$ es el complejo total del complejo doble siguiente,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega^0 y dy^{(m+1)} & & & & & & 0 \\
 \downarrow \partial & & & & & & \\
 \Omega^1 y dy^{(m-1)} \oplus \Omega^0 dy^{(m)} & & \dots & & & & \\
 \downarrow \partial & & & & & & \\
 \Omega^2 y dy^{(m-2)} \oplus \Omega^1 dy^{(m-1)} & & \dots & & & & 0 \\
 & & \dots & & \dots & & \\
 & & \dots & & \dots & & 0 \\
 & & \dots & & \dots & \longleftarrow^d \Omega^0 y dy & 0 \\
 & & & & & \downarrow \partial & \\
 \Omega^m y dy \oplus \Omega^{m-1} dy & & \dots & & \dots & \longleftarrow^d \Omega^1 y \oplus \Omega^0 dy & \longleftarrow^d \Omega^0 y \\
 \downarrow \partial & & & & & \downarrow \partial & \downarrow \partial \\
 \Omega^m & & \dots & & \dots & \longleftarrow^d \Omega^1 & \longleftarrow^d \Omega^0
 \end{array}$$

Además tenemos que $\Omega_{\Gamma}^{m+p} = \Omega_{\Gamma}^m dy^{(p)}$, para cada $p \geq 0$, donde Ω_{Γ}^m se corresponde a la primera columna de la izquierda del diagrama anterior. Entonces el complejo doble $(\mathcal{C}, \partial, d)$ tiene la forma siguiente



Recordemos que la homología de Hochschild, la cíclica, la cíclica negativa y la periódica, así como la cohomología infinitesimal de A se pueden calcular a partir del complejo \mathfrak{C} por lo visto en la sección 1.6 del capítulo 1. Según las descomposiciones de Hodge nos queda

$$\begin{aligned}
 HH_n^p A &= H_{n-2p}((\Omega_\Gamma^p)[-p], \partial), & HC_n^p A &= H_{n-2p}(\Omega_\Gamma^{\leq p}, \Delta), \\
 HN_n^p A &= H_{n-2p}(\hat{\Omega}_\Gamma^{\geq p}, \Delta), & HP_n^p A &= H_{inf}^{2p-n} A = H_{n-2p}(\hat{\Omega}_\Gamma, \Delta).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Consideremos el complejo de cocadenas

$$L : \Omega_R^0 \xrightarrow{df} \Omega_R^1 \xrightarrow{df} \cdots \xrightarrow{df} \Omega_R^m. \tag{2.2}$$

Aquí el morfismo coborde es la multiplicación por el elemento $df \in \Omega_R^1$. Se comprueba que $((\Omega_\Gamma^p)[-p], \partial)$ es isomorfo al cono de la multiplicación por f en el complejo de cadenas $K_*[-p] := L^{p-*}$ y como f no es divisor de cero en Ω_R se tiene que

$$HH_n^p(A) = \begin{cases} H^{2p-n}(L/fL), & p < n \text{ o } p \geq m \\ \Omega_A^p, & p = n \end{cases} \tag{2.3}$$

donde

$$\frac{L}{fL} : \frac{\Omega_R^0}{f\Omega_R^0} \xrightarrow{df} \frac{\Omega_R^1}{f\Omega_R^1} \xrightarrow{df} \cdots \xrightarrow{df} \frac{\Omega_R^m}{f\Omega_R^m}.$$

Consideramos

$$Z_f^* = \{\omega \in \Omega_R^* : df \wedge \omega \in f\Omega_R^{*+1}\}.$$

Entonces tenemos un monomorfismo natural de A -módulos

$$H^*(L/fL) = \frac{Z_f^*}{f\Omega_R^* + df \wedge \Omega_R^{*-1}} \rightarrow \frac{\Omega_R^*}{f\Omega_R^* + df \wedge \Omega_R^{*-1}} = \Omega_A^*.$$

De hecho se comprueba que $H^*(L/fL)$ es un ideal de Ω_A^* . Por ejemplo, en el caso en que f es libre de cuadrados, Michler probó en [Mic1] que entonces $H^*(L/fL)$ es la torsión de Ω_A^* , que denotaremos por $T(\Omega_A^*)$. Por (2.3) y (1.33) se tiene un isomorfismo de álgebras bihomogéneas

$$HH_*(A) = \bigoplus_{q \geq 0} \Omega_A^q t^q \oplus \bigoplus_{q \geq 0} \bigoplus_{p \geq 1} H^q(L/fL) t^{p+q}. \quad (2.4)$$

Consideramos el morfismo

$$d_{\log} f : H^*(L/fL) \rightarrow H^{*+1}(L/fL)$$

definido por la fórmula

$$d_{\log} f(\omega) := \frac{df \wedge \omega}{f} \quad (\omega \in Z_f^*).$$

Se comprueba que la aplicación

$$\delta(\omega t^{p+q}) = d\omega t^{p+q+1} + p d_{\log} f(\omega) t^{p+q+1} \quad (2.5)$$

es una derivación. Por otro lado, consideramos los morfismos B e I tal y como están descritos en (1.36), entonces por lo visto en el apartado de homología cíclica y formas diferenciales del primer capítulo se tiene que la composición $BI : HH_*(A) \rightarrow HH_{*+1}(A)$ también es una derivación.

Lema 2.1.1 *Bajo el isomorfismo (2.4), BI se identifica con la derivación δ definida en (2.5).*

Demostración. Consideramos los complejos

$$D_p : \frac{\Omega_R^0}{f^{p+1}\Omega_R^0} \xrightarrow{d} \frac{\Omega_R^1}{f^p\Omega_R^1} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \frac{\Omega_R^p}{f\Omega_R^p},$$

$$\frac{L_p}{fL_p} : \frac{\Omega_R^0}{f\Omega_R^0} \xrightarrow{pdf} \frac{\Omega_R^1}{f\Omega_R^1} \xrightarrow{(p-1)df} \dots \xrightarrow{df} \frac{\Omega_R^p}{f\Omega_R^p}.$$

Notar que para $n < p$ se tiene que

$$H^n\left(\frac{L_p}{fL_p}\right) = H^n\left(\frac{L}{fL}\right)$$

ya que multiplicar el coborde por un elemento no nulo no altera la cohomología. Por otro lado existe un isomorfismo

$$\alpha : \frac{L_p^n}{fL_p^n} \longrightarrow \frac{f^{p-n}\Omega_R^n}{f^{p-n+1}\Omega_R^n}$$

definido como multiplicar por f^{p-n} . Entonces tenemos la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow \frac{L_p}{fL_p} \xrightarrow{\alpha} D_p \longrightarrow D_{p-1} \longrightarrow 0. \quad (2.6)$$

Por (2.3) sabemos que $H^q(L_p/fL_p) = HH_{2p-r}^p(A)$ además por (1.25) y (1.33) tenemos que $H^r(D_p) = HC_{2p-r}^p(A)$ y que la sucesión exacta larga de homología asociada a la sucesión (2.6) da lugar a la correspondiente componente de Hodge de la sucesión *SBI*. Por tanto la sucesión *SBI* es la línea horizontal del diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^q\left(\frac{L_p}{fL_p}\right) & \xrightarrow{I} & H^q(D_p) & \xrightarrow{S} & H^q(D_{p-1}) & \xrightarrow{B} & H^{q+1}\left(\frac{L_p}{fL_p}\right) & \longrightarrow & \dots \\ & & \searrow^{BI} & & \downarrow B & & & & & & \\ & & & & H^{q+1}\left(\frac{L_{p+1}}{fL_{p+1}}\right) & & & & & & \end{array}$$

Veamos como queda el morfismo $B \circ I$. Para ello miramos el diagrama siguiente, donde los morfismos verticales que salen de la primera fila (que son inyectivos, al igual que los morfismos oblicuos) son los que inducen a I en la homología, los otros verticales, que son sobreyectivos, son los que inducen la S y los horizontales son los bordes de los complejos. Notar que el morfismo que induce a B es el que sale al aplicar el Lema de la serpiente.

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{\Omega_R^{q+1}}{f\Omega_R^{q+1}} & \xleftarrow{(p+1)df} & \frac{\Omega_R^q}{f\Omega_R^q} & & \\
\downarrow f^p & & \downarrow f^{p+1} & & \\
\frac{\Omega_R^{q+1}}{f^{p+1}\Omega_R^{q+1}} & \xleftarrow{d} & \frac{\Omega_R^q}{f^p\Omega_R^q} & & \\
\downarrow & \swarrow \frac{\Omega_R^{q+1}}{f\Omega_R^{q+1}} & \downarrow pdf & \frac{\Omega_R^q}{f\Omega_R^q} & \\
\frac{\Omega_R^{q+1}}{f^p\Omega_R^{q+1}} & \xleftarrow{d} & \frac{\Omega_R^q}{f^{p+1}\Omega_R^q} & \swarrow f^p &
\end{array}$$

Sean $BI : H^q(\frac{L_{p+q}}{fL_{p+q}}) \rightarrow H^{q+1}(\frac{L_{p+q+1}}{fL_{p+q+1}})$ y $[\omega] \in H^q(\frac{L_{p+q}}{fL_{p+q}})$. Entonces ω está en $\Omega_R^q/f\Omega_R^q$ y verifica que $pdf \wedge \omega = fu$, es decir, $(1/p) \cdot u = d_{\log} f(\omega)$. Al aplicar I al cociclo $[\omega]$ obtenemos el cociclo $[f^p\omega]$ de $H^q(D_p)$. Si a este elemento le aplicamos el morfismo B , lo que hacemos es aplicar d y dividir por f^p lo cual nos debe dar un elemento de $H^{q+1}(\frac{L_{p+q+1}}{fL_{p+q+1}})$. Por un lado tenemos que

$$d(f^p\omega) = pf^{p-1}df \wedge \omega + f^pd\omega,$$

pero como tenemos que $df \wedge \omega = fd_{\log}f(\omega)$, entonces

$$d(f^p\omega) = f^p(pd_{\log}f(\omega) + d\omega).$$

Por tanto se obtiene que $BI([\omega]) = [pd_{\log}f(\omega) + d\omega]$. Teniendo en cuenta la graduación llegamos a que

$$BI(\omega t^{p+q}) = BI(\omega)t^{p+q+1} = \delta(\omega t^{p+q}).$$

□

En la siguiente proposición denotamos por δ_p a la restricción de la derivación δ

$$\delta_p : H^*(\frac{L}{fL}) = H^*(\frac{L}{fL})t^p \rightarrow H^{*+1}(\frac{L}{fL})t^{p+1} = H^{*+1}(\frac{L}{fL}). \quad (2.7)$$

Consideramos el siguiente complejo de cocadenas

$$\mathcal{E}_p^* := (H^*\left(\frac{L}{fL}\right), \delta_p)$$

Finalmente denotamos por π_p^q a la proyección $H_{dR}^q(R/f^{p+1}R) \rightarrow H_{dR}^q(R/f^pR)$.

Proposición 2.1.2 *Para $p \geq 1$, $q \geq 0$ existe una sucesión exacta larga*

$$H^q(\mathcal{E}_p) \longrightarrow H_{dR}^q\left(\frac{R}{f^{p+1}R}\right) \xrightarrow{\pi_p^q} H_{dR}^q\left(\frac{R}{f^pR}\right) \longrightarrow H^{q+1}(\mathcal{E}_p) \longrightarrow H_{dR}^{q+1}\left(\frac{R}{f^{p+1}R}\right)$$

Demostración. La sucesión *SBI* se puede expresar como una pareja exacta de la forma (ver [Wei])

$$\begin{array}{ccc} HC_*(A) & \xrightarrow{S} & HC_*(A) \\ & \swarrow I & \searrow B \\ & HH_*(A) & \end{array}$$

De esta forma la pareja derivada queda

$$\begin{array}{ccc} S(HC_*(A)) & \xrightarrow{S} & S(HC_*(A)) \\ & \swarrow & \searrow \\ & E_*^2(A) & \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} E_n^2(A) &= H^n(HH_*(A), BI) \\ &= \bigoplus_{p=0}^n H^n(HH_{*-p}^p(A), BI) \\ &= \bigoplus_{p=0}^{\infty} H^n(\mathcal{E}_p) \end{aligned}$$

La sucesión exacta asociada a la pareja derivada se descompone en suma de sucesiones con índices de Hodge. Dado que $E_n^2(A) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} H^n(\mathcal{E}_p)$ y que $S(HC_{2p+q}^{p+q}(A))$ es isomorfo a $H_{dR}^q(R/f^pR)$ (por 1.26, ya que el ideal $I = fR$ es intersección completa, pues f no es divisor de cero) se tiene que dicha sucesión es la sucesión exacta del enunciado. \square

Definición 2.1.3 Para R y f como al principio de la sección, se dice que f tiene la **propiedad** $\mathcal{X}^{q,p}$, con $p \geq 1$ y $q \geq 0$ si la aplicación

$$\pi_p^q : H_{dR}^q(R/f^{p+1}R) \rightarrow H_{dR}^q(R/f^pR)$$

es un isomorfismo. En los casos en que f tenga la propiedad $\mathcal{X}^{q,p}$ para p fijo y todo q , respectivamente q fijo y todo p , o respectivamente todo p y todo q , diremos que f tiene la propiedad $\mathcal{X}^{*,p}$, respectivamente $\mathcal{X}^{q,*}$, o respectivamente $\mathcal{X}^{*,*}$.

Corolario 2.1.4

$$f \text{ tiene la propiedad } \mathcal{X}^{*,p} \iff H^*(\mathcal{E}_p) = 0$$

Demostración. Se sigue de la definición y de la proposición anterior. \square

Ejemplo 2.1.5 Aquí damos un ejemplo de $f \in k[x, y]$ tal que la propiedad $\mathcal{X}^{1,p}$ de 2.1.3 no se satisface para ningún p . Consideremos $R = k[x, y]$, $f = x^4 + x^2y^3 + y^5$ y $A = R/fR$, entonces por la proposición (2.1.2) tenemos la sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow H_{dR}^1(R/f^{p+1}R) \xrightarrow{\pi_p^1} H_{dR}^1(R/f^pR) \longrightarrow H^2(\mathcal{E}_p) \longrightarrow 0$$

Luego, para ver que π_p^1 no es isomorfismo, basta ver que $H^2(\mathcal{E}_p) \neq 0$. Tenemos

$$H^2(\mathcal{E}_p) = \frac{\ker(\delta_p : H^2(L/fL) \rightarrow H^3(L/fL))}{\delta_p(H^1(L/fL))} = \frac{H^2(L/fL)}{\delta_p(H^1(L/fL))}$$

y

$$H^2(L/fL) = \Omega_A^2 = \Omega_R^2/f\Omega_R^2 + df \wedge \Omega_R^1.$$

Supongamos que $H^2(\mathcal{E}_p) = 0$. El elemento $\omega = dxdy \in H^2(L/fL)$ es no nulo, ya que $\Omega_A^2 = R/fR + J \neq 0$ en este ejemplo. Por tanto, como estamos suponiendo que $H^2(\mathcal{E}_p) = 0$, debe existir un elemento $\eta \in \Omega_R^1$ tal que $\eta \in Z_f^1$ y $\delta_p(\eta) = \omega$. Consideremos $\eta = \eta_1 dx + \eta_2 dy$. Entonces estas dos condiciones se reúnen en las siguientes ecuaciones.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \eta_2 - \frac{\partial f}{\partial y} \eta_1 = f \cdot \mu \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + p \cdot \mu = 1 \end{cases}$$

Substituyendo los valores de las derivadas parciales de f y haciendo varias cuentas llegamos a que $1 \in \langle x, y \rangle$, lo que resulta imposible. Luego $dxdy \notin \delta_p(H^1(L/fL))$. Por tanto f no tiene la propiedad $\mathcal{X}^{1,p}$ para ningún p .

Nota 2.1.6 De ahora en adelante denotaremos $J \triangleleft R$ al **ideal Jacobiano** de f . Por definición,

$$J = \text{Jac}(f) = \bigcup_{X \in \text{Der}(R)} X(f)$$

Aquí $\text{Der}(R) = \text{hom}_R(\Omega_R^1, R)$ es el módulo de derivaciones k -lineales. En el caso en que Ω_R^1 sea libre con base de la forma $\{dx_1, \dots, dx_m\}$, se tiene que $df = \sum_{i=1}^m f_i dx_i$ y por lo tanto $J = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Notar que en particular si $R = k[x_1, \dots, x_m]$ es el anillo de polinomios en m -variables entonces los f_i son las derivadas parciales de f respecto a los x_i y J es el ideal Jacobiano según las definición clásica (ver [Eis, Cor.16.20]).

Corolario 2.1.7 Sea $u_{\mathfrak{m}} = \text{depth}_{R_{\mathfrak{m}}}(J_{\mathfrak{m}}, A_{\mathfrak{m}})$ la profundidad del ideal J localizado en el ideal maximal \mathfrak{m} de R en el $R_{\mathfrak{m}}$ -módulo $A_{\mathfrak{m}}$. Supongamos que $u_{\mathfrak{m}} = u$ para todo \mathfrak{m} en el lugar singular de f . Entonces π_*^u es inyectiva y f tiene la propiedad $\mathcal{X}^{q,*}$ para todo $q < u$.

Demostración. Es suficiente probar que $H^q(\frac{L}{fL}) = 0$ para $q \leq u$, pues el resultado se sigue de esto y de la sucesión de la proposición (2.1.2).

Como el módulo $H^q(\frac{L}{fL})$ está soportado en el lugar singular de f , es suficiente demostrar que $H^q(\frac{L_{\mathfrak{m}}}{fL_{\mathfrak{m}}}) = 0$ para todo $q \leq u$ y para todo \mathfrak{m} maximal en el lugar singular de f .

Sea \mathfrak{m} uno de estos maximales, y sea $x_1, \dots, x_m \in \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ un sistema regular de parámetros. Entonces $df = \sum_{i=1}^m f_i dx_i$, $J_{\mathfrak{m}} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ y el complejo $L_{\mathfrak{m}}/fL_{\mathfrak{m}} = K(f_1, \dots, f_m; A)$ es el complejo de Koszul. El corolario es inmediato a partir de la definición de profundidad (ver 17.2 de [Eis]). \square

2.2. El caso $f \in J$.

En esta sección suponemos que el elemento f está en su ideal Jacobiano y fijamos una derivación $D \in \text{Der}(R)$ tal que $D(f) = f$.

Ejemplo 2.2.1 Si R es \mathbb{Z} -graduado y f es homogéneo de grado $|f| = r \neq 0$, entonces la derivación definida sobre los elementos homogéneos como

$$D(a) = \frac{|a|}{r} a$$

satisface la condición $D(f) = f$. Para no complicar la notación supondremos que $r > 0$. Esto no es una restricción, ya que si $r < 0$ podemos considerar la graduación $|a|' := -|a|$, y ya tenemos que $|f|' = -r > 0$.

Nota 2.2.2 En el siguiente lema se consideran los operadores $L_D : \Omega_R^* \rightarrow \Omega_R^*$ e $\iota_D : \Omega_R^* \rightarrow \Omega_R^{*-1}$ definidos en (1.5.1).

Lema 2.2.3 Sean $\omega, \eta, \eta' \in \Omega_R^*$ y supongamos que $df \wedge \eta = df \wedge \eta' = 0$, entonces se tienen las siguientes propiedades:

- i) $[\iota_D, d] = L_D$.
- ii) $\iota_D^2 = 0$.
- iii) $\iota_D(\eta) \in Z_f$ y $d_{\log} f(\iota_D(\eta)) = \eta$.
- iv) $d_{\log} f(\iota_D(\eta)\omega) = \eta\omega$.
- v) $\eta\eta' = 0$ y $\eta\iota_D\eta' = (-1)^{(|\eta|+1)(|\eta'|+1)}\eta'\iota_D\eta$.
- vi) $d(\eta) \in Z_f$.
- vii) $L_D(\eta) \in Z_f$.

Demostración.

El apartado **i)** es (1.8). Veamos **ii)**. Dado que ι_D tiene grado impar tenemos que $2\iota_D^2 = [\iota_D, \iota_D]$, como trabajamos sobre un cuerpo k de característica cero se tiene que ι_D^2 es una derivación, por tanto sólo hay que ver que es cero sobre los generadores da , y esto es claro. Para demostrar el apartado **iii)**, basta ver que

$$df \wedge \iota_D(\eta) = f\eta. \quad (2.8)$$

Para probar (2.8) observamos primero que como por hipótesis $df \wedge \eta = 0$, resulta $\iota_D(df \wedge \eta) = 0$. Luego se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \iota_D(df \wedge \eta) = \iota_D(f) \wedge \eta - df \wedge \iota_D(\eta) = D(f)\eta - df \wedge \iota_D(\eta) \\ &= f\eta - df \wedge \iota_D(\eta). \end{aligned}$$

Esto prueba (2.8).

Para demostrar el apartado **iv)** basta ver que $df \wedge \iota_D(\eta)\omega = f\eta\omega$, pero esto se deduce trivialmente de (2.8).

Para demostrar **v)** se observa que,

$$f\eta\eta' = (df \wedge \iota_D(\eta))\eta' = (-1)^{(|\eta|-1)|\eta'|}df \wedge \eta'\iota_D(\eta) = 0$$

y por tanto $\eta\eta' = 0$. La segunda parte es el resultado de desarrollar la igualdad $\iota_D(\eta\eta') = 0$. La parte **vi**) es

$$df \wedge d\eta = -d(df \wedge \eta) = 0.$$

Finalmente para ver **vii**), notemos que, por **i**), $L_D(\eta) = \iota_D d\eta + d\iota_D \eta$ y que por **iii**) y **vi**) ambos sumandos están en Z_f . \square

En la siguiente Proposición consideraremos el complejo

$$\mathcal{H}^* = (H^*(L), d) \tag{2.9}$$

Proposición 2.2.4 *La aplicación de $H^*(L) \oplus H^{*+1}(L) \rightarrow H^*(L/fL)$ inducida por el morfismo*

$$\begin{aligned} \ker(df : \Omega_R^* \rightarrow \Omega_R^{*+1}) \oplus \ker(df : \Omega_R^* \rightarrow \Omega_R^{*+1}) &\rightarrow Z_f^* \\ (\omega, \eta) &\longmapsto \omega + \iota_D \eta \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Bajo este isomorfismo la aplicación de (2.7) queda como

$$\delta_p = \begin{bmatrix} d & p + L_D \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

Se sigue que \mathcal{E}_p es el cono del morfismo $L_D + p : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Demostración. Por un lado tenemos la sucesión exacta larga

$$H^{n-1}(\frac{L}{fL}) \xrightarrow{d_{\log f}} H^n(L) \xrightarrow{f} H^n(L) \longrightarrow H^n(\frac{L}{fL}) \xrightarrow{d_{\log f}} H^{n+1}(L)$$

Por el apartado **iii**) del Lema anterior se tiene que $d_{\log f}$ es sobreyectiva y que $d_{\log f} \circ \iota_D = id$. Luego multiplicar por f en $H^*(L)$ es cero y tenemos sucesiones exactas cortas de la forma

$$0 \longrightarrow H^n(L) \longrightarrow H^n(\frac{L}{fL}) \xrightarrow{d_{\log f}} H^{n+1}(L) \longrightarrow 0$$

escindidas por ι_D . Por tanto tenemos que el morfismo

$$\begin{aligned} H^n(L) \oplus H^{n+1}(L) &\longrightarrow H^n(\frac{L}{fL}) \\ (\omega, \eta) &\longmapsto \omega + \iota_D(\eta) \end{aligned}$$

es, en efecto, un isomorfismo. Para probar la segunda parte de la proposición, debemos ver que

$$\delta_p(\omega + \iota_D(\eta)) = d\omega + p\eta + L_D(\eta) - \iota_D(d\eta)$$

pero de la definición de δ_p tenemos que

$$\begin{aligned}\delta_p(\omega + \iota_D(\eta)) &= d(\omega + \iota_D(\eta)) + pd_{\log}f(\omega + \iota_D(\eta)) \\ &= d(\omega) + d(\iota_D(\eta)) + pd_{\log}f(\omega) + pd_{\log}f(\iota_D\eta) \\ &= d\omega + p\eta + L_D(\eta) - \iota_D(d\eta)\end{aligned}$$

□

Corolario 2.2.5 Para cada $p \geq 1$ existe una sucesión exacta larga

$$H^q(\mathcal{H}) \xrightarrow{L_D+p} H^q(\mathcal{H}) \longrightarrow H^q(\mathcal{E}_p) \longrightarrow H^{q+1}(\mathcal{H}) \xrightarrow{L_D+p} H^{q+1}(\mathcal{H}) \quad (2.10)$$

Demostración. Se deduce del hecho de que \mathcal{E}_p sea el cono del morfismo $L_D + p : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. □

Corolario 2.2.6 Supongamos que R , D , f y r son como en el ejemplo (2.2.1), es decir R graduada, f homogéneo de grado r entero positivo y D una derivación tal que $D(f) = f$. Entonces si para todo $q \in \mathbb{Z}$ escribimos \mathcal{H}_q como la parte homogénea de peso q de \mathcal{H} con respecto a la graduación inducida por la de R , tenemos que

$$H^q(\mathcal{E}_p) = H^q(\mathcal{H}_{-pr}) \oplus H^{q+1}(\mathcal{H}_{-pr})$$

Demostración. Se deduce del hecho de que si $\omega \in H^q(\mathcal{H}_{-pr})$ entonces $L_D(\omega) = -p\omega$ y por tanto el morfismo $p + L_D$ es cero sobre $H^q(\mathcal{H}_{-pr})$. □

Lema 2.2.7 En la situación del Corolario 2.2.6, supongamos además que $H_{dR}^{m-1}(R) = 0$. Entonces la composición

$$\text{coker}(\pi_p^{m-2}) \rightarrow H^{m-1}(\mathcal{H}_{-pr}) \oplus H^m(\mathcal{H}_{-pr}) \rightarrow H^m(\mathcal{H}_{-pr})$$

es sobreyectiva. En particular si $H^m(\mathcal{H}_{-pr}) \neq 0$ entonces el morfismo π_p^{m-2} no es sobreyectivo. Si además tenemos que $H_{dR}^m(R/f^{p+1}) = 0$ entonces π_p^{m-1} tampoco es sobreyectivo.

Demostración. Cada elemento de $H^m(\mathcal{H}_{-pr})$ es la clase de una forma homogénea $\omega \in \Omega_R^m$ de grado $-pr$. Se comprueba usando el isomorfismo de la Proposición 2.2.4 y la sucesión (2.6), que la composición

$$H^m(\mathcal{H}_{-pr}) \rightarrow H^{m-1}(\mathcal{H}_{-pr}) \oplus H^m(\mathcal{H}_{-pr}) \cong H^{m-1}(\mathcal{E}_p) \rightarrow H_{dR}^{m-1}(R/f^{p+1}),$$

envía $\omega \mapsto f^p \iota_D \omega$. Por otro lado también tenemos que

$$\begin{aligned} d(f^p \iota_D(\omega)) &= p f^{p-1} df \wedge \iota_D(\omega) + f^p d \iota_D(\omega) \\ &= p f^p d_{\log} f(\iota_D(\omega)) + f^p L_D \omega \\ &= f^p (p\omega + L_D(\omega)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $H_{dR}^{m-1} R = 0$, $f^p \iota_D \omega$ es un coborde en Ω_R^{m-1} y como consecuencia también es un coborde en $\Omega_{R/f^{p+1}}^{m-1}$. El morfismo del enunciado actúa enviando a un elemento μ de $H_{dR}^{m-2}(R/f^p)$ al elemento $d_{\log} f(d\mu/f^p)$ de $H^m(\mathcal{H}_{-pr})$. Lo que hemos demostrado es que para todo $\omega \in H^m(\mathcal{H}_{-pr})$ existe un μ en $H_{dR}^{m-2}(R/f^p)$ tal que $d\mu = f^p \iota_D(\omega)$, luego si le aplicamos el morfismo a este μ tenemos que su imagen es

$$d_{\log} f(d\mu/f^p) = d_{\log} f(\iota_D(\omega)) = \omega.$$

Por tanto tenemos que el morfismo del enunciado es sobreyectivo. \square

Ejemplo 2.2.8 Consideremos $R = k[x, y, z]$ y $f = x^4 + x^2 y^3 z + y^5 z$. Podemos comprobar que si tomamos los grados de las variables de la forma $|x| = |y| = 1$ y $|z| = -1$ entonces f es un polinomio homogéneo de grado 4 por lo tanto existe una derivación $D = 1/4x \frac{\partial}{\partial x} + 1/4y \frac{\partial}{\partial y} - 1/4z \frac{\partial}{\partial z}$ tal que $D(f) = f$. Por otro lado, dado que R es el anillo de polinomios, también sabemos que $H_{dR}^p(R) = 0$, para $p > 0$. En particular es cero para $p = m - 1$, como nos pide la hipótesis del Lema, y para $p = m$ de lo que se puede concluir que $H_{dR}^m(R/f^{p+1}) = 0$. Luego si $H^m(\mathcal{H}_{-4p}) \neq 0$ estaríamos en las condiciones del Lema anterior con lo que tendríamos un ejemplo para el cual ninguno de los morfismos π_p^{m-1} y π_p^{m-2} son sobreyectivos.

Veamos que en efecto $H^m(\mathcal{H}_{-4p}) \neq 0$. Para ello supondremos que es cero. Entonces el morfismo

$$d : H^2(L_{-4p}) \rightarrow H^3(L_{-4p})$$

es sobreyectivo. Sea $\omega = a dx dy dz \in H^3(L_{-4p})$. Entonces como $|\omega| = -4p$, tenemos que $|a| = -4p - 1$. Tomemos por ejemplo $a = z^{4p+1}$. Como d es sobre, sabemos que existe un elemento $\eta = \eta_1 dx dy + \eta_2 dx dz + \eta_3 dy dz \in H^2(L_{-4p})$ tal que $[d\eta] = [\omega]$. Luego η verifica las dos ecuaciones $df \wedge \eta = 0$ y $d\eta = \omega$ que se traducen en

$$\eta_3 f_x - \eta_2 f_y + \eta_1 f_z = 0, \quad \frac{\partial \eta_3}{\partial x} - \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \frac{\partial \eta_1}{\partial z} = z^{4p+1} + j, \quad (2.11)$$

donde $j \in J$. De la primera ecuación de (2.11) se deduce que $\eta_3 = y^2 \eta'_3$ y $a \eta'_3 - b \eta_2 + c \eta_1 = 0$ con $a = x(4x^2 + 2y^3 z)$, $b = z(3x^2 + 5y^3)$ y $c = y(x^2 + y^2)$. Notar que esta ecuación nos dice que $\eta_1 \in \langle \langle a, b \rangle : c \rangle$. Usando el programa de cálculo Singular obtenemos que

$$\frac{\langle \langle a, b \rangle : c \rangle}{\langle a, b \rangle} = \frac{\langle g_1, g_2 \rangle}{\langle a, b \rangle}$$

donde

$$\begin{aligned} g_1 &= yz(3yz - 10), & g_1 \cdot c &= \frac{3}{5}xz \cdot a + \left(\frac{3}{5}y^3 z - \frac{4}{5}x^2 - 2y^2\right) \cdot b, \\ g_2 &= xz(3yz - 10), & g_2 \cdot c &= yz \cdot a + (xy^2 z - 2xy) \cdot b. \end{aligned}$$

En consecuencia obtenemos que $\eta_1 = \lambda_1 \cdot g_1 + \lambda_2 \cdot g_2 + h_1 \cdot a + h_2 \cdot b$ donde $\lambda_1, \lambda_2, h_1$ y $h_2 \in R$. Usando esto y la primera ecuación de (2.11) llegamos a que

$$(\mu_1 + \eta'_3) \cdot a + (\mu_2 - \eta_2) \cdot b = 0$$

para ciertos elementos μ_1 y μ_2 . Usando de nuevo el Singular comprobamos que el par $\{a, b\}$ forma una sucesión regular en R , por lo que existe un $\alpha \in R$ tal que $\eta_2 = \mu_2 + a \cdot \alpha$ y $\eta'_3 = -\mu_1 + b \cdot \alpha$. Sustituyendo el resultado obtenido en la segunda ecuación de (2.11) y realizando una serie de cuentas llegamos a que

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x} - \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \frac{\partial \eta_1}{\partial z} \in \langle x, y \rangle.$$

Pero, dado que el ideal J también está contenido en $\langle x, y \rangle$, las ecuaciones de (2.11) nos hacen concluir que $z^{4p+1} \in \langle x, y \rangle$ lo que es imposible. Como el absurdo viene de suponer que $H^m(\mathcal{H}_{-4p}) \neq 0$, se obtiene lo que queríamos demostrar.

2.3. Producto en HH para $f \in J$

En esta sección damos fórmulas para el producto en homología de Hochschild utilizando el isomorfismo de 2.2.4. Introducimos para ello una indeterminada u de grado 1 y consideraremos el espacio vectorial

$$\mathfrak{H} := \bigoplus_{p \geq 0} \Omega_A^p t^p \oplus \bigoplus_{p \geq 1} \bigoplus_{q \geq 0} (H^q(L) \oplus H^{q+1}(L)u)t^{p+q}. \quad (2.12)$$

Equipamos a \mathfrak{H} con el producto \star , siendo éste el único producto conmutativo en el sentido graduado tal que

- $\bigoplus_{p \geq 0} \Omega_A^p t^p$ con el producto usual es subálgebra,
- el otro sumando de \mathfrak{H} es un ideal,
- el producto de elementos de Ω_A^* por elementos de $H^*(L)t^*$ es el inducido por el producto de formas,
- si $\xi \in \Omega_A^p$, $\eta, \omega \in H^*(L)$ entonces

$$\begin{aligned} \omega t^p \star \eta t^q &= 0 \\ \omega t^p \star \eta u t^q &= \omega \wedge \iota_D(\eta) t^{p+q} \\ \xi t^p \star \eta u t^q &= (-1)^{|\xi|+1} (\iota_D(\xi)\eta - \xi\eta u) t^{p+q} \\ \omega u t^p \star \eta u t^q &= \omega \wedge \iota_D(\eta) u t^{p+q} \end{aligned}$$

Sea $\Lambda := \bigoplus_{p \geq 0} \Omega_A^p t^p \oplus \bigoplus_{p \geq 1} \bigoplus_{q \geq 0} H^q(L) t^{p+q}$ que equipada con el producto inducido por el producto de formas es una subálgebra de \mathfrak{H} con el producto \star . Consideremos la derivación $\Delta : \mathfrak{H}_* \rightarrow \mathfrak{H}_{*+1}$ determinada por la condición de que $\Delta|_{\Lambda} = d$ y por la condición de que para $\eta \in H^*(L)$

$$\Delta(\eta u t^p) = (p\eta + L_D(\eta))t^p - d(\eta)u t^p.$$

Proposición 2.3.1 *Existe un isomorfismo bihomogéneo natural de álgebras diferenciales graduadas $(HH_*(A), BI) \cong (\mathfrak{H}, \Delta)$.*

Demostración. Se sigue por cálculo directo, utilizando las propiedades dadas en el Lema 2.2.3, y el isomorfismo explícito de 2.2. \square

2.4. Caso en que A es $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduada

En esta sección supondremos que $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ es un álgebra $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduada, que $R_0 = k$, y que f es un elemento homogéneo de grado $r > 0$. Seguimos denotando por D a la derivación del ejemplo 2.2.1 y por A al álgebra R/f . Notar que la graduación de R se extiende al álgebra de formas diferenciales Ω_R^* , siendo determinado el grado de una forma homogénea $\omega = a_0 da_1 \dots da_n$ por

$$w(\omega) = \sum_{i=0}^n |a_i| \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

donde los a_i son elementos homogéneos de R . Entonces se tiene que el morfismo L_D viene definido por la fórmula

$$L_D(\omega) = \frac{w(\omega)}{r} \cdot \omega.$$

Observación 2.4.1 Como f es homogéneo, se tiene que para todo $p \geq 1$, el álgebra $R/f^p R$ es no negativamente graduada, siendo k su componente homogénea de grado cero. Luego por (1.10) tenemos que $H_{dR}^*(R/f^p R) = H_{dR}^*(k)$. Por tanto $H_{dR}^n(R/f^p R) = 0$, para todo $n > 0$.

Ejemplo 2.4.2 Consideremos el elemento $f = x^2 y - x \in R = k[x, y]$ y sea $A = R/fR$. Entonces $J = R$; en particular $f \in J$ y no tiene singularidades. Sin embargo A no admite ninguna graduación sin grados negativos. Para ver esto basta verificar que $H_{dR}^1(A) = \Omega_A^1/dA \neq 0$. Efectivamente, un cálculo muestra que la forma $\omega = (xy - 1)dx + xdy \in \Omega_A^1$ no es exacta.

Teorema 2.4.3 Sean R , f y A como en el comienzo de esta sección, entonces tenemos que para $1 \leq q < n$

$$HC_n^q(A)_+ = H^{2q-n+1}(L)$$

Demostración. Dado que A es no negativamente graduada, con la graduación heredada de R se tiene que el morfismo $S : HC_*(A)_+ \rightarrow HC_{*-2}(A)_+$ es nulo, por 1.5.4. Luego de la sucesión SBI se deduce que para $1 \leq q < n$

$$HC_n^q(A)_+ \cong B(HC_n^q(A)_+) \cong B \circ I(HH_n^q(A)).$$

Pero considerando los isomorfismos de la proposición 2.2.4 tenemos que

$$B \circ I(HH_n^q(A)) \cong \delta_{n-q}(H^{2q-n}(L) \oplus H^{2q-n+1}(L)).$$

Denotemos $p = n - q$ y consideremos el morfismo restricción

$$\begin{aligned} \delta_{p|H^{2q-n+1}(L)} : H^{2q-n+1}(L) &\longrightarrow H^{2q-n+1}(L) \oplus H^{2q-n+2}(L) \\ \omega &\longmapsto ((p + L_D)(\omega), -d\omega) \end{aligned}$$

Este morfismo es inyectivo, ya que si consideramos la descomposición en componentes homogéneas de $\omega = \sum_s \omega_s$ tenemos que $(p + L_D)(\omega) = 0$ implica que $(p + L_D)(\omega_s) = 0$ para todo s , es decir, que $(p + \frac{w(\omega_s)}{r})\omega_s = 0$ y dado que

la graduación es positiva llegamos a que $\omega_s = 0$. Luego $\omega = 0$ y el morfismo restricción es efectivamente inyectivo.

Veamos que

$$\delta_{p|H^{2q-n+1}(L)} : H^{2q-n+1}(L) \longrightarrow \delta_p(H^{2q-n}(L) \oplus H^{2q-n+1}(L)) \quad (2.13)$$

es sobreyectivo. Sea $(\eta, \omega) \in H^{2q-n+1}(L) \oplus H^{2q-n+2}(L)$. Si $\eta = \sum_s \eta_s$ es la descomposición de η en componentes homogéneas, entonces

$$(p + L_D)(\eta) = \sum_s \left(p + \frac{w(\eta_s)}{r} \right) \eta_s = \sum_s \lambda_s \eta_s.$$

Consideremos $\alpha = \omega + \sum_s \frac{1}{\lambda_s} d\eta_s \in Z_f^{2q-n+1}$. Entonces

$$\delta_{p|H^{2q-n}(L)}(\alpha) = ((p + L_D)(\alpha), -d\alpha)$$

Pero

$$\begin{aligned} (p + L_D)(\alpha) &= (p + L_D)(\omega) + p \sum_s \frac{1}{\lambda_s} d\eta_s + L_D \left(\sum_s \frac{1}{\lambda_s} d\eta_s \right) \\ &= (p + L_D)(\omega) + p \sum_s \frac{1}{\lambda_s} d\eta_s + d \left(\sum_s \frac{1}{\lambda_s} L_D(\eta_s) \right) \\ &= (p + L_D)(\omega) + d \left(\sum_s \frac{p + w(\eta_s)/r}{\lambda_s} \cdot \eta_s \right) \\ &= (p + L_D)(\omega) + d\eta \end{aligned}$$

y $-d\alpha = -d\omega$. Luego el morfismo (2.13) es isomorfismo, con lo que queda demostrado el enunciado. \square

Observación 2.4.4 Notar que lo que se precisa para la demostración del resultado anterior es que para $p = n - q$ el morfismo $p + L_D$ tenga un morfismo inverso, es decir, que p no sea un autovalor de L_D . Luego aunque la graduación de R admita grados negativos, si se verifica que el morfismo $S : HC_{n+2}^{q+1}(A) \rightarrow HC_n^q(A)$ es sobreyectivo, que $S : HC_n^q(A) \rightarrow HC_{n-2}^{q-1}(A)$ es inyectivo y que $n - q$ no es un autovalor de L_D entonces se tiene que $HC_n^q(A) = H^{2q-n+1}(L)$.

Corolario 2.4.5 *En las condiciones de la proposición anterior se tiene que*

$$HC_n(A) \cong HC_n(k) \oplus \frac{\Omega_A^n}{d\Omega_A^{n-1}} \oplus \bigoplus_{q=[n/2]}^{n-1} H^{2q-n+1}(L),$$

$$HH_n(A) \cong \Omega_A^n \oplus \bigoplus_{q=[n/2]}^{n-1} H^{2q-n}(L) \oplus H^{2q-n+1}(L),$$

donde $[*]$ denota la parte entera del número real no negativo $*$.

Observación 2.4.6 Notemos que si $R = k[x_1, \dots, x_m]$, el complejo L no es más que el complejo de Koszul sobre R asociado a $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\}$. Por tanto en el caso de que estos elementos formen una sucesión regular de R , L resulta exacto y como consecuencia se obtiene el resultado de Burghilea y Vigué ([BV])

$$HC_n^p(A) = \begin{cases} R/J & n = 2p \\ 0 & p < n \neq 2p \end{cases}$$

Observación 2.4.7 El teorema 2.4.3 facilita los cálculos a la hora de hacer cuentas en ejemplos concretos. Supongamos que tenemos $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in R_1 = k[x_1, \dots, x_r]$ y $f_2 \in R_2 = k[x_{r+1}, \dots, x_m]$. Si denotamos $L_i = (\Omega_{R_i}^*, df_i)$ entonces

$$L^* = L_1 \otimes_k L_2.$$

Por tanto, aplicando el teorema resulta que para $f \in J$, $HH_n^p(A)$ es igual a

$$\bigoplus_{i+j=2p-n} H^i(L_1) \otimes H^j(L_2) \oplus \bigoplus_{i+j=2p-n+1} H^i(L_1) \otimes H^j(L_2).$$

Si además f es casi homogéneo se tiene que $HC_n^p(A)$ es igual a

$$\bigoplus_{i+j=2p-n+1} H^i(L_1) \otimes H^j(L_2).$$

Esta propiedad simplifica los cálculos, ya que en la práctica es mas sencillo calcular la cohomología de los complejos L_i que directamente la del complejo L .

Ejemplo 2.4.8 Sea $f = xy^n - z^n \in R = k[x, y, z]$, donde n es un entero positivo. Consideramos $f_1 = xy^n \in R_1 = k[x, y]$ y $f_2 = z^n \in R_2 = k[z]$, entonces definimos los complejos

$$L_1 : \Omega_{R_1}^0 \xrightarrow{df_1} \Omega_{R_1}^1 \xrightarrow{df_1} \Omega_{R_1}^2,$$

$$L_2 : \Omega_{R_2}^0 \xrightarrow{df_2} \Omega_{R_2}^1.$$

Con cálculos simples llegamos a que la cohomología de estos complejos se reduce a

$$H^p(L_1) = \begin{cases} \frac{k[x,y]}{\langle xy^{n-1}, y^n \rangle}, & p = 2 \\ \frac{k[x,y]}{\langle y^{n-1} \rangle}, & p = 1 \\ 0, & \text{el resto} \end{cases} \quad H^p(L_2) = \begin{cases} \frac{k[z]}{\langle z^{n-1} \rangle}, & p = 1 \\ 0, & \text{el resto} \end{cases}$$

Luego utilizando la propiedad (2.4.7) y el teorema (2.4.3) llegamos a que, para $q < p$,

$$HC_p^q(A)_+ = \begin{cases} \frac{k[x,y,z]}{\langle xy^{n-1}, y^n, z^{n-1} \rangle}, & p = 2q - 2 \\ \frac{k[x,y,z]}{\langle y^{n-1}, z^{n-1} \rangle}, & n = 2q - 1 \\ 0, & \text{el resto} \end{cases}$$

2.5. Producto en HN para f casi homogéneo

En virtud de (1.39) tenemos que $HC_n^p(A)_+ \cong HN_{n+1}^{p+1}(A)$ para $n \geq p \geq 0$. Luego usando el teorema 2.4.3 y la fórmula (1.38) tenemos

$$HN_*(A) = k[t^{-1}] \oplus \bigoplus_{p \geq 1} Z^p \Omega_A t^p \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \bigoplus_{1 \leq p < n} H^{2p-n}(L) t^p. \quad (2.14)$$

En esta sección daremos fórmulas para el producto en $HN_*(A)$ en términos del isomorfismo (2.14). Dado que multiplicar por t^{-1} es aplicar el morfismo S , es claro que el producto de cualquier elemento de $t^{-1}k[t^{-1}]$ con cualquier elemento de $HN_n(A)$ con $n > 0$ es cero. Por otro lado para $n \geq 0$ el morfismo

$$HN_n A \rightarrow HH_n A \quad (2.15)$$

es inyectivo y compatible con el producto. Se sigue que el producto en la subálgebra $Z\Omega_A^*$ es el producto de formas, y que $\bigoplus_{1 \leq p < n} H^{2p-n}(L) t^p$ es un ideal en $HN_*(A)$. Resta determinar el producto entre dos elementos de $\bigoplus_{1 \leq p < n} H^{2p-n}(L) t^p$ y entre elementos de $\bigoplus_{1 \leq p < n} H^{2p-n}(L) t^p$ y elementos de $Z\Omega_A^*$. Para ello utilizamos la descripción explícita de la restricción de (2.15) a $HH_n^p(A)$ en términos del isomorfismo (2.14). Para $0 \leq p \leq n$, la restricción de (2.15) a $HH_n^p(A)$ induce el isomorfismo

$$HN_n^p(A) \cong H^{2p-n}(L) ut^p \xrightarrow{\Delta} \Delta(H^{2p-n-1}(L) t^p \oplus H^{2p-n}(L) ut^p) = BI(HH_n^p(A)). \quad (2.16)$$

Para $q \geq 1$, sea

$$M_q := (L_D + q)^{-1} : H^*(L) \rightarrow H^*(L).$$

Por la demostración de 2.4.3, la inversa de (2.16) envía

$$\text{“}\Delta^{-1}\text{”} := (\Delta|_{H^{2p-n}(L)ut^p})^{-1} : \Delta(\eta t^p + \omega ut^p) \mapsto (\omega + M_{n+1-p}d\eta)t^p. \quad (2.17)$$

Ahora utilizamos estas fórmulas para describir el producto en $HN_*(A)$. Sean $\xi \in Z\Omega_A^s$ y $\eta \in H^{2p-n}(L)$. El producto de $\xi t^s \in HN_s^s(A)t^s$ con $\eta t^p \in HN_n^p(A)t^p$ es

$$\begin{aligned} \xi t^s \bullet \omega t^p &= \text{“}\Delta^{-1}\text{”}(\xi t^s \Delta(\omega ut^p)) \\ &= \text{“}\Delta^{-1}\text{”}((-1)^{|\xi|} \Delta(\xi \star \omega ut^p)) \\ &= \text{“}\Delta^{-1}\text{”} \Delta((\xi \omega u - \iota_D(\xi)\omega)t^{p+s}) \\ &= (\xi \omega - M_{n+1-p}d\iota_D(\xi)\omega)t^{p+s}. \end{aligned}$$

Sean $n > p \geq (n+1)/2$, $r > q \geq (r+1)/2$, $\omega \in H^{2p-n}(L) = HN_n^p(A) \subset HH_n^p(A)$ y $\eta \in H^{2q-r}(L) = HN_r^q(A) \subset HH_r^q(A)$. Entonces

$$\Delta(\omega t^p) \star \Delta(\eta t^s) = \mu t^{p+s}$$

donde, para $i = n+1-p$, $j = r+1-q$,

$$\mu = -(i + L_D)(\omega) \wedge \iota_D(d\eta) + (-1)^{|\omega|+1} d\omega(j + L_D)(\iota_D\eta) + d\omega \wedge \iota_D(d\eta)u \quad (2.18)$$

Ahora queremos calcular una preimagen de μt^{p+s} a través de Δ . Para ello reescribimos adecuadamente cada uno de los tres sumandos de μ , utilizando 2.2.3 v) y las fórmulas de la sección 2.3. El primer término es

$$\begin{aligned} -(i + L_D)(\omega) \wedge \iota_D(d\eta) &= -(i + L_D)(\omega)L_D\eta + (i + L_D)(\omega)d\iota_D\eta \\ &\quad (i + L_D)(\omega)d\iota_D\eta \end{aligned}$$

Calculamos ahora el segundo término

$$\begin{aligned} (-1)^{|\omega|+1} d\omega(j + L_D)(\iota_D\eta) &= d(\iota_D(\omega)(j + L_D)\eta) + \omega(j + L_D)d\iota_D\eta \\ &= d(\iota_D(\omega)(j + L_D)\eta) + j\omega d\iota_D\eta \\ &\quad + L_D(\omega d\iota_D\eta) - L_D(\omega)d\iota_D\eta \end{aligned}$$

Sumando el primer y segundo término se obtiene entonces

$$\begin{aligned} -(i + L_D)(\omega) \wedge \iota_D(d\eta) + (-1)^{|\omega|+1} d\omega(j + L_D)(\iota_D\eta) &= \\ (i + j + L_D)(\omega d\iota_D\eta) + d(\iota_D(\omega)(j + L_D)(\eta)) & \end{aligned}$$

Por otra parte observemos que el tercer término de (2.18) puede reescribirse como sigue

$$d\omega \wedge \iota_D(d\eta)u = -d\omega d\iota_D\eta = -d(\omega d\iota_D\eta)$$

En resumen, nos queda

$$\mu = \delta_{p+q}(\iota_D(\omega)(j + L_D)(\eta) + (\omega d\iota_D\eta)u).$$

Por tanto

$$\omega t^p \bullet \eta t^s = \omega d\iota_D\eta + M_{i+j-1}(\iota_D(\omega)(j + L_D)(\eta)). \quad (2.19)$$

Capítulo 3

Hipersuperficies con singularidades aisladas.

En este capítulo nos concentraremos en el caso de hipersuperficies con singularidades aisladas. Sea R una k -álgebra que es un dominio regular esencialmente de tipo finito de dimensión de Krull m y tal que el grado de trascendencia de su cuerpo de fracciones sobre k es m . Sea $f \in R$ con singularidades aisladas, es decir, tal que su lugar singular $Sing f = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_u\}$ es finito, y sea $A = R/fR$. Denotamos por R_i al localizado $R_{\mathfrak{m}_i}$, entonces en virtud de la hipótesis exigida a R , $R_i/\mathfrak{m}_i R_i$ es una extensión finita de k . A lo largo de este capítulo consideraremos R , f y A tal y como los hemos definido aquí.

3.1. Cálculos previos

Definición 3.1.1 Un **retracto por deformación** (en adelante también **RD**) es una upla (L, M, s, p, h) , donde (L, δ) y (M, ∂) son complejos, s, p son morfismos de complejos

$$L \xrightarrow{s} M \xrightarrow{p} L$$

y h es una homotopía sobre M tal que

$$p \circ s = id_L \quad y \quad s \circ p = id_M + \partial \circ h + h \circ \partial.$$

Se dice que el **RD** (L, M, s, p, h) es **filtrado** si existen filtraciones sobre L y M que son preservadas por s, p y h .

Lema 3.1.2 (Lema de Perturbación) Sea (L, M, s, p, h) un **RD** y d un morfismo de grado -1 en M tal que $(\partial + d)^2 = 0$. Entonces denotamos,

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= p(dh)^{n-1}ds, n \geq 1 & y & \quad \Delta_0 = \delta \\
S_n &= h(dh)^{n-1}ds, n \geq 1 & y & \quad S_0 = s \\
P_n &= p(dh)^{n-1}dh, n \geq 1 & y & \quad P_0 = p \\
H_n &= h(dh)^{n-1}dh, n \geq 1 & y & \quad H_0 = h
\end{aligned}$$

Si el **RD** es filtrado y d disminuye el índice de la filtración, entonces podemos tomar

$$\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n, \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n, \quad P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n, \quad y \quad H = \sum_{n=0}^{\infty} H_n$$

verificando que $((L, \Delta), (M, \partial + d), S, P, H)$ es un **RD** filtrado. Para más detalles ver [Kas].

3.1.3 Al igual que en el capítulo 2 podemos considerar el modelo de cadena $\Gamma \rightarrow A$ donde $\Gamma = R \otimes \Lambda V$ y $V = k \oplus ky$. Recordemos que $HH_n^p A = H_{n-p}(\Omega_\Gamma^p, \partial)$. Sea $\Gamma^i = R_i \otimes_R \Gamma$. Dado que para $p < n$, el A -módulo $HH_n^p(A)$ está soportado en *Singf*, se tiene que el morfismo

$$\Omega_\Gamma^p \rightarrow \bigoplus_i \Omega_{\Gamma^i}^p \quad (3.1)$$

induce un isomorfismo en H_{n-p} para $n > p$. Se sigue de los cálculos de Michler (ver [Mic2]) que

$$H_q(\Omega_\Gamma^p) = \begin{cases} \Omega_R^p, & q = 0 \\ \frac{(J:f)}{J}, & p \geq m, q = p - m + 1 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.2)$$

Aquí $(J : f)$ representa el ideal de R anulador de f en R/J . En particular se tiene que

$$H_0(\Omega_\Gamma^m) = \Omega_A^m \cong R/fR + J.$$

En lo que sigue estudiaremos la sucesión espectral asociada a la filtración por columnas del complejo $\Omega_\Gamma^{\geq m}$. Notemos que, dado que la aplicación (3.1) es un cuasi-isomorfismo para $p \geq m$, el morfismo de complejos

$$\Omega_\Gamma^{\geq m} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_i \Omega_{\Gamma^i}^{\geq m} \quad (3.3)$$

es un cuasi-isomorfismo y, más aún, induce un isomorfismo en cada nivel de la sucesión espectral. Gracias a esta observación, podremos restringirnos al caso en que R es local toda vez que resulte conveniente.

Como k es un cuerpo entonces todos los k -módulos son proyectivos y por tanto podemos definir, para todo $p \geq m$ morfismos de complejos

$$s : ((H_*(\Omega_\Gamma^p), 0) \rightarrow (\Omega_\Gamma^p, \partial) \text{ y } \pi : (\Omega_\Gamma^p, \partial) \rightarrow (H_*(\Omega_\Gamma^m), 0)$$

tales que $(H_*(\Omega_\Gamma^p), \Omega_\Gamma^p, s, \pi, h)$ es un retracto por deformación.

Por otro lado sabemos que el complejo $\hat{\Omega}_\Gamma^p$ tiene definido un morfismo de grado -1 , d , que baja en 1 el índice de la filtración por columnas. Por tanto podemos aplicar el Lema de Perturbación. Consideremos los morfismos $\Delta_i = \pi \circ d \circ (h \circ d)^{\circ i-1} \circ s$ para $i \geq 1$ y $\Delta_0 = 0$. Entonces definimos el complejo de dos términos

$$\mathcal{C}_n = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty} (J : f) / J & , \quad n = 1 - m \\ \prod_{i=0}^{\infty} \Omega_A^m & , \quad n = -m \\ 0 & , \quad \text{el resto} \end{cases}$$

Cuyo borde es $\Delta = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i$. Por el Lema de Perturbación, los complejos \mathcal{C} y $\hat{\Omega}_\Gamma^{\geq m}$ son homotópicamente equivalentes. Por otro lado, la filtración que nos da el Lema de Perturbación en el complejo \mathcal{C} es $\{\mathcal{F}_p \mathcal{C}\}_{p \leq -m}$ dada por

$$\mathcal{F}_p \mathcal{C} : \prod_{n \geq p-m} \Omega_A^m \longleftarrow \prod_{n \geq p-m+1} (J : f) / J$$

y en el complejo $\hat{\Omega}_\Gamma^{\geq m}$ viene dada por $\{\hat{\Omega}_\Gamma^{\geq p}\}_{p \geq m}$. Puesto que el **RD** es filtrado se tiene por el lema 3.1.2 que los morfismos S , P y H preservan la filtración. Luego los complejos $S(\mathcal{F}_p \mathcal{C})$ y $\hat{\Omega}_\Gamma^{\geq p}$ también son homotópicamente equivalentes con lo cual se llega a que $H_*(\mathcal{F}_p \mathcal{C}) \cong H_*(\hat{\Omega}_\Gamma^{\geq p})$, que por (2.1) se tiene que es isomorfo a $HN_{*+2p}^p(A)$.

Consideremos la sucesión espectral asociada a la filtración \mathcal{F}

$$E_{p,q}^0 = E_{p,q}^1 = \begin{cases} (J : f) / J & , p + q = 1 - m \\ R / fR + J = \Omega_A^m & , p + q = -m \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (3.4)$$

La primera diferencial espectral es $\Delta_1 : E_{p,1-m-p}^1 \rightarrow E_{p-1,1-m-p}^1$. En general la r -ésima diferencial espectral es una aplicación $\bar{\Delta}_r : E_{p,1-m-p}^r \rightarrow E_{p-r,2-m-p-r}^r$ inducida por Δ_r , donde

$$E_{p,1-m-p}^r = \ker \bar{\Delta}_{r-1} \quad E_{p,-m-p}^r = (R/fR + J) / \sum_{i=1}^{r-1} \bar{\Delta}_i(E_{p+i,i-p-m-1}^i).$$

Esta sucesión espectral es regular, es decir, que para cada (p, q) existe un $r_{p,q}$ suficientemente grande tal que $E_{p,q}^n = E_{p,q}^\infty$ para todo $n \geq r_{p,q}$. Esto es cierto ya que los $E_{p,q}^1$ son k -espacios vectoriales de dimensión finita por tanto los $E_{p,q}^r$ son también espacios vectoriales de dimensión finita menor o igual que la de $E_{p,q}^1$, ya que o son cero, o están contenidos en $E_{p,q}^1$ (para $q = 1 - m - p$), o son cocientes de $E_{p,q}^1$ (para $q = -m - p$). Luego los morfismos $\bar{\Delta}_r$ son nulos o bajan la dimensión, en cualquier caso llega un momento en que $E_{p,q}^r = E_{p,q}^\infty$, bien sea porque llega a cero o porque a partir de él todos los $\bar{\Delta}_r$ son nulos. Por otro lado tenemos que la filtración \mathcal{F} es completa y exhaustiva. Completa ya que $\varprojlim \mathcal{C}/\mathcal{F}_p\mathcal{C} = \mathcal{C}$ y exhaustiva porque $\cdots \subset \mathcal{F}_{p-1}\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_p\mathcal{C} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_m\mathcal{C} = \mathcal{C}$ luego, $\cup \mathcal{F}_p\mathcal{C} = \mathcal{C}$. Por el Teorema 5.5.10 de [Wei] tenemos que la sucesión espectral E converge débilmente a la homología $H_*(\mathcal{C})$. Esto quiere decir que para todo p y q existen isomorfismos $E_{p,q}^\infty \cong F_p H_{p+q}(\mathcal{C}) / F_{p-1} H_{p+q}(\mathcal{C})$ donde F es la filtración inducida por \mathcal{F} en la homología de \mathcal{C} .

3.2. Sucesión espectral genérica

Consideremos ahora el complejo doble $\Omega_\Gamma(t)$ donde

$$(\Omega_\Gamma(t))_{p,q} = k[t] \otimes (\Omega_\Gamma)_{p,q}$$

y donde los morfismos de borde vienen dados por los morfismos de $k[t]$ -módulos

$$d_t = \begin{pmatrix} 1 \otimes d & 0 \\ (-1)^{1-p-q} t \otimes 1 & 1 \otimes d \end{pmatrix} \quad \partial_t = \begin{pmatrix} -1 \otimes df & 0 \\ (-1)^{1-p-q} \otimes f & -1 \otimes df \end{pmatrix}$$

De forma análoga a lo que se hacía en el apartado anterior se obtiene que $(k[t] \otimes H_*(\Omega_\Gamma^m), \Omega_\Gamma^m(t), s_t, \pi_t, h_t)$ es un retracto por deformación, donde los morfismos s_t , π_t y h_t no son más que los morfismos anteriores tensorizados a izquierda por 1. También podemos considerar los morfismos para $i \geq 0$ (con $\Delta_0(t) = 0$),

$$\Delta_{i+1}(t) = \pi_t \circ d_{t+i} \circ (h \circ d_{t+i-1} \circ \cdots \circ h \circ d_{t+1} \circ h \circ d_t) \circ s_t. \quad (3.5)$$

donde $\Delta_{i+1}(t) : k[t] \otimes (J : f)/J \rightarrow k[t] \otimes R/(fR + J)$. Tenemos que el morfismo $\Delta_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i(t)$ define un morfismo borde en el complejo \mathcal{C}_t

$$\mathcal{C}_{t,n} = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty} k[t] \otimes (J : f)/J, & n = 1 - m \\ \prod_{i=0}^{\infty} k[t] \otimes \Omega_A^m, & n = -m \\ 0, & \text{el resto} \end{cases}$$

Por el Lema de Perturbación, dicho complejo y el complejo total $\hat{\Omega}_{\Gamma}^{\geq m}(t) = Tot\Omega_{\Gamma}^{\geq m}(t)$ son homotópicamente equivalentes. Aquí tomamos el complejo total en cada término como el producto de las diagonales. También se tiene que la equivalencia preserva la filtración inducida por los $\mathcal{F}_p\mathcal{C}_t$, o sea que $\mathcal{F}_p\mathcal{C}_t$ es homotópicamente equivalente a $Tot(\Omega_{\Gamma}^{\geq m+p}(t))$. Esta equivalencia homotópica induce un morfismo entre las sucesiones espectrales asociadas

$$\bar{E}_{p,q}^* = \frac{(\mathcal{F}_p\mathcal{C}_t)_{p+q}}{(\mathcal{F}_{p-1}\mathcal{C}_t)_{p+q}} \quad y \quad \tilde{E}_{p,q}^* = (\Omega_{\Gamma}^{m+p}(t))_{p+q} \quad (3.6)$$

que es isomorfismo para \bar{E}^1 . Notar que para un elemento $\omega = (\omega_i)_{i \geq 0}$ de $\prod_{i=0}^{\infty} (J : f)/J = \mathcal{C}_{1-m}$ tenemos que

$$(\Delta\omega)_i = \sum_{j=1}^i \Delta_i \omega_{j-i} = \sum_{j=1}^i \Delta_j (i - j + 1) \omega_{i-j}. \quad (3.7)$$

Consideremos ahora $L_1(t) = k[t] \otimes (J : f)/J$ y $C_1(t) = k[t] \otimes \Omega_A^m$, y definamos en general

$$L_{n+1}(t) = \ker(\Delta_n(t)), \quad C_{n+1}(t) = \text{coker}(\Delta_n(t+1)), \quad (3.8)$$

donde $\Delta_n(t) : L_n(t) \rightarrow C_n(t)$ está definida como en (3.5). Así, la sucesión espectral en el nivel 1, $\bar{E}_{*,*}^1$ quedaría de la forma

Notación 3.2.1 Notar que a pesar de que los $k[t]$ -módulos $L_r(t)$ y $L_r(t+i)$ son esencialmente diferentes se tiene que son isomorfos. A partir de ahora cuando no haya lugar a confusión, es decir, cuando consideremos uno sólo, escribiremos L_r por $L_r(t)$.

Observación 3.2.2 Para cada $1 \leq i \leq u$ sean $L_n(t)_i$ y $C_n(t)_i$ los términos de la sucesión espectral genérica correspondiente a Γ^i . El argumento de (3.3) muestra que

$$L_n(t) = \bigoplus_{0 \leq i \leq u} L_n(t)_i, \quad (3.9)$$

$$C_n(t) = \bigoplus_{0 \leq i \leq u} C_n(t)_i. \quad (3.10)$$

3.3. Degeneración de $L_*(t)$ e índice de Briançon-Skoda.

Para cada punto singular p_i de f , el radical del ideal jacobiano localizado J_i es todo el maximal. Por tanto J_i contiene una potencia de f . Se sigue que el operador multiplicación por f es un operador nilpotente en $\bigoplus_{i=1}^u R_i/J_i$; llamaremos **índice de Briançon-Skoda** a su índice de nilpotencia, y lo denotaremos por $\mathfrak{bs}(f)$ o simplemente \mathfrak{bs} . Tenemos

$$\mathfrak{bs} = \max_{1 \leq i \leq u} \min\{n \geq 1 : f^n \in J_i\}$$

El teorema de Briançon-Skoda ([BS], ver también [LT]) establece que

$$\mathfrak{bs} \leq m. \quad (3.11)$$

El teorema principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 3.3.1 $L_{\mathfrak{bs}+1}(t) = 0$.

Exhibiremos la demostración al final de la sección. Antes necesitamos algunos resultados preliminares. Notemos que, en virtud de (3.9), basta probar el teorema para R local. Por esa razón, en lo que sigue de la sección, y hasta la demostración del teorema 3.3.1 **supondremos que R es local**.

Para cada κ denotamos por Ω_t^κ a $\Omega_R^\kappa \otimes k[t]$. Sobre este espacio podemos definir el concepto de t -grado considerando que un elemento $\omega \otimes p(t) \in \Omega_t^\kappa$

tiene como grado el grado del polinomio $p(t)$. Luego el t -grado de un elemento $\alpha = \sum_{i=1}^n \omega_i \otimes p_i(t) \in \Omega_t^\kappa$ se define como

$$\deg_t(\alpha) = \max_i \{\deg p_i(t)\}.$$

Sea $r \in \mathbb{N}$ y consideremos el complejo $\Omega_\Gamma^{p \leq \leq p+r}(t)$. Dentro de este complejo consideramos la filtración $\mathcal{G}_n(\Omega_\Gamma^{p \leq \leq p+r}(t))$ tal que

$$(\mathcal{G}_n(\Omega_\Gamma^{p \leq \leq p+r}(t)))_{-(m+i),b} = \{\alpha \in \Omega_\Gamma^{m+i}(t)_b : \deg_t \alpha \leq n + i\}.$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega_t^s \oplus \Omega_t^{s+1}$, y $\deg_t(\alpha)$ se define como el máximo entre $\deg_t(\alpha_1)$ y $\deg_t(\alpha_2)$. La columna $-m - i$ de $\mathcal{G}_n(\Omega_\Gamma^{p \leq \leq p+r}(t))$ es

$$\mathcal{G}_n(\Omega_\Gamma^{m \leq \leq m+r}(t))_{-m-i,*} = \bigoplus_{j=0}^{n+i} \Omega_\Gamma^{m+i} t^j$$

Esta filtración es exhaustiva, ya que la unión de todos los elementos de la filtración da el espacio total, y Hausdorff dado que la intersección es 0, puesto que $\mathcal{G}_{-r-1}(\Omega_\Gamma^{p \leq i \leq p+r}(t)) = 0$. Consideremos la proyección $\pi : \Omega_\Gamma^{m \leq \leq m+r}(t) \rightarrow \Omega_\Gamma^m(t)$. Se tiene que

$$\pi(H_{1-m}(\Omega_\Gamma^{m \leq \leq m+r}(t))) = L_{r+1}(t).$$

Definimos sobre $L_r(t)$ la filtración

$$\mathcal{G}_n L_r(t) := \pi(\mathcal{G}_n(H_{1-m}(\Omega_\Gamma^{m \leq \leq m+r-1}(t))))).$$

Vamos a definir un morfismo

$$\phi : \mathcal{G}_n L_{r+1}(t) \rightarrow \frac{(J : f^{r+1})}{(J : f^r)}.$$

Para ello necesitamos algunos preliminares y notación. Fijamos $x_1, \dots, x_m \in R$ un sistema de parámetros; notemos que $\Omega^p := \Omega_R^p$ es un R -módulo libre con base $\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} : i_1 < \dots < i_p\}$. Sea $\nu = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \in \Omega^m$ la forma de volumen. Si

$$\xi := ((a_0 \nu, \omega_0), \dots, (a_r \nu, \omega_r)) \in \mathcal{G}_n \Omega_\Gamma^{m+r \geq \geq m}$$

es un $(1 - m)$ -ciclo, entonces

$$(-1)^m f a_0 - df \wedge \omega_0 = 0$$

y para todo $0 \leq p \leq r - 1$ se tiene

$$0 = (-1)^m f a_{p+1} \nu - df \wedge \omega_{p+1} + (-1)^m a_p (t + p) + d\omega_p.$$

Como $\xi \in \mathcal{G}_n \Omega_\Gamma^{m+r} \geq \geq m$, $\max\{\deg_t(\omega_i), \deg_t(a_i)\} \leq n + i$. Sean $\eta_i \in \Omega^{m-1}$ y $b_i \in R$ de modo que

$$\begin{aligned} a_i &= (-1)^m b_i t^{n+i} + \text{términos de grado menor,} \\ \omega_i &= (-1)^m \eta_i t^{n+i} + \text{términos de grado menor.} \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$f b_0 = df \wedge \eta_0 \quad \text{y} \quad b_p = df \wedge \eta_{p+1} - f b_{p+1} \nu, \quad (r - 1 \geq p \geq 0). \quad (3.12)$$

Se sigue que

$$f^{r+1} b_r = \sum_{i=0}^r (-1)^i f^i df \wedge \eta_i \in J. \quad (3.13)$$

Por tanto $b_r \in (J : f^{r+1})$.

Proposición 3.3.2 *Sea $G_* L_r$ el álgebra graduada asociada a la filtración $\mathcal{G}_* L_r(t)$. Para cada $n \geq 0$, la aplicación $Z_{1-m} \mathcal{G}_n \Omega_\Gamma^{m+r} \geq \geq m \rightarrow (J : f^{r+1})$, $\xi \mapsto b_r$ definida arriba induce un monomorfismo*

$$\phi : G_n L_{r+1}(t) \hookrightarrow \frac{(J : f^{r+1})}{(J : f^r)}[t] \quad (3.14)$$

Demostración. Sea $L_i = L_i(t)$. Por definición, $L_r \subset L_1 = H_1(\Omega_\Gamma^m)[t] \cong \frac{(J:f)}{J}[t]$. Observemos además que el isomorfismo $H_1(\Omega_\Gamma^m) \cong \frac{(J:f)}{J}$ es inducido por $(b, \eta) \mapsto b$. Así, para ver que $\xi \mapsto b_r$ da un morfismo bien definido

$$\phi : \mathcal{G}_n L_{r+1} \rightarrow (J : f^{r+1}) / (J : f^r)[t] \quad (3.15)$$

basta verificar que si $a_0 \in J[t]$ entonces $b_r \in (J : f^r)$. Pero si $a_0 \in J[t]$, entonces $b_0 \in J$, y por (3.12) y (3.13), $f^{r+1} b_r \in fJ$. Por tanto $f^r b - r \in J$, es decir, $f \in (J : f^r)$. Esto prueba que (3.15) es un morfismo bien definido. Por otra parte es claro que $\phi(\mathcal{G}_{n-1} L_{r+1} \rightarrow (J : f^{r+1}) / (J : f^r)[t]) = 0$, y por tanto (3.14) está bien definido. Resta ver que (3.14) es inyectiva. Pero si en (3.13) $b_r \in (J : f^r)$ entonces

$$fb_0 = df \wedge \eta_0 = f(f^r b_r + \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} f^i df \wedge \eta_i) \in fJ$$

Luego $b_0 \in J$, y de ahí la imagen de $\xi \in L_r$ está en $\mathcal{G}_{n-1}L_r$. \square

Demostración. [del Teorema 3.3.1]

Como se observó arriba, podemos suponer que R es local. Por la proposición 3.3.2, $G_*L_{b_{\mathfrak{s}+1}} = 0$. Como la filtración \mathcal{G}_*L_i es Hausdorff y exhaustiva, se sigue que $L_{b_{\mathfrak{s}+1}} = 0$. \square

3.4. Evaluación de la sucesión espectral genérica.

Lema 3.4.1 Sean $n \geq 1$, $L_n(t)$ y $C_n(t)$ como en (3.8) y $TC_n(t)$ el $k[t]$ -submódulo de torsión de $C_n(t)$. Entonces $L_n(t)$ y $C_n(t)$ son $k[t]$ -módulos finitamente generados. Más aún, $L_n(t)$ es libre y existe un isomorfismo $k[t]$ -lineal

$$C_n(t)/TC_n(t) \cong L_n(t).$$

Demostración. Como observó Michler en [Mic2], $\mu := \dim R/fR + J = \dim(J : f)/J$. Luego $L_1(t)$ y $C_1(t)$ son $k[t]$ -módulos libres de rango μ . Como $L_n \subset L_1$ es un $k[t]$ -submódulo, se tiene que es libre y de rango finito y como C_n es un cociente de C_1 , se tiene que es finitamente generado.

Supongamos por hipótesis de inducción que $\text{rk } L_n = \text{rk } C_n$. Entonces podemos elegir bases de $k(t) \otimes_{k[t]} L_n$ y de $k(t) \otimes_{k[t]} C_n$, y considerar la matriz $M(t)$ de $1 \otimes \Delta_n(t)$ con respecto a las bases elegidas. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{rk } L_{n+1} &= \text{rk coker } \Delta_n(t) \\ &= \text{rk } C_n - \text{rk } M(t) \\ &= \text{rk } C_n - \text{rk } M(t+1) \\ &= \text{rk } C_{n+1} \end{aligned}$$

Con esto hemos probado que L_n es libre y que $\text{rk } L_n = \text{rk } C_n < \infty$ para todo n , de lo cual se sigue que $C_n/TC_n \cong L_n$. \square

Notación 3.4.2 Si M es un $k[t]$ -módulo, denotamos por $\text{sp } M$ al conjunto de aquellos enteros positivos que están en el espectro del operador $m \rightarrow tm$, es decir,

$$\text{sp } M := \{l \in \mathbb{Z}_{>0} : \ker(t - l : M \rightarrow M) \neq 0\}. \quad (3.16)$$

Lema 3.4.3 *Sea*

$$k[t]^q \xrightarrow{\alpha} k[t]^p \rightarrow M \rightarrow 0$$

una sucesión exacta de $k[t]$ -módulos, donde $\alpha \in k[t]^{p \times q}$. Denotamos $r = \text{rk } \alpha$ y por $\chi(t)$ al generador mónico del ideal generado por todos los $r \times r$ -menores de α . Entonces

$$\text{sp } M = \{l \in \mathbb{Z}_{>0} : \chi(l) = 0\}.$$

Demostración. Por resultados de teoría elemental de módulos sobre dominios Euclídeos, se pueden elegir bases de $k[t]^p$ y de $k[t]^q$, de tal forma que bajo estas nuevas bases el morfismo α se puede expresar con una matriz diagonal. Como χ es invariante por estos cambios de base podemos asumir que α es diagonal. Bajo esta suposición es claro que χ es el polinomio característico de multiplicar por t en el submódulo de torsión TM , de lo cual se sigue el enunciado. \square

Observación 3.4.4 El ideal $I(M) := \langle \chi(t) \rangle$ del lema anterior es el ideal de Fitting de M (ver [Eis, Sec.20]). La demostración muestra que $\chi(t)$ es el polinomio característico de la transformación k -lineal “multiplicar por t ” sobre el submódulo de torsión TM .

Lema 3.4.5 Sean $n \geq 1$, $L_n(T)$ y $C_n(t)$ como en (3.8), y E la sucesión espectral de (3.6). Denotemos por $\Delta'_n(t) : L_n \rightarrow C_n/TC_n$ a la composición de $\Delta_n(t)$ y la proyección natural. Consideremos

$$c_n = \begin{cases} 1 + \text{máx } \bigcup_{i=1}^{n-1} \text{sp } \text{coker } \Delta'_i(t), & \text{si } \bigcup_{i=1}^{n-1} \text{sp } \text{coker } \Delta'_i(t) \neq \emptyset \\ 1 & , \text{ otro caso.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Entonces

$$\dim E_{-m-l,1+l}^n = \dim E_{-m-l-n,l+n}^n = \text{rk } L_n(t), \quad (\forall l \geq c_n). \quad (3.18)$$

Demostración. Para $l \in \mathbb{Z}$, definimos $k_l := k[t]/(t-l)k[t]$. Por el Lema 3.4.1 es suficiente probar que para $l \geq c_n$, multiplicar por $t-l$ es un isomorfismo en TC_n , y que existen isomorfismos

$$E_{-m-l,1+l}^n \cong k_l \otimes_{k[t]} L_n, \quad E_{-m-l-n,l+n}^n \cong k_l \otimes_{k[t]} C_n. \quad (3.19)$$

Probaremos esto por inducción sobre n . Para $n = 1$ tenemos $TC_1 = 0$, $c_1 = 1$ y (3.19) es cierto por (3.7). Supongamos, como hipótesis de inducción, que multiplicar por $t - l$ es un isomorfismo sobre TC_n y que (3.19) se verifica para n . Entonces para $l \geq c_n$ tenemos

$$E_{-m-l,1+l}^{n+1} = \ker(1 \otimes \Delta(t) : k_l \otimes_{k[t]} L_n \rightarrow k_l \otimes_{k[t]} C_n), \quad (3.20)$$

$$E_{-m-l-n-1,l+n+1}^{n+1} = \text{coker}(1 \otimes \Delta(t+1) : k_l \otimes_{k[t]} L_n \rightarrow k_l \otimes_{k[t]} C_n). \quad (3.21)$$

Denotemos $C_{n+1}(t-1) := \text{coker} \Delta_n(t)$, $Q_{n+1}(t-1) := \text{coker} \Delta'_n(t)$, entonces tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & TC_n & \longrightarrow & K & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im } \Delta_n(t) & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & C_{n+1}(t-1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im } \Delta'_n(t) & \longrightarrow & C_n/TC_n & \longrightarrow & Q_{n+1}(t-1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (3.22)$$

Aquí K está definido por la exactitud de la columna de la derecha. Notar que los tres morfismos verticales que salen de la fila del medio dan lugar a isomorfismos cuando tensorizamos con el cuerpo $k(t)$. Se sigue, por tanto, la exactitud de la siguiente sucesión,

$$0 \rightarrow K \rightarrow TC_{n+1}(t-1) \rightarrow TQ_{n+1}(t-1) \rightarrow 0 \quad (3.23)$$

Por hipótesis de inducción y dado que $c_{n+1} \geq c_n$ se tiene que para $l \geq c_{n+1}$ multiplicar por $t - l$ es un isomorfismo en TC_n . Luego $t - l : K \rightarrow K$ es sobreyectiva y en consecuencia un isomorfismo ya que K tiene longitud finita. Por otro lado, de la definición de c_{n+1} y el hecho de que $l \geq c_{n+1}$, se tiene que multiplicar por $t - l$ es un isomorfismo en $TQ_n(t-1)$. Por tanto multiplicar por $t - l$ es un isomorfismo en $TC_{n+1}(t-1)$ por la sucesión (3.23). De todos estos resultados y de la resolución libre

$$0 \rightarrow k[t] \xrightarrow{t-l} k[t] \rightarrow k_l \rightarrow 0$$

obtenemos que

$$\operatorname{Tor}_1^{k[t]}(k_l, C_{n+1}(t-1)) = \operatorname{Tor}_1^{k[t]}(k_l, C_n(t)) = \operatorname{Tor}_1^{k[t]}(\operatorname{Im} \Delta_n(t), k_l) = 0. \quad (3.24)$$

Luego la siguiente sucesión permanece exacta al tensorizar con k_l

$$0 \rightarrow L_{n+1} \longrightarrow L_n \xrightarrow{\Delta_n(t)} C_n \longrightarrow C_{n+1}(t-1) \rightarrow 0 \quad (3.25)$$

Por (3.20), esto prueba que

$$E_{-m-l, 1+l}^{n+1} = k_l \otimes_{k[t]} L_{n+1} \quad (3.26)$$

Sea $Q_{n+1} = \operatorname{coker} \Delta'_n(t+1)$. El mismo argumento anterior prueba que

$$E_{-m-l-n-1, 1+l+n}^{n+1} = k_l \otimes_{k[t]} C_{n+1} \quad (3.27)$$

para cualquier $l \geq c_n$ siendo multiplicación por $t-l$ en Q_{n+1} un monomorfismo. Pero por 3.4.3, $\operatorname{sp} Q_{n+1} = \operatorname{sp} Q_{n+1}(t-1) - 1$. Luego si $l \geq c_{n+1}$, se tiene que (3.27) se verifica para $l \geq c_{n+1}$. \square

Observación 3.4.6 Notar que usando el Teorema 3.3.1 y el Lema 3.4.5, tenemos que si r es tal que $L_r = 0$ (e.g. $r = \mathfrak{b}\mathfrak{s} + 1$) entonces para $n \geq r$ y $l \geq c_r$

$$E_{-m-l, 1-l}^n = E_{-m-l-n, l+n}^n = 0.$$

Por un lado observamos que $E_{*,*}^\infty = E_{*,*}^r$ y por otro lado que para cada n se tiene que existe un entero $M = -m - c_r - r$ tal que la diferencial espectral $E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r, q+1-r}^r$ es cero para $p+q = n$ y $p-r \leq M$. Por tanto E es acotada por arriba. Luego por el Teorema 5.5.10 de [Wei] tenemos que la sucesión espectral E converge a la homología del complejo \mathcal{C} .

Teorema 3.4.7 Consideremos los sistemas inversos (V_κ, S) y (W_κ, S) , donde $V_\kappa = HN_{m+2\kappa}A$ y $W_\kappa = HN_{m+2\kappa+1}A$. Entonces existen enteros positivos κ_0 y r tales que $r \leq \mathfrak{b}\mathfrak{s}$ y para todo $\kappa \geq \kappa_0$ se satisfacen las siguientes condiciones.

- i) $W_\kappa = 0$.
- ii) $S^r(V_{\kappa+r}) = 0$.

iii) Si $l_i := \dim_k \ker(S^i : V_{\kappa_0+i} \rightarrow V_{\kappa_0})$ ($i \geq 1$), entonces

$$l_i = \dim_k \ker(S^i : V_{\kappa+i} \rightarrow V_{\kappa}).$$

Demostración. En primer lugar notar que por (2.1) tenemos que la homología cíclica negativa se puede calcular como $HN_n^p(A) = H_{n-2p}(\mathcal{F}_p\mathcal{C})$, luego

$$HN_n(A) = \prod_{p \geq n} H_{n-2p}(\mathcal{F}_p\mathcal{C}).$$

Pero para $p \geq m$ la homología de $\mathcal{F}_p\mathcal{C}$ consta sólo de dos términos no nulos, por lo que para $n \geq m$ tendríamos

$$HN_n(A) = \begin{cases} H_{1-m}(\mathcal{F}_p\mathcal{C}) & n = 2p - m + 1 \\ H_{-m}(\mathcal{F}_p\mathcal{C}) & n = 2p - m \end{cases}$$

Entonces poniendo $p = m + \kappa$ podemos considerar los sistemas inversos (V_κ, S) y (W_κ, S) , donde $V_\kappa = HN_{m+2\kappa}(A)$, $W_\kappa = HN_{m+2\kappa+1}(A)$ y el morfismo S es el dado en la sucesión (1.14). Consideramos $r + 1$ como la menor cota que verifica $L_{r+1}(t) = 0$. Por el teorema 3.3.1 nos bastaría tomar $r = \mathbf{b5}$. Para $r' \geq r$, $L_{r'+1}(t) = 0$, por lo que $\Delta_{r'}(t)$ es inyectiva. De la propiedad (3.7) y por el Lema 3.4.5 tenemos que $E_{-m-l,1+l}^{r'+1} = 0$ para todo $l \geq c_{r'+1}$ y para $r' \geq r$, es decir $E_{-m-l,1+l}^{r+1} = E_{-m-l,1+l}^\infty = 0$ para todo $l \geq c_{r+1}$. De esto se deduce que $H_{1-m}(\mathcal{F}_p\mathcal{C}) = 0$ para $p \geq m + c_{r+1}$ y por tanto $W_\kappa = 0$ para todo $\kappa \geq c_{r+1}$ entero positivo con lo que queda demostrado **i)** tomando $\kappa_0 = c_{r+1}$.

Veamos ahora el apartado **ii)**. Observar que el morfismo $S^n : V_\kappa \rightarrow V_{\kappa+n}$ es el inducido por la proyección entre los complejos $\mathcal{F}_p\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}_{p+r}\mathcal{C}$. Consideramos la filtración de $HN_{2p-m}(A)$ siguiente

$$\mathcal{G}_i := \text{Im}(S^i : HN_{2(p+i)-m}(A) \rightarrow HN_{2p-m}(A)),$$

donde tomamos S^0 como la identidad. Por un lado tenemos que para $r' \geq r$, $L_{r+1}(t) = 0$ y por otro lado del Lema 3.4.5 tenemos que para $p \geq c_{i+1}$ se verifica que $\dim E_{-m-p-i,p+i}^{i+1} = \text{rk } L_{i+1}(t)$. Luego para todo $r' \geq r$ y $p \geq c_{r'+1}$, $\dim E_{-m-p-r',p+r'}^{r'+1} = \text{rk } L_{r'+1}(t) = 0$. De ahí $\mathcal{G}_r = 0$, para $p \geq c_{r+1}$, puesto que el morfismo inducido por la proyección en el nivel r -ésimo de la sucesión espectral envía cada ciclo en el cero, ya que para r y para $p \geq c_{r+1}$ dicha sucesión es cero. De esto se deduce que para este entero r y para $\kappa_0 \geq c_{r+1}$, tenemos que

$$\mathcal{G}_r = S^r(HN_{2(p+r)-m}) = S^r(V_{p+r}) = 0$$

para todo $p \geq \kappa_0$, demostrando así **ii**).

Denotemos por l_j a $\sum_{i=1}^j \text{rk } L_i$. Para ver **iii**) notar que $\mathcal{G}_i/\mathcal{G}_{i+1} = E_{-m-p-i, p+i}^{i+1}$, luego dado que $\mathcal{G}_r = 0$ tenemos

$$\dim(HN_{2p-m}A) = \sum_{i=0}^{r-1} \dim \mathcal{G}_i/\mathcal{G}_{i+1} = \sum_{i=1}^r \text{rk } L_i = l_r.$$

Sean $p \geq c_{r+1}$ y $q \geq 1$. Entonces el morfismo $S^q : V_{p+q} \rightarrow V_p$, tiene núcleo y conúcleo de igual dimensión, ya que de la igualdad anterior se deduce que V_{p+q} y V_p tienen la misma dimensión. Por un lado tenemos que $HN_{2p-m}(A) = \bigoplus_{i=0}^r \mathcal{G}_i/\mathcal{G}_{i+1}$ y por otro lado $\text{Im } S^q = \mathcal{G}_q = \bigoplus_{i=q}^r \mathcal{G}_i/\mathcal{G}_{i+1}$. Luego queda que el conúcleo de S^q es $\bigoplus_{i=0}^{q-1} \mathcal{G}_i/\mathcal{G}_{i+1}$. Por tanto

$$\begin{aligned} \dim \ker(S^q : V_{p+q} \rightarrow V_p) &= \dim \text{coker}(S^q : V_{p+q} \rightarrow V_p) \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \dim \mathcal{G}_i/\mathcal{G}_{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^q \text{rk } L_i \\ &= l_q \end{aligned}$$

Ahora tomando $\kappa_0 = c_{r+1}$ tenemos que para todo $\kappa \geq \kappa_0$

$$\dim \ker(S^i : V_{\kappa_0+i} \rightarrow V_{\kappa_0}) = \dim \ker(S^i : V_{\kappa+i} \rightarrow V_{\kappa}) = l_i,$$

con lo que queda demostrado el apartado **iii**). □

Nota 3.4.8 Observar que en la demostración del teorema anterior, aunque las cotas r y κ_0 se pueden ajustar más dependiendo del caso, nos vale tomar $r = \mathfrak{bs}$ y $\kappa_0 = c_{\mathfrak{bs}+1}$.

Corolario 3.4.9 Sea \mathfrak{bs} como en la sección 3.3. Entonces existe un entero $n_0 = \mathfrak{bs} + \kappa_0$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $S^{\mathfrak{bs}}(HN_n A) = 0$.

3.5. El sistema inverso $(HC_{p+2*}^{p+*}A, S)$

En esta sección consideraremos el morfismo periodicidad sobre la homología cíclica $S : HC_*A \rightarrow HC_{*-2}A$ tal y como aparece en la sucesión (1.13). Bajo la descomposición de Hodge el morfismo S queda definido entre HC_*^pA y $HC_{*-2}^{p-1}A$. Luego para $p \geq 0$ tenemos el sistema inverso

$$HC_{p+2*}^{p+*}A : \cdots \rightarrow HC_{p+4}^{p+2}A \rightarrow HC_{p+2}^{p+1}A \rightarrow HC_p^pA = \Omega_A^p/d\Omega_A^{p-1}. \quad (3.28)$$

Para un álgebra cualquiera A tenemos que (ver [Lod])

$$S(HC_{p+2}^{p+1}A) = H_{dR}^pA.$$

En [BACH] se probó que para el caso particular en que $f \in R$ es un polinomio (no necesariamente con singularidades aisladas), entonces

$$S(HC_{p+2q}^{p+q}(R/f)) \cong H_{dR}^p(R/f^q). \quad (3.29)$$

Además bajo esta identificación se tiene que el morfismo S se corresponde con la proyección natural $R/f^{*+1} \rightarrow R/f^*$.

Por otro lado de 1.33 sabemos que la homología del complejo $\widehat{\Omega}_\Gamma$ da la cohomología infinitesimal de A y que para cada elemento de la filtración $\Omega_\Gamma^{\geq p+1}$, la homología del complejo cociente $\Omega_\Gamma^{\leq p}$ da la homología cíclica de A .

El siguiente lema es bien conocido.

Lema 3.5.1 Sean C un complejo, $C \cdots \supset F_p \supset F_{p-1} \supset \cdots$ una filtración descendente por subcomplejos, \mathcal{E} la sucesión espectral asociada y $\pi : C/F_{p-1} \rightarrow C/F_p$ la proyección. Entonces para cada $l \geq 1$ hay una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow \mathcal{E}_{p,q}^l \rightarrow \pi^{l-1}H_{p+q}(C/F_{p-l}) \rightarrow \pi^{l-1}H_{p+q}(C/F_{p-1+l}) \rightarrow \mathcal{E}_{p-l,q+l-1}^l \rightarrow \cdots$$

Demostración. Sean $U^1 = \bigoplus_{p,q} U_{p,q}^1$, $U_{p,q}^1 = H_{p+q}(F_p)$ y $\mathcal{E}^1 = \bigoplus_{p,q} \mathcal{E}_{p,q}^1$. Por [Wei, 5.9.4], la sucesión espectral $\{\mathcal{E}^l\}_{l \geq 1}$ es la asociada a la pareja derivada

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{E}^1 & \end{array} \quad (3.30)$$

donde los morfismos son los obtenidos de la sucesión exacta larga de homología asociada a

$$0 \rightarrow \bigoplus_p F_{p-1} \longrightarrow \bigoplus_p F_p \longrightarrow \bigoplus_p F_p/F_{p-1} \rightarrow 0$$

Sea $D = \bigoplus_{p,q} D_{p,q}$, $D_{p,q} = H_{p+q+1}(C/F_{p-1})$. De la sucesión exacta larga asociada a

$$0 \rightarrow \bigoplus_p F_p/F_{p-1} \longrightarrow \bigoplus_p C_p/F_{p-1} \longrightarrow \bigoplus_p C_p/F_{p-1} \rightarrow 0$$

se obtiene la pareja exacta

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\quad} & D \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{E}^1 & \end{array} \quad (3.31)$$

El morfismo de conexión de la sucesión exacta larga de homología asociada a

$$0 \rightarrow \bigoplus_p F_p \rightarrow \bigoplus_p C \rightarrow \bigoplus_p C/F_p \rightarrow 0$$

da un morfismo bihomogéneo $D \rightarrow U$ que, junto con el morfismo identidad de \mathcal{E}^1 , forma un morfismo de parejas exactas bigraduadas (3.31) \rightarrow (3.30). Se sigue que $\{\mathcal{E}^l\}_l$ es la sucesión espectral asociada a (3.31), y por tanto se tiene la sucesión exacta del lema (ver [Wei, pp 155]). \square

Teorema 3.5.2 Sean r y κ_0 como en el Teorema 3.4.7 y $p \geq 0$. Entonces,

i) Si $p \leq m - 3$ entonces

$$HC_{p+2q}^{p+q}A = H_{dR}^p(R/f^q) = H_{inf}^p(A) = H_{dR}^pA \quad (p \leq m - 3, \quad q \geq 1).$$

ii)

$$\begin{aligned} HC_{m-2+2q}^{m-2+q}A &= H_{dR}^{m-2}R/f^q & (q \geq 1) \\ &= H_{inf}^{m-2}A & (q \geq \max\{r + 1, \kappa_0 + 1\}). \end{aligned}$$

iii) Tenemos que

$$\begin{aligned} S^q HC_{m-1+2(p+q)}^{m-1+p+q} A &= \text{Im} (H_{dR}^{m-1} R / f^{p+q} \rightarrow H_{dR}^{m-1} R / f^{p+1}) \quad (q \geq 1) \\ &= H_{inf}^{m-1} A \quad (q \geq \text{máx}\{r+1+\kappa_0-p, r+1\}-1). \end{aligned}$$

iv) Para $p = m$ y $q \geq q_0 = r+1+\kappa_0$

$$HC_{m+2q}^{m+q} A \cong H_{dR}^m(R/f^{q+1}) = H_{inf}^m(A).$$

Y para $p = m$ con $R = k[x_1, \dots, x_m]$ o $p > m$ con R en general y $q \geq 0$,

$$HC_{p+2q}^{p+q}(A) = 0.$$

Demostración. Aplicando el lema a la filtración por columnas del complejo $\hat{\Omega}_\Gamma$ se obtiene, para cada $l \geq 0$, una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow E_{p,q}^l \rightarrow S^l(HC_{p+q+2l}^{p+l} A) \rightarrow S^l(HC_{p+q+2(l-1)}^{p+l} A) \rightarrow E_{p-l,q+l-1}^l \rightarrow \dots \quad (3.32)$$

De (3.2) se sigue que $E_{p,q}^1 = 0$ para $q > 0$ y $p \geq 1 - m$, que $E_{p,0}^2 = H_{dR}^{-p}(A)$ para todo p y que si además $p \geq -m+3$ o $p = -m$ entonces $E_{p,0}^\infty = H_{dR}^{-p}(A)$. En el caso particular en que $R = k[x_1, \dots, x_m]$, tenemos que $H_{dR}^m(R/f^q) = 0$, pues es un cociente de $H_{dR}^m(k[x_1, \dots, x_m]) = 0$. Notemos por otra parte que, en el caso general, si $l \geq 1$ y $p \leq -m$, $E_{p,q}^l$ es un cociente de la sucesión $E_{p,q}^l$ considerada en las secciones precedentes. Por tanto, de 3.4.6 tenemos que si $r = \mathfrak{b}\mathfrak{s} + 1$ entonces para $n \geq r$ y $l \geq c_r$

$$E_{-m-l,1-l}^n = E_{-m-l-n,l+n}^n = 0.$$

En particular E' es regular, luego converge a $H_*(\hat{\Omega}_\Gamma) = H_{inf}^{-*} A$. La demostración es directa a partir de estas observaciones. \square

3.6. Algoritmo, observaciones y ejemplos

Las demostraciones del Lema 3.4.5 y del Teorema 3.4.7 proporcionan una forma inductiva de calcular las dimensiones de los diferentes elementos que aparecen en la sucesión espectral. Usando esto surge un algoritmo que nos

permite hallar los enteros positivos κ_0 , r y l_i con $i \in \{1, \dots, r+1\}$ satisfaciendo las hipótesis del Teorema 3.4.7. Expliquemos entonces en que consiste el algoritmo. El algoritmo recibe como datos de entrada el elemento f y la dimensión m de R y da como resultados de salida,

- $r+1$ que ya sabemos que va a ser menor o igual que $m+1$ por el Teorema 3.3.1,
- $\text{rk } L_i(t)$ para todo $i \in \{1, \dots, r+1\}$,
- la familia de polinomios $\chi_i(t)$, cuyas raíces determinan el submódulo de torsión de los $C_i(t)$,
- los módulos $L_i(t)$ definidos con una lista de elementos que son un sistema generador del módulo.

En un paso previo el algoritmo calcula $L_1(t) = \{p_1, \dots, p_{r_1}\}$ y también calcula los elementos $c_{i,j}$ tales que $fp_i = \sum_{j=1}^m c_{i,j} \partial f / \partial x_j$. Para ello sea J el ideal jacobiano de f y $(R/J)_0$ el anillo R/J localizado en un punto singular. Como las singularidades son aisladas sabemos que este anillo como k -espacio vectorial tiene dimensión finita así que podemos considerar el endomorfismo de espacios vectoriales multiplicar por f que vendrá definido por una matriz A . Lo que el algoritmo hace en este paso previo es calcular el núcleo de A , pues los elementos del núcleo de este endomorfismo definen $L_1(t)$ como $R[t]$ -módulo. Por otro lado también utiliza el algoritmo de división implementado en Singular para determinar los elementos $c_{i,j}$. Finalmente toma los elementos p_i y los $c_{i,j}$ y los divide por una base de Groebner GF del ideal $fR+J$, con lo cual nos quedan como vectores en función de una k -base KF de $R/fR+J$, y los coloca como columnas de una matriz $H = [p_i, c_{i,1}, \dots, c_{i,m}]$.

En el primer paso calcula $\Delta_1(t)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) : L_1(t) &\longrightarrow C_1(t) \\ p_i &\longmapsto \Delta_1(t)(p_i) := tH_{i,1} + \sum_{j=2}^{m+1} \frac{\partial(H_{i,j})}{\partial x_{j-1}} \end{aligned}$$

Divide la imagen de cada p_i por la base de Groebner GF de $fR+J$ ya calculada, por tanto queda de la forma

$$\Delta_1(t)(p_i) = \text{res}_i(t) + fb_i^1(t) + \sum_{j=1}^m c_{i,j}^1(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Descompone cada $\text{res}_i(t)$ como vector en función de la base KF . Luego coloca estos vectores como columnas de una matriz A_1 cuadrada de orden r_1 .

Almacena el resultado en una lista de matrices M . Después calcula el núcleo de A_1 . Notar que los elementos del núcleo se pueden ver como vectores en función de los generadores de $L_1(t)$ o como polinomios. Considerándolos como polinomios obtendremos una lista que denotaremos $L_2 = \{p_1^2, \dots, p_{r_2}^2\}$. Luego diagonaliza la matriz A_1 obteniendo $A_1 = P_1 D_1 Q_1$, donde

$$D_1 = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_{\alpha_1} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Define $\chi_1(t) = \{\mu_1, \dots, \mu_{\alpha_1}\}$. Al igual que antes toma los b_i^1 y los $c_{i,j}^1$ como restos de dividir por la base de Groebner GF con lo que quedarían como vectores en función de la base KF y los coloca como columnas de la matriz U . También toma la matriz L_2 que resulta de considerar los elementos del núcleo de A_1 como vectores en función de los generadores de $L_1(t)$ y colocarlos en columnas. Con estas dos matrices el algoritmo define la matriz $H = L_2' \cdot U$, donde L_2' denota la matriz traspuesta de L_2 .

En el segundo paso el algoritmo calcula $\Delta_2(t)$,

$$\begin{aligned} \Delta_2(t) : L_2(t) &\longrightarrow C_2(t) = C_1(t+1)/\Delta_1(t+1)(L_1(t+1)) \\ p_i^2 &\longmapsto tH_{i,1} + \sum_{j=2}^{m+1} \frac{\partial(H_{i,j})}{\partial x_{j-1}} \end{aligned}$$

Divide la imagen de cada p_i^2 por la base de Groebner GF , quedando de la forma

$$\Delta_2(t)(p_i^2) = res_i(t) + fb_i^2 + \sum_{j=1}^m c_{i,j}^2 \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Pone los $res_i(t)$ como vectores en función de la base KF y los coloca como columnas de una matriz A_2 de orden $r_1 \times r_2$. Esta matriz A_2 es la imagen $\Delta_2(t)(L_2(t))$. Ahora bien, lo que nos interesa es el núcleo de Δ_2 cociente $\Delta_1(t+1)(L_1(t+1))$. Para ello el algoritmo recupera la matriz A_1 calculada en el paso anterior que es $\Delta_1(t)(L_1)$, sustituye t por $t+1$ y la concatena a la matriz A_2 obteniendo de esta forma una matriz B de orden $r_1 \times (r_1 + r_2)$.

$$B = \left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline A_2 & A_1(t+1) \\ \hline & \end{array} \right]$$

Notar que los elementos del núcleo de esta matriz vendrían definidos de la forma

$$\{(u, v) / A_2 \cdot u + A_1(t+1) \cdot v = 0\} \quad (3.33)$$

Ahora bien, si de estos elementos nos quedamos con los u no nulos obtendríamos el núcleo de $\Delta_2(t) : L_2 \rightarrow C_2$. Esto es lo que hace el algoritmo: primero almacena en una matriz C las columnas de los r_2 primeros dígitos de cada elemento de la base del núcleo de B , que vienen a ser los elementos u de (3.33), y luego la comprime eliminando las columnas nulas, es decir los u que son cero, y lo almacena en la matriz CC . Poniendo cada vector columna en función de los elementos de L_1 obtenemos la lista de polinomios que forman una base del núcleo de $\Delta_2(t)$ que almacenamos en $L_3 = \{p_1^3, \dots, p_{r_3}^3\}$. También, al igual que en el paso anterior toma los b_i^2 y los $c_{i,j}^2$ como restos de dividir por GF y los pone como vectores en función de la base KF para colocarlos como columnas de una matriz U . Por otro lado también construye la matriz $L3$ cuyas columnas son los elementos de L_3 vistos como vectores en función de los generadores L_2 y define $H = L3^t \cdot U$, donde $L3^t$ representa la matriz traspuesta de $L3$. Por otro lado considera la matriz D_2 resultado de diagonalizar la matriz B y define $\chi_3(t)$ como una lista de los elementos de la diagonal de D_2 que son distintos de cero y uno.

Los siguientes pasos son análogos a éste. El algoritmo acaba cuando llega un momento en el que $r_i = 0$, condición de parada que se alcanza por el Teorema 3.3.1. Supongamos que el $r_4 = 0$, entonces la matriz D_3 no tendría ceros en la diagonal y sería un isomorfismo de $k[t]$ -módulos. El algoritmo daría como salida lo siguiente

- $r + 1 = 4$, pues $L_4(t) = 0$,
- los enteros r_1, r_2 y r_3 que son los rangos respectivos de $L_1(t)$, $L_2(t)$ y $L_3(t)$,
- la familia de polinomios $\chi(t)$ formada por la unión de las familias $\chi_i(t)$, es decir

$$\chi(t) = \{\mu_1, \dots, \mu_{\alpha_1}, \nu_1, \dots, \nu_{\alpha_2}, \beta_1, \dots, \beta_{\alpha_3}\},$$

- los módulos $L_1(t), L_2(t)$ y $L_3(t)$.

Luego lo que hacemos es calcular las raíces de los polinomios de la familia $\chi(t)$ y denotamos por c_4 a la mayor raíz entera positiva. En caso de no tener

raíces enteras positivas pondríamos $c_4 = 1$. Este es el c_r del Lema 3.4.5. Usando las fórmulas del Teorema 3.4.7 nos queda

$$\begin{aligned} r &= 3, \quad \kappa_0 = c_4, \quad l_1 = \text{rk } L_1(t), \quad l_2 = \text{rk } L_1(t) + \text{rk } L_2(t), \\ l_3 &= \text{rk } L_1(t) + \text{rk } L_2(t) + \text{rk } L_3(t) \text{ y } l_i = l_3 \text{ para } i \geq 3. \end{aligned}$$

Hemos implementado este algoritmo en el paquete de cálculo simbólico Singular y utilizamos el programa Maple para calcular las raíces de los polinomios de $\chi(t)$. Posteriormente, lo ejecutamos sobre algunos ejemplos de la lista de Arnol'd (ver [AGLV]). Los resultados obtenidos aparecen en la tabla del anexo I que está al final del trabajo.

Observación 3.6.1 La primera observación a tener en cuenta es que todos los ejemplos que aparecen en la tabla verifican que su l_r coincide con la multiplicidad excepto en el E_{19} y el Z_{18} . Pero en estos dos casos se tiene que los polinomios tienen 2 singularidades aisladas mientras que el resto sólo tiene una. El E_{19} tiene singularidad en el $(0, 0)$ y en el $p_1 := (-1/81, -1/3)$, mientras que Z_{18} tiene sus singularidades en $(0, 0)$ y en $p_2 := (1/27, -1/3)$. Haciendo un cambio de coordenadas, en E_{19} para llevar el punto p_1 al origen nos queda.

$$\begin{aligned} E_{19}\left(x + \frac{1}{81}, y + \frac{1}{3}\right) &\sim xy^7 - \frac{130}{2187}y^4 + \frac{170}{19683}y^3 + \frac{11}{3}y^{10} - \frac{55}{27}y^9 - \frac{35}{27}xy^4 \\ &+ \frac{7}{3}xy^5 - \frac{7}{3}xy^6 - \frac{4}{6561}y^2 - \frac{1}{27}x^2 + \frac{7}{729}xy - \frac{7}{81}xy^2 \\ &+ \frac{35}{81}xy^3 + x^3 + \frac{65}{81}y^7 - 3y^{11} + \frac{59}{243}y^5 - \frac{49}{81}y^6 + y^{12} \end{aligned}$$

Comprobamos con Singular que el número de Milnor de este polinomio es 1, es decir que la multiplicidad de E_{19} en p_1 es 1, mientras que en $(0, 0)$ es 19. Notar que la suma de las multiplicidades da el número l_r de tabla. Lo mismo sucede con Z_{18} , ya que su multiplicidad en el punto p_2 es 1.

Observación 3.6.2 La segunda observación es que en todos los casos la familia de polinomios $\chi(t)$ solo tiene raíces enteras no positivas o no enteras, con lo cual tenemos que $c_r = 1$.

Ejemplo 3.6.3 A parte de los ejemplos de Arnold también hemos probado el algoritmo en otros ejemplos como el dado por Malgrange que estudia el caso en que $R = k[x_1, \dots, x_m]$ y $f = (x_1 \cdots x_m)^2 + x_1^{2m+2} + \cdots + x_m^{2m+2}$. Obtenemos los resultados reflejados en la siguiente tabla

m	l_1	l_2	l_3	l_4	r	κ_0
2	12	13	13	13	2	1
3	179	214	215	215	3	1

Como principal observación podemos ver que este ejemplo, al menos en los casos estudiados, verifica que el nivel de estacionamiento del sistema coincide con el número de variables y a su vez también coincide con el índice de Briançon-Skoda. Otra observación al respecto es que tanto en este ejemplo como en los de Arnold, el sistema se estaciona en el número de Milnor.

3.7. Caso $\mathfrak{b}\mathfrak{s} = 1$

Por la definición dada en la sección 3.3, que el índice de Briançon-Skoda sea 1 quiere decir que

$$\max_{1 \leq i \leq u} \min\{n \geq 1 : f^n \in J_i\} = 1$$

Esto implica que $f \in J_i$ para todo i , es decir f pertenece a su ideal jacobiano localizado en cada uno de los maximales correspondientes a los puntos singulares de f .

Lema 3.7.1 Sean R y f como al principio del capítulo. Supongamos además que $\mathfrak{b}\mathfrak{s}(f) = 1$. Entonces f tiene la propiedad \mathcal{X}^{**} .

Demostración. Por el corolario 2.1.4 basta probar que para todo $p > 0$

$$H^*(\mathcal{E}_p) = 0. \quad (3.34)$$

Se sigue de la discursion anterior al lema y de (3.1) y (3.2) que

$$H^n\left(\frac{L}{fL}\right) = \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^u R_i/J_i & n = m-1, m \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Por tanto probar (3.34) equivale a probar que para todo $p > 0$ y para todo i , la aplicación

$$(\delta_p)_i : R_i/J_i \rightarrow R_i/J_i$$

es un isomorfismo. Podemos suponer que R es local. Como $f \in J$ existe una derivación $D : R \rightarrow R$, tal que $D(f) = f$. Por 2.2.5, basta probar que $L_D + p$ es isomorfismo para todo $p > 0$. Como R/J es de dimensión finita esto equivale a probar que L_D no tiene autovalores negativos en R/J .

Sea $S = \hat{R}$ la completación con respecto al maximal. Entonces $R/J = S/JS$. Como por hipótesis R es local y regular S es un anillo de series y f puede verse como una serie que pertenece a su ideal jacobiano. Por [Sai] tenemos que existe un cambio de coordenadas en S que envía f en un polinomio casi-homogéneo g con pesos positivos y a la derivación D en la correspondiente derivación de Euler. Dado que la definición de ideal Jacobiano que hemos dado en 2.1.6 no depende de los cambios de coordenadas, se deduce que $S/JS = S/Jac(g)S$ y $L_D = L_E$. Como consecuencia tenemos que L_D no tiene autovalores negativos, por tanto δ_p es isomorfismo para todo $p \geq 0$. \square

Observación 3.7.2 Notar que el ejemplo 2.1.5 verifica que f es un elemento de $R = k[x, y]$ con singularidades aisladas y no satisface la propiedad $\mathcal{X}^{1,p}$ para ningún p . Esto implica por Lema anterior y por (3.11) que $\mathfrak{bs}(f) = 2$.

Teorema 3.7.3 Sean R y f como en el enunciado del Lema 3.7.1. Entonces

$$HC_n^p(A) = \begin{cases} \frac{\Omega_A^n}{d\Omega_A^{n-1}} & p = n \\ \Omega_A^m \oplus H_{dR}^{m-1}(A) & 2p - n = m - 1 \\ H_{dR}^{2p-n}(A) & 2p - n \in \{0, \dots, m - 2\} \\ 0 & \text{el resto} \end{cases}$$

Demostración. Dado que f tiene singularidades aisladas, por (3.2) sabemos cuánto vale su homología de Hochschild y por el Lema 3.7.1 sabemos que $H_{dR}^p(A) = H_{dR}^p(R/f^q)$ para todo $p \geq 0$ y $q \geq 1$. Usando estos resultados y la propiedad (3.29) en la sucesión SBI obtenemos que la homología cíclica de A se reduce a lo que figura en el enunciado. \square

Capítulo 4

K -teoría

En este capítulo se exponen algunos conceptos básicos de K -teoría y su relación con la homología cíclica. Se muestra cómo en algunos casos concretos los grupos de K -teoría de variedades singulares se pueden expresar en términos de grupos de su homología cíclica y de la K -teoría de variedades suaves.

A lo largo de este capítulo, salvo que se indique lo contrario, R será un anillo con unidad, todos los morfismos de anillos preservarán la unidad y cuando hablemos de módulos nos referiremos a módulos a izquierda.

4.1. K_0

Denotamos por $\mathbf{Proj}(R)$ al conjunto de todas las clases de isomorfía de módulos proyectivos finitamente generados sobre R .

$$\mathbf{Proj}(R) = \{[M] : M \in R\text{-mod}, M \text{ fin. gen. y proy.}\}$$

Recordemos que un módulo finitamente generado M es proyectivo si, y sólo si, existen un módulo N y un entero n tales que $M \oplus N \cong R^n$. Notar también que la suma directa está bien definida módulo clases de isomorfía, y define una operación asociativa y conmutativa en $\mathbf{Proj}(R)$. En otras palabras $(\mathbf{Proj}(R), \oplus)$ es un monoide abeliano. La propiedad que le falta para ser un grupo es la de tener inversa.

Teorema 4.1.1 *Sea M un monoide abeliano, entonces existe un grupo abeliano G junto con un homomorfismo de monoides $\varphi : M \rightarrow G$, tal que para todo grupo H y homomorfismo $\phi : M \rightarrow H$ existe un único homomorfismo de grupos $\theta : G \rightarrow H$ con $\phi = \theta \circ \varphi$.*

Idea de la demostración. Se toma

$$G = \frac{\bigoplus_{m \in M} \mathbb{Z}e_m}{\langle \{e_m + e_n - e_{m+n}\} \rangle}$$

La propiedad universal del teorema se sigue de la del grupo abeliano libre $\bigoplus_{m \in M} \mathbb{Z}e_m$. \square

El grupo abeliano G del teorema anterior se llama **grupo de Grothendieck** del monoide M . Si R es un anillo, ponemos

$$K_0(R) := \text{grupo de Grothendieck de } \mathbf{Proj}(R)$$

Observación 4.1.2 Notar que K_0 es un funtor. En efecto, si $\varphi : R \rightarrow R'$ es un homomorfismo de R -módulos entonces la extensión de escalares, $P \mapsto R' \otimes_R P$, induce un homomorfismo $\mathbf{Proj} R \rightarrow \mathbf{Proj} R'$, que a su vez, induce uno de grupos $\varphi_* : K_0(R) \rightarrow K_0(R')$, y se verifican las propiedades functoriales $id_* = id$ y $(\varphi \circ \phi)_* = \varphi_* \circ \phi_*$.

Existe una forma equivalente de definir K_0 a partir de matrices idempotentes. Sea $[P] \in \mathbf{Proj}(R)$. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y Q un R -módulo tales que $\phi : P \oplus Q \cong R^n$. Ahora sea E el endomorfismo de R -módulos de $P \oplus Q$ que sobre P actúa como la identidad y sobre Q como el morfismo nulo. Entonces podemos considerar p como la matriz de $\phi \circ E \circ \phi^{-1}$ en la base canónica, la cual va a ser una matriz idempotente puesto que el morfismo E es idempotente. Notar que la correspondencia que a cada modulo proyectivo P lo envía a la matriz p depende de las elecciones hechas. Por ejemplo se puede añadir un sumando R a Q y la matriz p que obtendríamos sería como la anterior pero completada con una fila y una columna de ceros. Sin cambiar el n también podríamos considerar otro isomorfismo $\psi : P \oplus Q \rightarrow R^n$ entonces la matriz resultante será la conjugada de la anterior mediante la matriz inversible que representa $\phi \circ \psi^{-1}$ en la base canónica. Por tanto para definir K_0 mediante matrices idempotentes habría que dividir por una relación de equivalencia que tuviera en cuenta estas relaciones.

Notación 4.1.3 Denotamos por $M_n(R)$ al conjunto de matrices de orden n sobre R y por $GL_n(R)$ al grupo de matrices inversibles de orden n sobre R . Podemos sumergir $M_n(R) \rightarrow M_{n+1}(R)$ mediante el morfismo (de anillos sin unidad)

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

y $GL_n(R) \rightarrow GL_{n+1}(R)$ mediante el morfismo de grupos

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Denotamos $M(R) = \bigcup_{n \geq 1} M_n(R)$ y por $GL(R) = \bigcup_{n \geq 1} GL_n(R)$. Entonces $M(R)$ es un anillo sin unidad y $GL(R)$ es un grupo. Si denotamos por $I(R)$ al conjunto de las matrices idempotentes de $M(R)$ se tiene que el grupo $GL(R)$ actúa sobre $I(R)$ mediante la conjugación.

El lema de abajo y el teorema que le sigue son elementales; omitimos su demostración, que puede verse en [Ros, 1.2.3].

Lema 4.1.4 Sean P y Q dos matrices idempotentes sobre R , es decir $P, Q \in I(R)$. Entonces los R -módulos proyectivos asociados a estas matrices son isomorfos si y sólo si existe una matriz $G \in GL(R)$ tal que $P = G \cdot Q \cdot G^{-1}$.

Teorema 4.1.5 Sobre $I(R)$ definimos la relación de equivalencia \sim dada por

$$P \sim Q \iff \exists G \in GL(R) : P = G \cdot Q \cdot G^{-1}$$

Las clases de equivalencia asociadas a esta relación se denominan clases de conjugación. El monoide $\mathbf{Proj}(R)$ se identifica con $I(R)/\sim$ donde la operación \oplus de $\mathbf{Proj}(R)$ pasa a identificarse con el morfismo

$$(P, Q) \mapsto \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

Por tanto, $K_0(R)$ es el grupo de Grothendieck del semigrupo $I(R)/\sim$.

Ejemplos 4.1.6

1. Si R es un dominio de ideales principales entonces todo módulo finitamente generado sin torsión es libre ([Lang]). En particular, todo módulo proyectivo finitamente generado es libre. Como además dos módulos libres finitamente generados son isomorfos si, y sólo si, tienen el mismo rango, concluimos que $\mathbf{Proj}(R) = \mathbb{N}_0$ y por tanto $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$. En particular, $K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
2. Si R es cualquier anillo, el morfismo canónico $\mathbb{Z} \rightarrow R$ induce un morfismo de grupos $\mathbb{Z} = K_0(\mathbb{Z}) \rightarrow K_0(R)$, que envía $n \in \mathbb{N}_0$ a R^n .
3. Un anillo R se dice que es **local** si el conjunto \mathfrak{m} de los elementos no invertibles de R constituye un ideal a izquierda de R . Se comprueba que si R es local, entonces \mathfrak{m} es el único ideal maximal, y además es bilátero

([Ros, 1.3.4]). Se prueba en [Ros, 1.3.11] que si R es local entonces todo R -módulo proyectivo finitamente generado es libre, $\mathbf{Proj}(R) = \mathbb{N}_0$ y $K_0(R) = \mathbb{Z}$. En particular si R es un anillo de división, entonces $K_0(R) = \mathbb{Z}$.

4. Si R posee un ideal maximal a izquierda o a derecha \mathfrak{m} que es además bilátero (por ejemplo si R es conmutativo), entonces $F = R/\mathfrak{m}$ es un anillo de división, y la proyección al cociente induce un morfismo $K_0(R) \rightarrow \mathbb{Z}$. Se comprueba que la composición de este morfismo con el que va en sentido opuesto definido arriba es la identidad de \mathbb{Z} . Por tanto para $\tilde{K}_0(R) = \text{coker}(\mathbb{Z} \rightarrow K_0(R))$ se tiene

$$K_0(R) = \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}_0(R).$$

Esta descomposición no es canónica dado que el morfismo $K_0(R) \rightarrow \mathbb{Z}$ depende, en principio, de la elección de \mathfrak{m} . En el caso en que R es conmutativo, esta elección depende sólo de la componente conexa de $\text{Spec } R$ en la que se encuentra \mathfrak{m} . Explicamos esto a continuación. Sea P un R -módulo proyectivo finitamente generado. Si \mathfrak{p} es un ideal primo, entonces $R_{\mathfrak{p}}$ es local, y por tanto $P_{\mathfrak{p}}$ es libre. Se comprueba que la función $\text{rk}(P) : \text{Spec } R \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{p} \mapsto \text{rk}(P_{\mathfrak{p}})$ es continua. Así, si asumimos que $\text{Spec } R$ es conexo, es decir, que los únicos idempotentes de R son 1 y 0, $\text{rk}(P)$ resulta constante y puede por tanto identificarse con un entero $n \in \mathbb{N}_0$. En particular en este caso el morfismo $K_0(R) \rightarrow \mathbb{Z}$ definido arriba no depende de la elección de \mathfrak{m} , ya que coincide con el inducido por el morfismo de monoides $\text{rk} : \mathbf{Proj}(R) \rightarrow \mathbb{N}_0$.

5. Si R es conmutativo, el conjunto de clases de isomorfismo de módulos proyectivos finitamente generados de rango 1 forma un grupo, $\text{Pic } R$, bajo el producto tensorial, que se denomina grupo de Picard de R . Se prueba en [Wei2, 2.6.3] que si R es noetheriano de dimensión 1 con $\text{Spec } R$ conexo, entonces

$$\tilde{K}_0(R) \cong \text{Pic } R \tag{4.3}$$

6. Si R es un anillo, respectivamente anillo conmutativo, e $I \triangleleft R$ es un ideal nilpotente, entonces la aplicación natural $K_0(R) \rightarrow K_0(R/I)$, respectivamente $\text{Pic}(R) \rightarrow \text{Pic}(R/I)$, es un isomorfismo ([Wei2, 1.3.9, 2.2.2]). Por otra parte si $n \geq 1$ entonces la inclusión $R = M_1(R) \subset M_n(R)$ de (4.1) induce un isomorfismo de monoides $I(R) \cong I(M_n(R))$ y por tanto uno de grupos $K_0(R) \cong K_0(M_n(R))$. Análogamente $K_0(R \times S) = K_0(R) \oplus K_0(S)$. Como aplicación de estas propiedades podemos calcular

el K_0 de álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo k . Si R es una tal álgebra, entonces el radical de Jacobson JR es nilpotente, y por tanto $K_0(R) = K_0(R/JR)$. Por el teorema de Wedderburn ([Lang]), $R/JR = \prod_{i=1}^r M_{n_i}(D_i)$, un producto de anillos de matrices sobre álgebras de división. Se sigue que $K_0(R) = \mathbb{Z}^r$.

4.1.1. Regularidad

Definición 4.1.7 Sea E un funtor de la categoría de anillos en la categoría de grupos abelianos. Decimos que un anillo R es E -regular si para todo n la inclusión $R \rightarrow R[x_1, \dots, x_n]$ induce un isomorfismo $E(R) \xrightarrow{\cong} E(R[x_1, \dots, x_n])$.

Recordemos que un anillo noetheriano R se dice **regular** si todo módulo tiene dimensión proyectiva finita. Serre demostró que todo anillo regular es K_0 -regular (ver [Ros, 3.2.13]). En particular si D es un anillo de división, $K_0(D[t_1, \dots, t_n]) = \mathbb{Z}$. Si R es un dominio de Dedekind (es decir es un dominio conmutativo regular de dimensión 1) entonces por 4.3,

$$\text{Pic } R = \text{Pic } R[x_1, \dots, x_n] \quad (4.4)$$

Recordemos que si R es conmutativo entonces el conjunto de todos los elementos nilpotentes de R es un ideal, llamado nilradical o radical nilpotente de R y que denotaremos por $N(R)$. Escribimos

$$R_{red} = R/N(R)$$

Un teorema de Traverso (ver [Wei2, 1.3.11]) establece que para R conmutativo noetheriano, (4.4) equivale a que R_{red} sea **seminormal**, es decir que si $x, y \in R$ son elementos tales que $x^3 = y^2$ entonces existe $t \in R$ tal que $t^2 = x$ y $t^3 = y$. Por ejemplo si k es un cuerpo $A_n = k[x, y]/\langle x^3 - y^2 \rangle$ es un anillo noetheriano de dimensión 1 sin elementos nilpotentes que no es seminormal, y por tanto tampoco es K_0 -regular. Se sigue que para cada $n \geq 2$, $A[t_2, \dots, t_n]$ es un anillo noetheriano de dimensión n que no es K_0 -regular.

4.2. K_1

4.2.1 Sean R un anillo, $a \in R$ y $n \in \mathbb{N}$. Se define la **matriz elemental** $e_{i,j}(a)$ como la matriz que tiene unos en la diagonal, a en el lugar (i, j) y

ceros en el resto, con $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$.

$$e_{i,j}(a) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Denotamos por $E_n(R)$ al subgrupo de $GL_n(R)$ generado por este tipo de matrices. Considerando la inmersión (4.2) tenemos que $E_n(R)$ se sumerge en $E_{n+1}(R)$; denotamos $E(R) = \bigcup_{n \geq 1} E_n(R)$ y lo denominamos **grupo de matrices elementales**. Notar que $E(R)$ es un subgrupo de $GL(R)$. En la proposición 21.4 de [Ros] se demuestra que

$$[E(R), E(R)] = [GL(R), GL(R)] = E(R)$$

Aquí $[M, M]$ denota el subgrupo generado por los conmutadores, es decir los elementos de la forma $m \cdot m' \cdot m^{-1} \cdot m'^{-1}$, con $m, m' \in M$. En particular $E(R)$ es normal en $GL(R)$ y el cociente $GL(R)/E(R)$ es la abelianización de $GL(R)$. Ponemos

$$K_1(R) := \frac{GL(R)}{E(R)} = GL_{ab}(R)$$

Notar que K_1 define un funtor de la categoría de anillos a la categoría de grupos abelianos, ya que un morfismo de anillos $R \rightarrow S$ induce un morfismo de grupos $GL(R) \rightarrow GL(S)$ y por lo tanto también uno de grupos abelianos $GL_{ab}(R) \rightarrow GL_{ab}(S)$.

4.2.2 Sean R un anillo conmutativo y R^* su grupo de elementos inversibles. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} GL_n(R) & \xrightarrow{\det} & R^* \\ \downarrow & \nearrow \det & \\ GL_{n+1}(R) & & \end{array}$$

Aquí \det es el morfismo determinante. De esta manera tenemos un morfismo $\det : GL(R) \rightarrow R^*$. Este morfismo es una retracción; una inversa a derecha viene dada por la inclusión $R^* = GL_1(R) \subset GL(R)$. Así, si llamamos $SL(R) = \ker \det$ y $SK_1(R) = SL(R)/E(R)$, se tiene una descomposición en suma directa

$$K_1(R) = R^* \oplus SK_1(R)$$

Ejemplos 4.2.3

Si R es local, o euclídeo, o el anillo de enteros de una extensión finita de \mathbb{Q} , entonces $SK_1(R) = 0$ (ver [Ros, 2.3]). En el caso en que R es local no conmutativo, se tiene un isomorfismo $K_1(R) \cong R_{ab}^*$, que es inducido por una variante no conmutativa del determinante ([Ros, 2.2.6]). El anillo $A = \mathbb{R}[x, y]/\langle x^2 + y^2 - 1 \rangle$ tiene $SK_1(A) \neq 0$ ([Ros, Ex 2.3.11])

Todo anillo regular es K_1 -regular [Ros, 3.2.17]). Si R es conmutativo local y posee un elemento nilpotente no nulo (e.g. $R = \mathbb{Q}[t]/t^2$), entonces R no es K_1 -regular. En efecto, si $a \in R$ es nilpotente no nulo, entonces $1 + at$ es un elemento inversible de $R[t]$ que no está en la imagen de R^* . Por tanto

$$K_1(R) = R^* \rightarrow R[t]^* \oplus SK_1(R[t]) = K_1(R[t])$$

no es sobreyectiva. Todo anillo que es K_1 -regular es también K_0 -regular ([Vor, 2.1]); por tanto según lo visto en la sección anterior, si R es conmutativo noetheriano y K_1 -regular, entonces R_{red} es seminormal.

Notemos que los grupos $GL(M_n R)$ y $GL(R)$ son isomorfos; por tanto $K_1(R) = K_1(M_n(R))$. Por otra parte, a diferencia de lo que ocurre con K_0 , K_1 no se mantiene invariante al dividir por ideales nilpotentes. Por ejemplo si $R = \mathbb{Q}[t]/t^2$ entonces $R_{red} = \mathbb{Q}$ y $1 + t \in R^* = K_1(R)$ es un elemento no trivial del núcleo de $K_1(R) \rightarrow K_1(R_{red}) = \mathbb{Q}^*$.

4.3. $K_{<0}$

Sean R un anillo, $R[t, t^{-1}]$ el anillo de polinomios de Laurent con coeficientes en R . El anillo $R[t, t^{-1}]$ contiene dos subanillos isomorfos al anillo de polinomios sobre R ; $R[t]$ y $R[t^{-1}]$. El teorema fundamental para K_1 ([Wei2, 3.6]) establece lo siguiente.

Teorema 4.3.1 *Para todo anillo R hay una retracción natural $\partial : K_1(R[t, t^{-1}]) \rightarrow K_0(R)$ de modo que la siguiente sucesión es exacta escindida*

$$0 \rightarrow K_1(R) \xrightarrow{\Delta} K_1(R[t]) \oplus K_1(R[t^{-1}]) \xrightarrow{\pm} K_1(R[t, t^{-1}]) \xrightarrow{\partial} K_0(R) \rightarrow 0.$$

Aquí Δ es el morfismo diagonal, y \pm es la diferencia de los morfismos inducidos por las dos inclusiones.

Corolario 4.3.2 *Si R es K_1 -regular, entonces $K_1(R[t, t^{-1}]) = K_0(R) \oplus K_1(R)$.*

El teorema anterior motiva a dar la siguiente definición.

Definición 4.3.3 Sea $n < 0$. Definimos recursivamente

$$K_{-n}R := \text{coker} (K_{1-n}(R[t]) \oplus K_{1-n}(R[t^{-1}]) \xrightarrow{\pm} K_{1-n}(R[t, t^{-1}]])$$

Se tiene ([Wei2, 4.1.2]).

Teorema 4.3.4 Para todo anillo R y todo $n \geq 0$ hay una retracción natural $\partial : K_{-n}(R[t, t^{-1}]) \rightarrow K_{-n-1}(R)$ de modo que la siguiente sucesión es exacta escindida

$$0 \rightarrow K_{-n}(R) \xrightarrow{\Delta} K_{-n}(R[t]) \oplus K_{-n}(R[t^{-1}]) \xrightarrow{\pm} K_{-n}(R[t, t^{-1}]) \xrightarrow{\partial} K_{-n-1}(R) \rightarrow 0. \quad (4.5)$$

Propiedades 4.3.5 Vimos anteriormente que $K_0(R) = K_0(M_n(R))$; dado que $M_n(R[t]) = M_n(R)[t]$ y $M_n(R[t, t^{-1}]) = M_n(R)[t, t^{-1}]$ se sigue que $K_{-p}(R) = K_{-p}(M_n(R))$ para todo $p > 0$. Análogamente se prueba que si $I \triangleleft R$ es nilpotente entonces $K_{-p}(R) \rightarrow K_{-p}(R/I)$ es un isomorfismo. Si R es regular, entonces $K_{-n}R = 0$ para todo $n > 0$. L. Reid mostró en [Reid] que para cada cuerpo k y cada $d \geq 1$ existe una k -álgebra de tipo finito A sobre k y dimensión de Krull d con un único punto singular, tal que $K_{-d}A \neq 0$. C. Weibel conjeturó [Wei3] que si R es conmutativo noetheriano de dimensión d entonces R es K_{-d} -regular y $K_{-n}A = 0$ para $n > d$. Esta conjetura fue probada en característica arbitraria para el caso de dimensión 1 y 2 ([Wei4]), y para R esencialmente de tipo finito sobre un cuerpo de característica cero y d arbitraria en [CHSW].

4.4. $K_{>0}$

En la sección correspondiente definimos $K_1(R) = GL(R)_{ab}$. Recordemos que si G es un grupo, entonces

$$G_{ab} = H_1(G) := H_1(G, \mathbb{Z})$$

el primer grupo de homología de G . En general si $\mathbb{Z}[G]$ es el anillo de grupo y M un $\mathbb{Z}[G]$ -módulo, se define

$$H_n(G, M) = \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$$

La homología de G puede verse como la homología de un CW -complejo. En efecto si BG es el espacio clasificante de G entonces M define un sistema local sobre BG y se tiene

$$H_*(G, M) = H_*(BG, M).$$

D. Quillen demostró ([Lod, 11.2.3]) que si P es un subgrupo normal de G tal que $P = [P, P]$ entonces existen un CW -complejo BG^+ , y una aplicación continua $\iota : BG \rightarrow BG^+$, únicos salvo equivalencia homotópica, de modo que $\pi_1(BG^+) = G/P$ y que para todo sistema local L sobre BG^+

$$H_*(BG, \iota^*L) \rightarrow H_*(BG^+, L)$$

es un isomorfismo. Si R es un anillo, aplicamos esta construcción para $G = GL(R)$ y $P = E(R)$, y ponemos

$$K_n(R) := \pi_n(BGL(R)^+) \quad (n \geq 1)$$

Notemos que si $n = 1$ esta definición coincide con la dada anteriormente. Como $GL(M_n R) \cong GL(R)$, se sigue que $K_*(M_n(R)) = K_*(R)$.

Teorema 4.4.1 *Para todo anillo R y todo $n \geq 2$ hay una retracción natural $\partial : K_n(R[t, t^{-1}]) \rightarrow K_{n-1}(R)$ de modo que la siguiente sucesión es exacta escindida*

$$0 \rightarrow K_n(R) \xrightarrow{\Delta} K_n(R[t]) \oplus K_n(R[t^{-1}]) \xrightarrow{\pm} K_n(R[t, t^{-1}]) \xrightarrow{\partial} K_{n-1}(R) \rightarrow 0.$$

Teorema 4.4.2 [Vor, 2.1] *Sean $n \in \mathbb{Z}$ y R un anillo. Si R es K_n -regular, entonces es K_m -regular para todo $m < n$.*

4.4.3 Estructura de Producto. Si R y S son anillos, $P \in \mathbf{Proj}(R)$, $Q \in \mathbf{Proj}(S)$ entonces $P \otimes_{\mathbb{Z}} Q \in \mathbf{Proj}(R \otimes_{\mathbb{Z}} S)$. Se comprueba que esta aplicación es bilineal en el sentido evidente. Se obtiene así un producto

$$K_0(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(S) \rightarrow K_0(R \otimes_{\mathbb{Z}} S) \quad (4.6)$$

definido por la fórmula

$$([P_1] - [P_2]) \cdot ([Q_1] - [Q_2]) = [P_1 \otimes_{\mathbb{Z}} Q_1] + [P_2 \otimes_{\mathbb{Z}} Q_2] - ([P_1 \otimes_{\mathbb{Z}} Q_2] + [P_2 \otimes_{\mathbb{Z}} Q_1])$$

En el caso particular en que R sea conmutativo, la multiplicación $\mu : R \otimes_{\mathbb{Z}} R \rightarrow R$, $r \otimes s \mapsto rs$ resulta ser morfismo de anillos. Por tanto puede componerse (4.6) con el morfismo de grupos $K_0(R \otimes_{\mathbb{Z}} R) \rightarrow K_0(R)$ inducido por μ , y se obtiene de esta forma un producto interno en $K_0(R)$, que le da una estructura de anillo conmutativo.

Similarmente hay productos

$$K_0(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K_1(S) \rightarrow K_1(R \otimes_{\mathbb{Z}} S), \quad K_1(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(S) \rightarrow K_1(R \otimes_{\mathbb{Z}} S) \quad (4.7)$$

de los cuales se obtiene, para R conmutativo, una estructura de $K_0(R)$ -bimódulo en $K_1(R)$, que es simétrica, es decir, $pg = gp \ \forall p \in K_0(R), g \in K_1(R)$. Explicamos sucintamente cómo se define la primera de las aplicaciones de (4.7). Si $P \in \mathbf{Proj}(R)$ y $g \in GL_n(S)$, se toma Q con $P \oplus Q = R^m$, de modo que $P \otimes_{\mathbb{Z}} S^n \oplus Q \otimes_{\mathbb{Z}} S^n = (R \otimes_{\mathbb{Z}} S)^{mn}$. Se define

$$[P] \cdot [g] := \begin{bmatrix} 1_P \otimes_{\mathbb{Z}} g & 0 \\ 0 & 1_P \otimes_{\mathbb{Z}} 1_Q \end{bmatrix}$$

Se comprueba que esto da un producto bien definido $K_0(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K_1(S) \rightarrow K_1(R \otimes_{\mathbb{Z}} S)$. En general, se puede ver, utilizando la construcción plus ([Ros, 5.3.1]) y el teorema fundamental (4.3.1, 4.3.4, 4.4.1) que el producto tensorial de matrices induce un producto

$$K_p(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K_q(S) \rightarrow K_{p+q}(R \otimes_{\mathbb{Z}} S) \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

En el caso en que R es conmutativo, $K_*(R)$ resulta un anillo graduado, conmutativo en el sentido graduado.

4.5. Escisión

A continuación introduciremos la definición de los cuadrados de Milnor los cuales se pueden ver como una versión algebraica de la suma amalgamada de dos espacios topológicos sobre un subespacio cerrado de uno de ellos. Para motivar la definición empezaremos por recordar la construcción de la suma amalgamada.

Sea X un espacio topológico e $Y \subseteq X$ un cerrado. Sea Z otro espacio topológico y $f : Y \rightarrow Z$ una aplicación continua. Entonces se puede definir la suma amalgamada de X y Z sobre Y , es

$$Z \amalg_Y X := \frac{Z \amalg X}{f(Y) \sim Y}$$

Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Z \amalg_Y X & \longleftarrow & X \\ \uparrow & & \uparrow i \\ Z & \xleftarrow{f} & Y \end{array}$$

Como es sabido, dar una función continua de $Z \coprod_Y X$ en un espacio topológico W equivale a dar funciones continuas $Z \rightarrow W$ y $X \rightarrow W$ que coincidan al componerlas con f y con i . Así, si denotamos por A al espacio de las funciones continuas de $Z \coprod_Y X$ en \mathbb{C} , tenemos

$$\begin{aligned} A &:= C(Z \coprod_Y X) = \{h : Z \coprod_Y X \rightarrow \mathbb{C} / h \text{ continua} \} \\ &= \{h = (a, b) / a : Z \rightarrow \mathbb{C}, b : X \rightarrow \mathbb{C}, b \circ i = a \circ f\} \\ &= \{(a, b) : a \in C(Z), b \in C(X), i_*(b) = f_*(a)\}. \end{aligned}$$

Aquí $i_* : C(X) \rightarrow C(Y)$, $f_* : C(Z) \rightarrow C(Y)$ envían $b \mapsto b \circ i$ y $a \mapsto a \circ f$. De este modo, si llamamos $B := C(X)$, $C := C(Z)$, $D := C(Y)$ a los respectivos anillos de funciones continuas con valores en \mathbb{C} , tenemos que $A = B \times_D C$, el *producto fibrado* de B y C sobre D . Tenemos entonces un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A = B \times_D C & \longrightarrow & B \\ \pi' \downarrow & & \downarrow i_* \\ C & \xrightarrow{f_*} & D \end{array} \quad (4.8)$$

Recordemos que, por el teorema de Tietze, una función continua en un cerrado se extiende a todo el espacio. Se sigue que i_* y π' son sobreyectivas.

Definición 4.5.1 Sea

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a_1} & B \\ a_2 \downarrow & & \downarrow b \\ C & \xrightarrow{c} & D. \end{array} \quad (4.9)$$

un diagrama de anillos y homomorfismos. Se dice que (4.9) es un **cuadrado cartesiano** si para todo anillo A' y homomorfismos $q_1 : A' \rightarrow B$, $q_2 : A' \rightarrow C$ tales que $b \circ q_1 = c \circ q_2$ existe un único morfismo $\varphi : A' \rightarrow A$ tal que $q_1 = a_1 \circ \varphi$ y $q_2 = a_2 \circ \varphi$.

Veamos que φ es isomorfismo. Tenemos

$$\ker \varphi = \ker f \cap \ker \pi' = \ker(f|_{\ker \pi'}) = 0.$$

Luego en efecto φ es inyectiva. Sea $(b, c) \in B \times_D C$. Como π' es sobre, existe un elemento $a \in A$ tal que $\pi'(a) = c$. Luego

$$\pi(f(a)) = \bar{f}(\pi'(a)) = \pi(b).$$

Por tanto $b - f(a) \in \ker \pi$. Como por hipótesis $f : \ker \pi' \rightarrow \ker \pi$ es biyectiva, existe $a' \in \ker \pi'$ tal que $f(a') = b - f(a)$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \varphi(a + a') &= (f(a + a'), \pi'(a + a')) \\ &= (f(a) + f(a'), \pi'(a) + \pi'(a')) \\ &= (b, c). \end{aligned}$$

Por tanto φ es también sobreyectiva. □

Notación 4.5.5 En la situación del lema anterior, abusaremos de la notación y denotaremos con la misma letra (e.g. I) a los ideales $\ker \pi'$ y $\ker \pi$. Por tanto (4.11) queda de la forma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/I & \longrightarrow & B/I \end{array} \quad (4.12)$$

Ejemplos 4.5.6

- Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica distinta de 2 y 3, y $f = y^2 - x^2 - x^3 \in k[x, y]$. Denotemos por \mathbb{A}_k^2 al plano afín con cuerpo base k y sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{A}_k^2 : f(x, y) = 0\}$, la curva definida por f . Consideremos los anillos

$$A := \{ \text{funciones polinomiales sobre } X \} \cong \frac{k[x, y]}{\langle f \rangle},$$

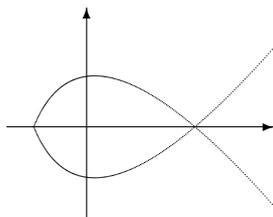
$$B := \{ \text{funciones polinomiales sobre } \mathbb{A}_k^1 \} \cong k[t].$$

Consideremos la parametrización de X dada por $x = t^2 - 1$, $y = t(t^2 - 1)$. Esta parametrización es sobreyectiva, por lo tanto induce un morfismo

inyectivo $\varphi : A \rightarrow B$; su imagen es $k[t^2 - 1, t(t^2 - 1)]$. Sea $I = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ ideal de A generado por las clases de las variables x e y . Mediante el morfismo φ la imagen del ideal I es el ideal $\varphi(I) = \langle t^2 - 1 \rangle$ de B . Por tanto tenemos el siguiente cuadrado de Milnor.

$$\begin{array}{ccc} \frac{k[x,y]}{\langle f \rangle} & \longrightarrow & k[t] \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & \longrightarrow & \frac{k[t]}{\langle t^2-1 \rangle} \cong k \oplus kt \end{array}$$

La traducción geométrica de este cuadrado nos dice que identificando dos puntos distintos, el 1 y el -1 de la recta afín, obtenemos una curva de la forma siguiente



2. Sea S un anillo conmutativo y $R \subset S$ un subanillo, entonces el ideal

$$I = \text{Ann}_R(S/R) := \{r \in R : r \cdot S \subset R\}$$

es a la vez un ideal de R y de S . Por tanto el diagrama

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ R/I & \longrightarrow & S/I \end{array} \quad (4.13)$$

es un cuadrado de Milnor. En general I puede ser cero. Sin embargo, si R es un dominio con cuerpo de fracciones F y $R \subset S \subset F$ es una subextensión finitamente generada como R -módulo, entonces $I \neq 0$. En efecto, si $S = Rs_1 + \cdots + Rs_n$ con $s_i = x_i/y_i$ para $x_i, y_i \in R$ entonces $y = y_1 \cdots y_n$ es un elemento no nulo de I . Un teorema clásico (ver [ZS, Vol 1, Ch V, Thm 9]), dice que si k es un cuerpo y R un dominio que es

esencialmente de tipo finito sobre k , entonces la clausura íntegra S de R en F es finita como R -módulo. En particular (4.13) es un cuadrado de Milnor. Notar que el ejemplo 1 es un caso particular de esta situación.

3. Sea un anillo A y dos ideales I y J , entonces tenemos el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A/I \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/J & \longrightarrow & \frac{A}{I+J} \end{array} \quad (4.14)$$

Notar que en este cuadrado todos los morfismos son sobreyectivos. El morfismo inducido entre los núcleos de los morfismos verticales es el epimorfismo natural $J \rightarrow I + J/I$, que tiene por núcleo a $I \cap J$. Así, (4.14) es un cuadrado de Milnor si, y sólo si, $I \cap J = 0$.

Si $\{H_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una teoría de homología de anillos y (4.12) es un cuadrado de Milnor, entonces se tiene un diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(A, B; I) & \longrightarrow & H_n(A : I) & \longrightarrow & H_n(B : I) & \longrightarrow & H_{n-1}(A, B; I) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(\varphi) & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{\varphi} & H_n(B) & \longrightarrow & H_{n-1}(\varphi) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(\bar{\varphi}) & \longrightarrow & H_n(A/I) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & H_n(B/I) & \longrightarrow & H_{n-1}(\bar{\varphi}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n-1}(A, B; I) & \longrightarrow & H_{n-1}(A : I) & \longrightarrow & H_{n-1}(B : I) & \longrightarrow & H_{n-2}(A, B; I) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \end{array} \quad (4.15)$$

Definición 4.5.7 Sean \mathcal{C} una subcategoría plena de la categoría de anillos y H_* una teoría de homología definida en \mathcal{C} . Decimos que H_* satisface **escisión** (resp. satisface **escisión en dimensión $\leq n$**) si $H_m(A, B : I) = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ (resp. para $m \leq n$). Decimos que H_* satisface **Meyer-Vietoris** (resp.

satisface **Meyer-Vietoris hasta dimensión n**) si para todo m (resp. para todo $m \leq n$) y todo cuadrado de Milnor (4.12) en \mathcal{C} existe una transformación natural $\partial_m : H_m(B/I) \rightarrow H_{m-1}(A)$ de modo que la sucesión

$$H_m(A) \longrightarrow H_m(A/I) \oplus H_m(B) \xrightarrow{\pm} H_m(B/I) \xrightarrow{\partial_m} H_{m-1}(A) \quad (4.16)$$

es exacta para todo $m \in \mathbb{Z}$ (resp. para $m \leq n$). La sucesión (4.16) es la **sucesión de Meyer-Vietoris** asociada a H y a (4.12).

Proposición 4.5.8 Sean \mathcal{C} una subcategoría plena de la categoría de anillos y H_* una teoría de homología definida en \mathcal{C} . Si H_* satisface escisión en dimensión $\leq n$ entonces satisface Meyer-Vietoris hasta dimensión $n + 1$.

Demostración. Sea $\varphi_m^I : H_m(A : I) \rightarrow H_m(B : I)$ el isomorfismo inducido por ϕ . Para $m \leq n$ se define $\partial_m : H_m(B/I) \rightarrow H_{m-1}(A)$ como la composición

$$\partial_m : H_m(B/I) \rightarrow H_{m-1}(B : I) \xrightarrow{(\varphi_m^I)^{-1}} H_{m-1}(A : I) \rightarrow H_{m-1}(A)$$

Un seguimiento del diagrama prueba que la sucesión de Meyer-Vietoris resultante es exacta hasta dimensión $n + 1$. \square

Ejemplo 4.5.9 Cuntz y Quillen probaron [CQ] que la homología cíclica periódica, considerada como teoría de homología de álgebras sobre un cuerpo de característica cero, satisface escisión. Otro ejemplo viene dado por el siguiente.

Teorema 4.5.10 (Bass, ver [Ros, 3.3.4]) La K -teoría, considerada como teoría de homología sobre la categoría de anillos, satisface escisión en dimensión ≤ 0 .

Nota 4.5.11 Swan mostró que la escisión falla en dimensión 1 (ver [Ros, Ex 2.5.20]).

4.6. Caracter de Chern y K -teoría infinitesimal

El **caracter de Chern** es un morfismo de grupos

$$ch_n : K_n(A) \rightarrow HN_n(A) \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (4.17)$$

que conecta los grupos de K -teoría y de homología cíclica negativa de un anillo A . Si bien este morfismo está definido para todos los anillos A , sus

propiedades más importantes son válidas sólo para \mathbb{Q} -álgebras, de modo que **de aquí en adelante todos los anillos serán \mathbb{Q} -álgebras**. En (4.17), la homología cíclica se toma sobre \mathbb{Z} , es decir que en los \otimes que aparecen en el complejo CN que define HN se toman sobre \mathbb{Z} ; para álgebras sobre \mathbb{Q} (que, como se dijo, son los únicos anillos que consideraremos) es lo mismo que tomarlos sobre \mathbb{Q} . A continuación repasamos sucintamente la construcción del caracter (4.17); para más detalles puede consultarse [Lod, Ch.8]. Comenzamos por el caso $n = 0$. Dado que $HN_0(A)$ es un grupo abeliano y que $K_0(A)$ es el grupo de Grothendieck de las clases de idempotentes, basta definir un morfismo de monoides $I(A)/\sim \rightarrow HN_0(A)$. Una matriz idempotente $e \in M_n A$ determina un morfismo

$$\hat{e} : \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - x \rangle \rightarrow M_n A$$

Como $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - x \rangle$ es separable, se calcula fácilmente que

$$HN_0(\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - x \rangle) = \mathbb{Q}.$$

Así la imagen de $1 \in \mathbb{Q}$ determina un elemento $\hat{e}(1) \in HN_0(M_n(A))$. Por otro lado se comprueba que la aplicación

$$\begin{aligned} tr : C_p(M_n(A)) &\rightarrow C_p(A) \\ tr(M_0 \otimes \cdots \otimes M_p) &= \sum_{i_0, \dots, i_p} M_0^{i_0, i_1} \otimes M_1^{i_1, i_2} \otimes \cdots \otimes M_p^{i_p, i_0} \end{aligned} \quad (4.18)$$

define un morfismo de complejos mixtos, y por tanto también un morfismo de grupos $HN_*(M_n A) \rightarrow HN_*(A)$. El caracter de Chern se define como

$$ch_0(e) = tr(\hat{e}(1)).$$

Se comprueba que ch_0 da un morfismo de monoides bien definido y por tanto uno de grupos $K_0(A) \rightarrow HN_0(A)$. El caracter ch_1 puede definirse en forma similar, notando que dar un elemento $g \in GL_n(A)$ es lo mismo que dar un morfismo $\hat{g} : \mathbb{Q}[t, t^{-1}] \rightarrow M_n(A)$. Se calcula $HN_1(\mathbb{Q}[t, t^{-1}]) = \Omega_{\mathbb{Q}[t, t^{-1}]}^1$ y se define

$$ch_1(g) = tr(\hat{g}(dt/t)).$$

En general para definir ch_n para $n \geq 1$ se procede como sigue. Se prueba que si G es un grupo cualquiera entonces $H_n(G)$ es un sumando directo de $HN_n(\mathbb{Q}[G])$. Aplicando esto a $G = GL_p(A)$ y componiendo con el morfismo natural $\mathbb{Q}[GL_p(A)] \rightarrow M_p A$ y con $tr : HN_n(M_p A) \rightarrow HN_n(A)$ obtenemos un morfismo

$$l_p : H_n(GL_p(A)) \rightarrow HN_n(A).$$

Por definición, $GL(A) = \cup_{p \geq 1} GL_p(A) = \text{colim } {}_pGL_p(A)$. Luego obtenemos un morfismo

$$l : H_n(GL(A)) = \text{colim } {}_pH_n(GL_p(A)) \rightarrow HN_n(A).$$

Componiendo este morfismo con el de Hurewicz se obtiene el caracter de Chern

$$\begin{aligned} ch_n : K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+) &\xrightarrow{\text{Hurewicz}} \\ &H_n(BGL(A)^+) = H_n(GL(A)) \xrightarrow{t} HN_n(A) \end{aligned}$$

Para $n = 1$ se obtiene el caracter de arriba. Para definir ch_n con $n < 0$ se utiliza el análogo de la sucesión 4.5 para HN . En efecto, se sigue de [Lod, 4.4.9, E5.1.4] que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene una sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow HN_n(A) \xrightarrow{\Delta} HN_n(A[t]) \oplus HN_n(A[t^{-1}]) \xrightarrow{\pm} \\ HN_n(A[t, t^{-1}]) \xrightarrow{\partial} HN_{n-1}(A) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Esto da una forma inductiva de definir ch_{n-1} a partir de ch_n ; en particular partiendo de ch_0 se define ch_{-n} para todo $n > 0$.

Como vimos en 4.4.3, la K -teoría tiene una estructura de producto externo $K_*(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K_*(S) \rightarrow K_*(R \otimes_{\mathbb{Z}} S)$, que en el caso en que R es conmutativo, induce un producto interno $K_*(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K_*(R) \rightarrow K_*(R)$, que da una estructura de anillo graduado conmutativo en $K_*(R)$. Por otra parte HN tiene una estructura de producto externo similar [Lod, §5.1], que en el caso conmutativo induce el producto interno discutido en el Capítulo 1. McCarthy probó en [Mac] que el caracter de Chern es compatible con estas estructuras. En particular, si R es conmutativo, el caracter de Chern es un morfismo de anillos: para $x \in K_p(R)$, $y \in K_q(R)$ se tiene

$$ch_p(x) \cdot ch_q(y) = ch_{p+q}(x \cdot y). \quad (4.19)$$

La K -teoría infinitesimal se define de modo de obtener una sucesión exacta larga ($n \in \mathbb{Z}$)

$$HN_{n+1}A \rightarrow K_n^{inf}A \rightarrow K_n(A) \xrightarrow{ch_n} HN_n(A). \quad (4.20)$$

Teorema 4.6.1 [Lod, 11.3.1] Sean A una \mathbb{Q} -álgebra, e $I \triangleleft A$ un ideal nilpotente. Entonces el morfismo $K_*^{inf}(A) \rightarrow K_*^{inf}(A/I)$ es un isomorfismo.

Teorema 4.6.2 [Cor4] K^{inf} , considerada como teoría de homología de \mathbb{Q} -álgebras, satisface escisión.

4.7. Cambio de cuerpo base

Mostraremos en la sección siguiente las propiedades 4.6.1 y 4.6.2 de K^{inf} nos permiten calcularla en algunos ejemplos; el plan es combinar ésto con las técnicas de cálculo de HN desarrolladas en los capítulos anteriores, y con la sucesión (4.20), para calcular los grupos K . Un problema que se presenta es que la homología cíclica en (4.20) se toma sobre \mathbb{Q} , y que para poder aplicar nuestras técnicas de cálculo de HN necesitamos que nuestras álgebras sean esencialmente de tipo finito sobre el cuerpo de base k , que no tiene por qué ser \mathbb{Q} . Así, por ejemplo, si $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]/f$, los métodos que tenemos nos permiten calcular la homología de A como \mathbb{C} -álgebra, pero no como \mathbb{Q} -álgebra. En general, dada una extensión de cuerpos $k \supset \mathbb{Q}$, el problema de obtener la homología de una k -álgebra A como \mathbb{Q} -álgebra conociendo la que tiene como k -álgebra es difícil. Hay, sin embargo, dos casos en que tiene solución sencilla. Uno, que no consideraremos aquí, es cuando A está definida sobre \mathbb{Q} , es decir $A = A' \otimes_{\mathbb{Q}} k$ con A' esencialmente de tipo finito sobre \mathbb{Q} . Por ejemplo si $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$, $A = k[x_1, \dots, x_m]/f$ es de esa forma. En este caso pueden utilizarse fórmulas para la homología cíclica de un producto tensorial de álgebras (ver [Lod, E5.1.3], [GRW]). Otro caso sencillo es aquél en el que k es algebraico sobre \mathbb{Q} ; veremos abajo que en este caso la homología es la misma si se toma sobre \mathbb{Q} o sobre k .

En la proposición siguiente, denotamos por HH_*^k la homología de Hochschild tomada sobre k . Recordemos que si A es una k -álgebra y M un A -bimódulo, la **homología de Hochschild de A con coeficientes en M** es

$$HH_*^k(A, M) = \text{Tor}_*^{A \otimes_k A^{op}}(A, M).$$

Proposición 4.7.1 Sean $k \subset \ell$ cuerpos, A una ℓ -álgebra, y M un $A \otimes_k A^{op}$ -módulo. Hay una sucesión espectral de primer cuadrante

$$E_{p,q}^2 = HH_p^\ell(A, HH_q^k(\ell, M)) \Rightarrow HH_{p+q}^k(A, M).$$

Demostración. Los grupos $HH_*^k(A, \)$ son los funtores derivados de $M \mapsto HH_0^k(A, M) = A/[A, M]$. Este functor se factoriza del siguiente modo

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_k A - \text{mod} & \xrightarrow{HH_0^k(A, \)} & A - \text{mod} \\ & \searrow_{HH_0^k(\ell, \)} & \nearrow_{HH_0^\ell(A, \)} \\ & A \otimes_\ell A - \text{mod} & \end{array}$$

La sucesión espectral de la proposición es la asociada a esta composición de funtores [Wei, 5.8.4]. □

Corolario 4.7.2 Sean $k \rightarrow \ell$ una extensión algebraica de cuerpos de característica cero, A una ℓ -álgebra, $C^k(A)$ y $C^\ell(A)$ los complejos de Hochschild de A considerada respectivamente como k - y como ℓ -álgebra. Entonces la aplicación canónica de complejos mixtos $(C^k(A), b, B) \rightarrow (C^\ell(A), b, B)$ induce un isomorfismo en homología de Hochschild, cíclica, cíclica periódica, y cíclica negativa.

Demostración. En virtud de las sucesiones SBI y de la sucesión de Milnor [Wei, 3.5.8], basta probar que

$$HH_*^k(A) \rightarrow HH_*^\ell(A) \quad (4.21)$$

es un isomorfismo. Como HH conmuta con colímites filtrantes y como toda extensión algebraica es colímite filtrante de extensiones finitas, podemos suponer que $k \rightarrow \ell$ es finita, y por tanto, dado que estamos en característica cero, separable. Pero en este caso ℓ es proyectivo como $\ell \otimes_k \ell$ -módulo ([Wei, 9.2.8]); por tanto la sucesión espectral de 4.7.1 está concentrada en el eje x , y se obtiene que (4.21) es un isomorfismo. \square

En adelante nos restringiremos al caso en que el cuerpo de base es algebraico sobre \mathbb{Q} , y, dado que por el corolario anterior la homología no depende del cuerpo de base, omitiremos el superíndice k .

Ejemplo 4.7.3 Si k es una extensión algebraica de \mathbb{Q} , entonces $HN_n(k) = 0$ para $n > 0$ y para $n < 0$ impar, mientras que $HN_{-2n}(k) = k$ si $n \geq 0$. Como por otra parte el caracter de Chern $ch_0 : \mathbb{Z} = K_0(k) \rightarrow k = HN_0(k)$ es la inclusión canónica, se tiene

$$K_n^{inf}(k) = \begin{cases} K_n(k), & n \geq 1 \\ 0, & n = 2p \leq 0 \\ k/\mathbb{Z}, & n = -1 \\ k, & n = 2p + 1 < -1 \end{cases}$$

Ejemplo 4.7.4 Sean k como en el ejemplo anterior, $m \geq 1$ y $P_m(k) = k[x_1, \dots, x_m]$. Como k es un anillo regular, $K_*(k) = K_*(P_m(k))$. Sea

$$Z_m^n(k) = \begin{cases} \ker(d : \Omega_{P_m(k)/k}^n \rightarrow \Omega_{P_m(k)/k}^{n+1}), & n > 0 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$

Se tiene $HN_n(P_m)/HN_n(k) = Z_m^n$. Utilizando (4.20) y el ejemplo anterior, se obtiene

$$K_n^{inf}(P_m(k)) = K_n^{inf}(k) \oplus Z_m^{n+1}(k). \quad (4.22)$$

4.8. Aplicaciones.

En esta sección aplicaremos las propiedades de K^{inf} para calcular los grupos K de ciertos esquemas afines singulares en términos de la K -teoría de esquemas no singulares y de grupos de homología cíclica. En primer lugar daremos un resultado general sobre curvas. Luego daremos un ejemplo concreto del anillo A de una superficie singular, cuya K -teoría expresaremos en función de la de su cuerpo de base y de la homología cíclica de A , la que calcularemos utilizando los métodos del Capítulo 2.

4.8.1. Curvas

Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y A una k -álgebra conmutativa, esencialmente de tipo finito sobre k , de dimensión de Krull 1; Sea $X = \text{Spec } A$. Supondremos además que A es un dominio y que

$$\forall \mathfrak{m} \in X \quad \text{maximal}, \quad A/\mathfrak{m} = k \quad (4.23)$$

Así A será (una localización de) el anillo de coordenadas de una curva afín sobre k . Sea B la clausura íntegra de A en su cuerpo de fracciones, $\phi : A \rightarrow B$ la inclusión, e $I = \text{ann}_A(B/A)$. Entonces

$$\text{sing}X = V(I) \subset \text{Spec } A$$

es el conjunto de puntos singulares de X , es decir el conjunto de maximales \mathfrak{m} tales que $A_{\mathfrak{m}}$ no es regular. Este conjunto es finito; ponemos

$$s := \#\text{sing}X$$

La aplicación $\phi_{\mathfrak{m}}$ es un isomorfismo si, y sólo si, $\mathfrak{m} \notin \text{sing}X$. Si $\mathfrak{m} \in \text{sing}X$, llamamos **índice de ramificación de X en M** al número $b_{\mathfrak{m}}$ de maximales $\mathfrak{n} \in \text{Spec } B$ tales que $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$. El índice de ramificación total es

$$b = \sum_{\mathfrak{m} \in \text{sing}X} b_{\mathfrak{m}}$$

En el teorema siguiente especializamos lo anterior al caso en que $k = \bar{\mathbb{Q}}$, la clausura algebraica de \mathbb{Q} .

Teorema 4.8.1 *Sea A un dominio de integridad, esencialmente de tipo finito sobre $\bar{\mathbb{Q}}$, de dimensión de Krull 1. Supongamos además que se satisface (4.23) para $k = \bar{\mathbb{Q}}$. Con las notaciones de arriba, se tiene*

i) Si $n \leq -2$, $K_{-n}\phi = 0$.

ii) Hay una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_0(\phi) \rightarrow HN_1(\phi) \rightarrow (\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Z})^{b-s} \rightarrow K_{-1}\phi \rightarrow HN_{-1}\phi \rightarrow 0.$$

iii) Para $n \geq 1$ se tiene

$$K_n(\phi) = (K_{n+1}(\bar{\mathbb{Q}}))^{b-s} \oplus HN_n(\phi).$$

Si además $n \geq 2$, entonces $HN_n(\phi) = HN_n(A)$.

Demostración. La parte i) se sigue de que $K_{-n-1}A = K_{-n}B = 0$ para $n \geq 1$ (ver 4.3.5). Sean $k = \bar{\mathbb{Q}}$ y $\bar{\phi} : A/I \rightarrow B/I$ el morfismo inducido. En virtud de 4.6.1 y 4.6.2, $K_*^{inf}(\phi) = K_*^{inf}(\bar{\phi}_{red})$. Sean $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s$ los puntos singulares de $X = \text{Spec } A$, $b_i = b_{\mathfrak{m}_i}$, $b = \sum_i b_i$ y $\Delta_i : k \rightarrow k^{b_i}$ el morfismo diagonal. Tenemos

$$\bar{\phi}_{red} = \bigoplus_{i=1}^s \Delta_i : k^s \rightarrow \bigoplus_{i=1}^s k^{b_i} = k^b$$

En particular $\bar{\phi}_{red}$ es una sección. Se sigue que la sucesión

$$0 \rightarrow K_{n+1}^{inf}(k)^s \rightarrow K_{n+1}^{inf}(k)^b \rightarrow K_n^{inf}(\phi) \rightarrow 0$$

es exacta escindida. Luego

$$K_n^{inf}(\phi) = K_{n+1}^{inf}(k)^{b-s} \quad (4.24)$$

Un razonamiento análogo muestra que

$$K_n(\bar{\phi}_{red}) = K_{n+1}(k)^{b-s} \quad (4.25)$$

La parte ii) y la primera aserción de iii) se siguen de (4.24), (4.25) y 4.7.3. La segunda aserción de iii) se sigue de que como B es suave sobre k de dimensión 1, $HN_n(B) = 0$ para $n \geq 2$ (ver Sección 1.4). \square

Corolario 4.8.2 Si $b = s$ y $n \geq 2$ entonces $K_n(A) = HN_n(A) \oplus K_n(B)$.

Nota 4.8.3 Los resultados del Capítulo 3 para la homología cíclica de hiper-superficies con singularidades aisladas se aplican en particular para curvas planas. En virtud del corolario anterior, calculan un sumando directo de $K_n(A)$. Notemos además que, en virtud de 4.19, el producto en este sumando es el de $HN_*(A)$, que fue exhaustivamente analizado en el Capítulo 2.

4.9. Otro ejemplo

Aquí mostraremos un ejemplo de una superficie singular cuyo lugar singular es una recta, a la cual nuestros métodos permiten calcular su K -teoría. Sean k una extensión algebraica de \mathbb{Q} , $f = xy^n - z^n$, y $A = k[x, y, z]/f$. La superficie $S = \{f = 0\}$ se parametriza por

$$\phi : \mathbb{A}_k^2 \rightarrow S, \quad \phi(t, y) = (t^n, y, ty).$$

El morfismo inducido por ϕ da una inmersión $A \rightarrow k[t, y]$; identificaremos A con su imagen $k[t^n, y, ty]$. Dado que $t = z/y$ y $t^n \in A$, tenemos $k[t, y] = \sum_{j=0}^{n-1} At^j$, y por tanto

$$I := y^{n-1} \cdot k[t, y] = y^{n-1}A + y^{n-2}zA + \cdots + z^{n-1}A = (yA + zA)^{n-1}$$

es a la vez un ideal de A y de $k[t, y]$. Dividiendo por I y reduciendo, el morfismo inducido por ϕ resulta

$$(A/I)_{red} = k[x] \xrightarrow{x \mapsto t^n} k[t] = (k[t, y]/I)_{red}.$$

Aplicando 4.6.1 y 4.6.2, nos queda una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_0^{inf}(\phi) \rightarrow k[t^n]d(t^n) \rightarrow k[t]dt \rightarrow K_{-1}^{inf}\phi \rightarrow 0.$$

Identificando $Z_1^1 = k[t]dt = d(tk[t])$ obtenemos

$$K_p^{inf}(A) = \begin{cases} k[t]/k[t^n] & p = -1 \\ 0 & p \neq -1 \end{cases}$$

Se sigue de (4.7.3), (4.22) y la definición de $K_*(\phi)$ que hay una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_0^{inf}(A) \rightarrow Z_2^1 \rightarrow k[t]/k[t^n] \rightarrow K_{-1}^{inf}(A) \rightarrow k/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

donde el morfismo

$$Z_2^1 = d(k[t, y]) \rightarrow d(k[t])/d(k[t^n]) = k[t]/k[t^n] \quad (4.26)$$

es el inducido por

$$k[t, y] \rightarrow k[t], \quad t \mapsto t, \quad y \mapsto 0.$$

Un cálculo muestra que (4.26) es sobreyectiva, y que su núcleo es isomorfo a

$$V := t^n k[t] + yk[t, y].$$

Tenemos entonces

$$K_p^{inf}(A) := \begin{cases} K_p(k), & p \geq 2 \\ K_1(k) \oplus Z_2^2, & p = 1 \\ V, & p = 0 \\ k/\mathbb{Z}, & p = -1 \\ k, & p = 2q + 1 < -1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Pasamos ahora a calcular $K_*(A)$ con la ayuda de la sucesión (4.20) y de los cálculos del Capítulo 2 y en particular del ejemplo 2.1.3. Comencemos por observar que como $k \rightarrow A \rightarrow A/A_+ = k$ es la identidad, para

$$\tilde{K}_*(A) = K_*(A : A_+) = \ker(K_*(A) \rightarrow K_*(k))$$

se tiene

$$K_*(A) = K_*(k) \oplus \tilde{K}_*(A)$$

Utilizando el cálculo de K^{inf} dado arriba, de (4.20), se obtiene inmediatamente que

$$\tilde{K}_p(A) = \begin{cases} HN_p(A) & p > 2 \\ 0 & p < 0 \end{cases}$$

Del ejemplo 2.4.8 y de 2.4.3, y teniendo en cuenta que

$$Z^3\Omega_A = \Omega_A^3 \cong \frac{k[x, y, z]}{\langle f, f_x, f_y, f_z \rangle} = \frac{k[x, y, z]}{\langle xy^{n-1}, y^n, z^{n-1} \rangle}$$

obtenemos, para $p > 2$,

$$HN_p(A) = \begin{cases} \frac{k[x, y, z]}{\langle y^{n-1}, z^{n-1} \rangle} & p = 2q \geq 4 \\ \frac{k[x, y, z]}{\langle xy^{n-1}, y^n, z^{n-1} \rangle} & p = 2q + 1 \geq 3 \end{cases}$$

Para determinar $\tilde{K}_p(A)$ para $p = 0, 1, 2$, resta estudiar la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{K}_2(A) & \longrightarrow & Z^2\Omega_A & \xrightarrow{j} & Z_2^2 & \longrightarrow & \tilde{K}_1(A) \\ & & & & & & & & \downarrow \iota \\ & & 0 & \longleftarrow & \tilde{K}_0(A) & \longleftarrow & V & \longleftarrow & Z^1\Omega_A \end{array}$$

Identificando $Z^1\Omega_A = d(A_+) \cong k[t^n, ty, y]_+$, el morfismo $Z^1\Omega_A \rightarrow V$ es la inclusión canónica $k[t^n, ty, y]_+ \subset t^n k[t] + yk[t, y]$. Se sigue que

$$\iota = 0. \tag{4.27}$$

Consideremos

$$\begin{aligned}\tau &:= \text{torsión de } \Omega_A^1 \\ &= \ker(\Omega_A^1 \rightarrow \Omega_{k[t,y]}^1)\end{aligned}$$

Aplicando el lema de la serpiente a

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \tau & \longrightarrow & \Omega_A^1 & \longrightarrow & \phi(\Omega_{A[t,y]}^1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker j & \longrightarrow & Z^2\Omega_A & \longrightarrow & \phi(Z^2\Omega_A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

se obtiene

$$\ker j \cong \tau \tag{4.28}$$

Resulta entonces

$$\tilde{K}_p(A) = \begin{cases} V/A_+ & p = 0 \\ HC_1(k[t,y])/\phi(HC_1(A)) & p = 1 \\ \tau & p = 2 \end{cases}$$

Anexo I: Tablas de Ejemplos.

A continuación exponemos los resultados en una tabla cuya primera y tercera columna son el nombre y la modalidad según aparecen en [AGLV]. Dado que en todos los ejemplos $r \leq 2$ se tiene que la dimensión estable del sistema $(V_\kappa, \mathcal{S})_\kappa$ es l_2 .

Nombre	f	mod	m	l_1	l_2	r	κ_0
D_4	$x^2y + y^3$	0	2	4	4	1	4
E_6	$x^3 + y^4$	0	2	6	6	1	4
E_7	$x^3 + xy^3$	0	2	7	7	1	4
E_8	$x^3 + y^5$	0	2	8	8	1	4
X_9	$x^4 + y^4 + ax^2y^2$	1	2	9	9	1	4
J_{10}	$x^3 + y^6 + ax^2y^3$	1	2	10	10	1	4
E_{12}	$x^3 + y^7 + axy^5$	1	2	11	12	2	4
E_{13}	$x^3 + xy^5 + ay^8$	1	2	12	13	2	4
E_{14}	$x^3 + y^8 + axy^6$	1	2	13	14	2	4
Z_{11}	$x^3y + y^5 + axy^4$	1	2	10	11	2	4
Z_{12}	$x^3y + xy^4 + ax^2y^3$	1	2	11	12	2	4
Z_{13}	$x^3y + y^6 + axy^5$	1	2	12	13	2	4
W_{12}	$x^4 + y^5 + ax^2y^3$	1	2	11	12	2	4
W_{13}	$x^4 + xy^4 + ay^6$	1	2	12	13	2	4
Q_{10}	$x^3 + y^4 + yz^2 + axy^3$	1	3	9	10	2	5
Q_{11}	$x^3 + y^2z + xz^3 + az^5$	1	3	10	11	2	5
Q_{12}	$x^3 + y^5 + yz^2 + axy^4$	1	3	11	12	2	5
S_{11}	$x^4 + y^2z + xz^2 + ax^3z$	1	3	10	11	2	5
S_{12}	$x^2y + y^2z + xz^3 + az^5$	1	3	11	12	2	5
U_{12}	$x^3 + y^3 + z^4 + axyz^2$	1	3	11	12	2	5
$J_{3,0}$	$x^3 + bx^2y^3 + y^9 + xy^7$	2	2	15	16	2	4
$J_{3,1}$	$x^3 + x^2y^3 + (1+y)y^{10}$	2	2	15	17	2	4
$Z_{1,0}$	$x^3y + x^2y^3 + xy^6 + y^7$	2	2	14	15	2	4
$Z_{1,1}$	$x^3y + x^2y^3 + (1+y)y^8$	2	2	14	16	2	4

Nombre	f	mod	m	l_1	l_2	r	κ_0
$W_{1,0}$	$x^4 + (1+y)x^2y^3 + y^6$	2	2	14	15	2	4
$W_{1,1}^\sharp$	$(x^2 + y^3)^2 + (1+y)xy^5$	2	2	14	16	2	4
$W_{1,2}^\sharp$	$(x^2 + y^3)^2 + (1+y)x^2y^4$	2	2	15	17	2	4
E_{18}	$x^3 + y^{10} + (1+y)xy^7$	2	2	16	18	2	4
E_{19}	$x^3 + xy^7 + (1+y)y^{11}$	2	2	18	20	2	4
E_{20}	$x^3 + y^{11} + (1+y)xy^8$	2	2	18	20	2	4
Z_{17}	$x^3y + y^8 + (1+y)xy^7$	2	2	15	17	2	4
Z_{18}	$x^3y + xy^6 + (1+y)y^9$	2	2	17	19	2	4
Z_{19}	$x^3y + y^9 + (1+y)xy^7$	2	2	17	19	2	4
W_{17}	$x^4 + xy^5 + (1+y)y^7$	2	2	15	17	2	4
W_{18}	$x^4 + y^7 + (1+y)x^2y^4$	2	2	16	18	2	4
$Q_{2,0}$	$x^3 + yz^2 + (1+y)x^2y^2 + xy^4$	2	3	13	14	2	5
$Q_{2,1}$	$x^3 + yz^2 + x^2y^2 + (1+y)y^7$	2	3	13	15	2	5
$S_{1,0}$	$x^2z + yz^2 + y^5 + (1+y)zy^3$	2	3	13	14	2	5
$S_{1,1}$	$x^2z + yz^2 + x^2y^2 + (1+y)y^6$	2	3	13	15	2	5
$S_{1,1}^\sharp$	$x^2z + yz^2 + zy^3 + (1+y)x^2y^4$	2	3	16	18	2	5
$S_{1,2}^\sharp$	$x^2z + yz^2 + zy^3 + (1+y)x^2y^3$	2	3	14	16	2	5
$U_{1,0}$	$x^3 + xz^2 + xy^3 + (1+y)y^3z$	2	3	13	14	2	5
$U_{1,1}$	$x^3 + xz^2 + xy^3 + (1+y)y^2z^2$	2	3	13	15	2	5
$U_{1,2}$	$x^3 + xz^2 + xy^3 + (1+y)y^4z$	2	3	14	16	2	5

Anexo II: Algoritmo.

En este anexo nuestra intención es explicar la forma en la que implementamos el algoritmo que obtuvimos en el capítulo 3. También explicamos la forma en que el lector puede utilizar este programa para calcular sus propios ejemplos. La implementación y los cálculos que se exponen en esta memoria han sido obtenidos usando la versión 2.0.3 del Singular (ver [GPS]). En primer lugar se necesita el paquete de cálculo simbólico Singular. Este programa se distribuye bajo la licencia GNU, con lo cual es software libre y puede descargarse de la red desde

`http:www.singular.uni-kl.de`

o cualquiera de sus espejos. Para aprender sobre las posibilidades que ofrece se puede consultar el libro de Greuel y Pfister [GP] y para obtener una información mas actualizada así como para descargar el programa consultar la página web mencionada anteriormente.

En segundo lugar habría que grabar los dos archivos que aparecen en el disco que está adjunto a este trabajo y copiarlas en el directorio

`./Singular/home/Singular/`

Finalmente abrimos una terminal de singular y seguimos las instrucciones del apartado que viene a continuación.

Biblioteca "ejemploHN.lib".

Estas funciones reúnen los procedimientos definidos anteriormente para calcular el resultado final de una vez. Para calcular un ejemplo concreto sólo tendremos que cargar la biblioteca "ejemploHN.lib". Para ello basta con escribir

```
> LIB "ejemploHN.lib";
```

Después ejecutamos el procedimiento `dimension` introduciendo la dimensión del espacio ambiente donde se encuentra la hipersuperficie, es decir del número de variables que tiene el ejemplo que queremos calcular.

```
> dimension(2);
```

Luego definimos el polinomio sobre el cual queremos realizar nuestros cálculos poniendo en primer lugar la palabra `poly` seguido de una palabra que defina nuestro polinomio el signo igual y el polinomio teniendo en cuenta que las variables x_i se representan como $x(i)$ de la siguiente forma

```
> poly f=x(1)^3+x(2)^7+x(1)*x(2)^5;
```

Finalmente llamamos al procedimiento `HN` con el polinomio que hemos definido y obtenemos así los siguientes datos:

- El primer r a partir del cual $L_i = 0$ para todo $i \geq r$.
- Las $k[t]$ -bases y las dimensiones de los L_i para $1 \leq i \leq r$.
- Los polinomios χ .

```
> HN(f);
```

Ejemplo 4.9.1 Para calcular la homología cíclica negativa de R/f , donde $R = k[x_1, x_2]$ y $f = x_1^3 + x_2^7 + x_1x_2^5$ introduciríamos los siguientes comandos:

```
> LIB "ejemploHN.lib";
> dimension(2);          //2 es el número de variables de R
> poly f=x(1)^3+x(2)^7+x(1)*x(2)^5;
> HN(f);
```

La salida que proporciona la rutina `HN` es la siguiente:

```
"Este es el entero k para el cual Lk es cero"
3
"Estas son las bases de los Li"
[1]:
  [1]:
    125*x(1)*x(2)^3-1029*x(2)^4
  [2]:
    3125*x(1)*x(2)^3+151263*x(2)^3
  [3]:
    125*x(1)*x(2)^2-1029*x(2)^3
  [4]:
```

```

3125*x(1)*x(2)^2+151263*x(2)^2
[5]:
1220703125*x(1)^3*x(2)-23544029528901*x(2)^2
[6]:
3125*x(1)^3*x(2)+151263*x(1)^2*x(2)
[7]:
3125*x(1)^2*x(2)+151263*x(1)*x(2)
[8]:
3125*x(1)*x(2)+151263*x(2)
[9]:
1220703125*x(1)^3-23544029528901*x(2)
[10]:
3125*x(1)^3+151263*x(1)^2
[11]:
3125*x(1)^2+151263*x(1)
[2]:
[1]:
30517578125*x(1)^3*x(2)+179443359375*x(1)^3
[3]:
[1]:
0
"Estas_son_las_dimensiones_de_los_Li"
[1]:
11
[2]:
1
[3]:
0
"Estos_son_los_polinomios_chi"
[1]:
(t^10+10*t^9+19735/441*t^8+52040/441*t^7+39486283/194481*t^6+
15437990/64827*t^5+16536843665/85766121*t^4+
9125104460/85766121*t^3+1448125167116/37822859361*t^2+
306828062320/37822859361*t+12816154208000/16679880978201)

```

Este resultado se interpreta de la siguiente manera. En primer lugar nos dice que el entero κ para el cual $L_r = 0$ para todo $r \geq \kappa$ es 3 y luego nos da los elementos generadores de $L_1(t)$ y $L_2(t)$ como $k[t]$ -módulos y las dimensiones de L_1, L_2 y L_3 . Por tanto la primera conclusión es que $L_1(t) \cong_{k[t]-\text{mod}} k[t]^{\times 11}$ y $L_2(t) \cong_{k[t]-\text{mod}} k[t]$. En último lugar el procedimiento nos muestra los polinomios χ_i que en este ejemplo es sólo uno y cuyas raíces, dependiendo de si

son enteras positivas, determinan el elemento κ_0 del Teorema 3.4.7.

A continuación escribimos el código de estos procedimientos:

- El código del procedimiento `dimension` que recibe como entrada un entero m y se encarga de definir el anillo de polinomios de m -variables.

```
proc dimension(int p)
{
  int m=p; ring R=(0,t),(x(1..m)),dp;
  export(m);
  keep ring(R);
}
```

- El código del procedimiento `HN` en primer lugar carga nuestra librería `homoHN.lib`, que es donde tenemos implementado el algoritmo y los procedimientos necesarios para su cálculo. Una vez cargada la librería calcula algunos elementos esenciales como J , el ideal jacobiano de f , las bases de Groebner GJ y GF asociadas a los ideales J y a $f + J$ respectivamente así como las bases KJ y KF de R/J y $R/f + J$ como k -espacios vectoriales. Después calcula una base de L_1 , usando para ello el procedimiento `MORFISMOf`. Este procedimiento considera una base como k -espacio vectorial de $(R/J)_{x_0}$, el anillo localizado en un punto singular x_0 . Luego construye la matriz asociada al endomorfismo multiplicar por f . Seguidamente usa el procedimiento `ker` para calcular el núcleo de la matriz dada por `MORFISMOf`. Notar que los elementos de este núcleo vienen a ser los generadores de L_1 . Después se llama al procedimiento `PRIMERPASO` que se encarga de calcular el primer paso del algoritmo `Final` pero que debemos realizar antes para garantizar la recursividad. Finalmente llama al procedimiento `Final` para calcular los L_i .

```
proc HN(poly f)
{
  LIB "homoHN.lib";
  ideal J=jacob(f);
  ideal F= f, J; ideal GJ=std(J); ideal GF=std(F);
  ideal KJ=kbase(GJ); ideal KF=kbase(GF);
  matrix A=MORFISMOf(GJ,f,KJ);
  list L1=ker(A,KJ); matrix H=PRIMERPASO(L1,f,J);
  list homology=Final(m,L1,H,F,KF);
  print('Este es el entero k para el cual Lk es cero');
  print(homology[4]);
}
```

```

print('Estas son las bases de los Li');
print(homology[1]);
print('Estas son las dimensiones de los Li');
print(homology[2]);
print('Estos son los polinomios chi');
print(homology[3]);
}

```

Antes de seguir expliquemos brevemente en que consiste el procedimiento PRIMERPASO. Primero notemos que el morfismo $\Delta_1 : L_1 \rightarrow C_1$ viene definido de la siguiente forma: a cada elemento p de $L_1 = (J : f)/J$ para el cual se verifica que $f \cdot p = \sum_{j=1}^m p_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}$, le asigna $p + \sum_{j=1}^m \frac{\partial p_j}{\partial x_j}$. Dada una base $\{b_1, \dots, b_{r_1}\}$ como k espacio vectorial de L_1 el procedimiento PRIMERPASO considera los elementos $a_{i,j}$ siguientes

$$f \cdot b_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

A continuación devuelve la matriz H cuya primera columna son los elementos b_i y la columna j -ésima es la formada por los elementos $a_{i,j}$, quedando de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ b_2 & a_{2,1} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r_1} & a_{r_1,1} & \cdots & a_{r_1,m} \end{pmatrix}$$

Con esta matriz es más sencillo evaluar el morfismo Δ_1 pues por ser lineal basta con multiplicar H por el vector $(1, e_1, \dots, e_m)$, donde $p \cdot e_i = \partial(p)/\partial x_i$, para obtener las imágenes de los b_i .

Biblioteca "homoHN.lib".

En la biblioteca "homoHN.lib" se encuentra implementado, en una función llamada `Final` el algoritmo que obtuvimos en el capítulo 3. Antes de llegar a este procedimiento hay definidas varias funciones que son útiles, para llevar a cabo la implementación. Dentro de la librería se explica para qué sirve cada procedimiento. El algoritmo 1 recoge, en pseudocódigo, el algoritmo implementado en la función `Final`.

Algorithm 1 Calcula la homología cíclica negativa de una hipersuperficie con singularidades aisladas

Requiere: $m, b, h, F, base$

Devuelve: $r_0, rk(L_i(t)),$ los generadores de $L_i(t), \chi_i(t)$

```

1: Inicialización:
2: enteros:  $\kappa = 1, fin = 0, intaux,$ 
3: matrices:  $A, B, D, C, CC, Aux$ 
4: listas:  $M, p, Kaux, listaux, bb = b, q = h, L = [b], l = [[b]]$ 
5: Algoritmo:
6: while  $\kappa \leq m$  AND  $fin = 0$  do
7:    $A = \Delta(bb, q, F, base)[1]$ 
8:    $M = M \leftarrow A$  //Introduce  $A$  en la lista  $M$ 
9:    $B = \Delta(bb, q, F, base)[2]$ 
10:  for  $i = 1$  to  $\kappa$  do
11:    if  $i = \kappa$  then
12:       $D = Diag(A)$ 
13:       $p = \{D_{j,j} : j = 1, \dots, n\text{rows}(D) \ D_{j,j} \neq 0, 1\}$ 
14:       $Kaux = Ker(A)$ 
15:      if  $Kaux \neq 0$  then
16:         $C =$  matriz cuyas filas son las  $l_{\kappa-1}$ -primeras filas de  $Kaux$ 
17:         $CC =$  matriz  $C$  eliminando las columnas nulas
18:         $intaux = n\text{cols}(CC)$ 
19:         $listaux =$  elementos columnas de  $CC$  puestos en función de  $bb$ 
20:         $q = CC^t \cdot B$ 
21:         $bb = listaux$ 
22:      else
23:         $fin = 1$ 
24:         $intaux = 0$ 
25:         $listaux = \emptyset$ 
26:      end if
27:       $L = L \leftarrow listaux$  //Introduce  $listaux$  en la lista  $L$ 
28:       $l = l \leftarrow intaux$  //Introduce  $intaux$  en la lista  $l$ 
29:    else
30:       $Aux = SUBST(M[i], \kappa - i)$ 
31:       $A = CONCAT(A, Aux)$  //Concatena las matrices  $A$  y  $Aux$ 
32:    end if
33:  end for
34:   $\kappa = \kappa + 1$ 
35: end while
36: return( $L, l, p$ )

```

La función `Final` requiere como datos de entrada los siguientes:

- un entero m , que es la dimensión de Krull del anillo R ,
- una lista de elementos b , que va a ser una base de L_1 como k -espacio vectorial,
- una matriz h , calculada en un paso previo que es un dato necesario para evaluar Δ_1 ,
- un ideal F , que va a ser el ideal $f + J$, y
- un ideal "base", que es una base de R/F como k -espacio vectorial.

Y los datos de salida que devuelve son los siguientes:

- en primer lugar, la lista de las bases los L_k como k -espacios vectoriales,
- luego, la lista de las dimensiones de los L_k ,
- después la lista de los polinomios $\chi(t)$,
- finalmente, el entero en el que se ha parado la iteración, es decir, el primer entero r para el cual $L_r = 0$.

El procedimiento empieza declarando el tipo de las variables que se usarán. Después inicia un bucle en κ , con inicio 1 y paso 1, en el que calculará los Δ_κ y los L_κ en cada iteración, parando cuando $L_\kappa = 0$. Este bucle tiene como número máximo de iteraciones el número de variables, pues ya sabíamos de Teorema 3.3.1 que el número de variables de R es una cota. A continuación calcula Δ_κ llamando a la función `Delta` definida anteriormente. La función `Delta` toma como datos de entrada una lista de elementos b que dependiendo de la iteración en la que nos encontremos será una base de L_κ ; una matriz h que en la primera iteración es la salida del procedimiento `PRIMERPASO`; una base de Groebner F del ideal $fR + J$ y una base K de $R/(fR + J)$. Como salida nos da dos matrices la primera es la que sirve para evaluar el morfismo $\Delta_\kappa(t)$ y la segunda es la necesaria para calcular $\Delta_{\kappa+1}(t)$, es decir será la matriz h en la siguiente iteración. El pseudocódigo de la función `Delta` se recoge en el algoritmo 4.9.

Lo primero que hace la función `Delta` es evaluar $\Delta_\kappa(t)$ en cada elemento b_i de b . Para ello utiliza la matriz h que ya viene preparada del procedimiento `PRIMERPASO` si es la primera iteración, o en el caso de las iteraciones siguientes, va a ser la matriz Q de la iteración anterior. A continuación divide el

Algorithm 2 Calcula la matriz que define el $\Delta_\kappa(t)$

Requiere: b, h, F, K

Devuelve: P matriz de $\Delta_\kappa(t)$, Q matriz necesaria para la próxima iteración

Inicialización:

enteros: $df = \dim(K)$, $d = \dim(b)$

Algoritmo:

for $i = 1$ to d **do**

$$DELTA_{tbi} := t \cdot h_{i,1} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial h_{i,j+1}}{\partial x_j}$$

$$res_i + q_{i,1} \cdot f + \sum_{j=1}^m q_{i,j+1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} := DELTA_{tbi}$$

$$\sum_{j=1}^{df} res_{i,j} K_j := res_i$$

end for

$$\text{matrix } Q = (q_{i,j})_{\substack{j=1..m+1 \\ i=1..d}}$$

$$\text{matrix } P = (res_{j,i})_{\substack{i=1..d \\ j=1..df}}$$

return(P, Q)

resultado $\Delta_\kappa(t)(b_i)$ entre el ideal F obteniendo de esta forma un resto y unos cocientes. Los cocientes formarán parte de la matriz Q con la que podremos calcular la próxima iteración y los restos se descomponen según la base K para formar la matriz P que define $\Delta_\kappa(t)$.

Una vez que se ha expuesto como funciona la función **Delta**, continuemos con la función **Final**. En esta función, una vez llamada la función **Delta**, se almacena como matrices A y B las matrices P y Q que devuelve **Delta**. También se almacena la matriz P en una lista de matrices M , de manera que se puedan recuperar los Δ_i para i menor que k . Luego entra en otro bucle en el que recorre los enteros desde $i = 1$ hasta k . El objeto de este bucle es que no sólo basta con tener $\Delta_k(t)$ sino que también necesitamos los Δ_i para saber sobre quien hay que cocientar. Esto es debido a que

$$C_k = \frac{C_1(t)}{\Delta_1(t+k-1)(L_1(t+k-1)) + \cdots + \Delta_{k-1}(t+1)(L_{k-1}(t+1))}.$$

Por tanto lo que hace el algoritmo es concatenar las matrices de los Δ_i anteriores hasta $i = k$, obteniéndose una matriz A de la forma

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \Delta_k(t) & \Delta_1(t+k-1) & \dots & \Delta_{k-1}(t+1) \\ \hline & & & \end{array} \right]$$

Una vez llegados a este punto, primero se encarga de diagonalizar la matriz A y a los elementos de la diagonal los va almacenando en la lista p . Estos van

a ser los polinomios $\chi(t)$. Finalmente calcula el núcleo del morfismo definido por la matriz A , que se expresa como una matriz cuyas columnas son los elementos de la base del núcleo. Este núcleo va a ser de la forma

$$\{(u, v_1, \dots, v_{k-1}) / \Delta_k(t) \cdot u + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta_i(t+k-i) \cdot v_i = 0\}$$

Los elementos que interesan son los u . Por tanto, lo que hace el algoritmo es quedarse con las r_{k-1} primeras filas de la matriz núcleo (donde r_{k-1} es la dimensión de L_{k-1}) y las almacena en C , luego comprime esta matriz eliminando las columnas nulas y el resultado lo almacena en CC . Esta matriz tiene por columnas a los elementos de la base de L_k . Finalmente calcula los elementos de L_k como polinomios y los almacena en la lista L . También almacena en l la dimensión de L_k y define q y bb como los elementos que necesitamos para calcular el siguiente paso.

Traza de un ejemplo

A continuación trazamos un ejemplo que nos ayude a ver mejor el funcionamiento del algoritmo. Consideremos la hipersuperficie definida por $f = x^3 + y^7 + x \cdot y^5$. En este caso los datos de entrada de la función `Final` serían $m = 2$, $b = L_1$, $h = H$, $F = fR + J$, KF . Para este ejemplo ya sabemos por 4.9.1 cual es el resultado que esperamos del algoritmo pero ahora veremos cual es el mecanismo de cálculo. Observemos el algoritmo 1 y sigamos la traza línea a línea.

1-9 Primero se encarga de inicializar las variables necesarias para luego entrar en el bucle `while` con $\kappa = 1$. En las siguientes líneas almacena en las matrices A y B las correspondientes al morfismo $\Delta_1(t)$ y la necesaria para calcular $\Delta_2(t)$. También inicializa una lista de matrices M en la que introduce la matriz A ; $M = [\Delta_1(t)]$.

10,14 Luego entra en el bucle `for`. En este caso $i = \kappa = 1$ y por tanto entra dentro del primer `if`

- en la línea 12 diagonaliza la matriz A y la almacena en D ,
- en la 13 almacena la lista p los elementos de la diagonal de D que son distintos de 0 y 1,
- en la 14 calcula el núcleo de A y lo almacena $Kaux$.

15-21 En este ejemplo la matriz A es cuadrada de orden 11 y su núcleo nos da un único vector no nulo por lo tanto entra en el siguiente `if` ya que $Kaux \neq 0$.

- en la línea 16 almacena en C la matriz cuya única columna es el vector de $Kaux$,
- en la 17 considera la matriz CC que en este caso coincide con C . Notar que las columnas de esta matriz definen los vectores de L_2 ,
- en la 18 almacenamos en $intaux$ el número de columnas de CC , que en este caso es 1,
- en la 19 almacenamos en $listaux$ las columnas de CC puestas como vectores en función de L_1 ,
- en la 20 consideramos la matriz $q = CC^t \cdot B$
- en la 21 consideramos bb como $listaux$

Estas dos últimas líneas son necesarias para la próxima iteración ya que $bb = listaux$ es L_2 y q es la matriz necesaria para calcular $\Delta_2(t)$.

23-28 Una vez fuera ya del `if` almacena los datos obtenidos en las listas L y l , en este ejemplo nos quedaría $L = \{L_1, L_2\}$ y $l = \{11, 1\}$.

34,35 Dado que no tenemos que entrar en ningún `else` puesto que ya entramos en todos los `if` llegamos a la línea 34 donde sumamos un entero a κ y volvemos al principio de bucle `while` en la línea 6.

- 6-9
- en la línea 7 consideramos ahora $A = \Delta_2(t)$,
 - en la 8 almacenamos A en la lista M que queda $M = \{\Delta_1(t), \Delta_2(t)\}$,
 - en la 9 almacenamos en B la matriz necesaria para calcular el $\Delta_3(t)$.

10-31 Entramos en el bucle `for`, esta vez con $\kappa = 2$, y empezamos con $i = 1$. Por tanto saltamos el primer `if` y nos vamos directamente al `else` de la línea 29.

- en la línea 30 lo que hacemos es almacenar en la matriz Aux la matriz de $\Delta_1(t + 1)$, para ello considera la matriz de $\Delta_1(t)$ almacenada en M y sustituir t por $t + 1$,
- en la 31 redefine la matriz A pero concatenándole a su derecha la matriz Aux , de manera que $A = [\Delta_2(t), \Delta_1(t + 1)]$.

32,33 Llegamos al fin del `if` y al fin del `for` y volvemos al principio del bucle en la línea 10.

10-14 Pero esta vez $i = 2$ por que entramos en el `if` de la línea 11.

- en la línea 12 diagonaliza la matriz A y la almacena en D , a pesar de que en este caso no sea una matriz cuadrada
- en la 13 almacena la lista p los elementos de la diagonal de D que son distintos de 0 o 1,
- en la 14 calcula el núcleo de A y lo almacena $Kaux$.

15-25 En este caso $Kaux = 0$ por tanto pasa al `else` de la línea 22.

- en la línea 23 pone la variable de control fin igual a 1 puesto que el llegar a este punto significa que el $\Delta_2(t)$ es ya un isomorfismo puesto que su núcleo es cero.
- en las 24 y 25 pone $intaux = 0$ y $listaux$ igual a vacío ya que como $\Delta_2(t)$ es isomorfismo $L_3(t) = 0$.

26-28 una vez fuera del `if` almacena los datos obtenidos en las listas L y l , en este ejemplo nos quedaría $L = \{L_1, L_2, L_3 = 0\}$ y $l = \{11, 1, 0\}$.

34,35 Finalmente sale del bucle `for`, suma un entero a κ y sale definitivamente del bucle `while` ya que la variable de control fin es 1 pero también porque $\kappa = 3 > 2 = m$.

36 Esta última línea es la que se encarga de devolver el resultado.

Bibliografía

- [AGLV] V. I. ARNOL'D, V. V. GORYUNOV, O. V. LYASHKO, V. A. VASIL'EV, *Singularity Theory I*. Springer-Verlag, 1998.
- [AV] AVRAMOV, L., VIGUÉ, M., *Hochschild homology criteria for smoothness*, International Mathematics Research Notices **1**, 17–25 (1992).
- [BS] BRIANÇON, J., SKODA, H., *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de \mathbb{C}^n* , C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **278**, 949–951,(1974).
- [BACH] BUENOS AIRES CYCLIC HOMOLOGY GROUP, *Cyclic homology of hypersurfaces*, J. Pure and App. Algebra **83**, 205–218 (1992).
- [CBACH] BUENOS AIRES CYCLIC HOMOLOGY GROUP, *A Hochschild homology criterium for the smoothness of an algebra*, Comment. Math. Helv. **69**, 163–168 (1994).
- [BV] BURGHELEA, D., VIGUÉ-POIRRIER, M., *Cyclic homology of commutative algebras. I*. Algebraic topology—rational homotopy (Louvain-la-Neuve, 1986), 51–72, Lecture Notes in Math. **1318**, Springer, Berlin 1988.
- [Cor1] CORTIÑAS, G., *Infinitesimal K-theory*, J. reine angew. Math. **503**, 129–160 (1998).
- [Cor2] CORTIÑAS, G., *De Rham and infinitesimal cohomology in Kapranov's model for noncommutative algebraic geometry*, Compositio Mathematica **136**, 171–203 (2003).
- [Cor3] CORTIÑAS, G., *On the derived functor analogy in the Cuntz-Quillen framework for cyclic homology*, Algebra Colloquium **5**, 305–328 (1998).

- [Cor4] CORTIÑAS, G., *The obstruction to excision in K -theory and in cyclic homology*, Invent. Math. **454**, 143–173 (2006).
- [CGG] CORTIÑAS, G., GUCCIONE, J.A., GUCCIONE, J.J., *Decomposition of Hochschild and cyclic homology of commutative differential graded algebras*, J. Pure and App. Algebra **83**, 219–235 (1992).
- [CHSW] CORTIÑAS, G., HAESEMEYER, C., SCHLICHTING, M., WEIBEL, C.A. *Cyclic homology, cdh-cohomology and negative K -theory*. Aparecerá en Ann. of Math.
- [CQ] CUNTZ, J., QUILLEN, D., *Excision in periodic bivariant cyclic cohomology*, Invent. Math. **127**, 67–98 (1997).
- [Eis] EISENBUD, D., *Commutative algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer New York 1995.
- [Emm] EMMANOUIL, I., *The cyclic homology of affine algebras*, Invent. Math. **121**, 1–19 (1995).
- [FT] FEIGIN, B.L., TSYGAN, B.L., *Additive K -theory and crystalline cohomology*, Funct. Anal. Appl. **19**, 124–132 (1985).
- [FT1] FEIGIN, B.L., TSYGAN, B.L., *Additive K -theory. K -theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*, 67–209, Lecture Notes in Math. **1289**, Springer, Berlin 1987.
- [GP] GREUEL, G.M., PFISTER, G., *A Singular introduction to Commutative Algebra*, Springer, Berlin 2002.
- [GPS] G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann. SINGULAR 2.0.3. A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern. <http://www.singular.uni-kl.de>.
- [GRW] GELLER, S., REID, L., WEIBEL, C., *The cyclic homology and K -theory of curves*, J. Reine Angew. Math. **393**, 39–90 (1989).
- [GW1] GELLER, S., WEIBEL, C., $K_1(A, B, I)$, J. Reine Angew. Math. **342**, 12–34 (1983).
- [GW2] GELLER, S., WEIBEL, C., $K(A, B, I)$ II, K -theory **2**, 753–760 (1989).

- [GGRV] GUCCIONE, J. A., GUCCIONE, J. J., REDONDO, M. J., VILLAMAYOR, O. E. , *Hochschild and Cyclic homology on Hypersurfaces* , J. Pure and App. Algebra **83**, 205–218 (1992).
- [Har] HARTSHORNE, R., *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Pub. Math. IHES **45**, 5–99 (1976).
- [Kas] KASSEL, C., *Cyclic homology, Comodules, and Mixed Complex*, J. of Algebra **107**, 195–216 (1987).
- [Lang] LANG, S., *Algebra. Revised third edition*. Springer New York 2002.
- [LT] LIPMAN, J., TEISSIER, B., *Pseudo-Rational local rings and theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals*, Michigan Math J. **28**, 97–116 (1981).
- [Lod] LODAY, J. L., *Cyclic homology*, Springer, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics Vol. **301** (1991).
- [Mac] MCCARTHY, R., *The cyclic homology of an exact category*, J. Pure and App. Algebra **93**, 251–296 (1994).
- [Mic1] MICHLER, R., *Torsion of defferentials of hypersurfaces with isolated singularities*, J. Pure and Appl. Algebra **104**, 81–88 (1995).
- [Mic2] MICHLER, R., *On the number of the torsion module of differentials*, Proc. American Math. Society **129** n. 3, 639–646 (2000).
- [Reid] REID, L., *N-dimensional rings with an isolated singular point having nonzero K_{-N}* , K-theory **1**, 197–205 (1987).
- [Ros] ROSENBERG, J., *Algebraic K-Theory and its Applications*, Springer 1994.
- [Sai] SAITO, K., *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen*, Invent. Math. **14**, 123–142 (1971).
- [Sei] SEIBT, P., *Local Cyclic Homology*, K-Theory **4**, 143–155 (1990).
- [SW] SUSLIN, A., WODZICKI, M., *Excision in algebraic K-theory*, Ann. of Math. **136**, 51–122 (1992).

- [Vig] VIGUÉ-POIRRIER, M., *Cyclic homology of algebraic hypersurfaces*. J. Pure and Appl. Algebra **72**, 95–108 (1991).
- [Vor] T. VORST, *Localization of the K-theory of polynomial extensions*. Math. Ann. **244**, 33–53 (1979).
- [Wei] WEIBEL, C. A., *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, 1994.
- [Wei2] WEIBEL, C. A., *Algebraic K-theory*. Libro en preparación; capítulos disponibles en la página web del autor.
- [Wei3] WEIBEL, C. A., *K-theory and analytic isomorphisms*. Invent. Math. **61**, 177–197 (1980).
- [Wei4] WEIBEL, C. A., *The negative K-theory of normal surfaces*. Duke Math. J. **108**, 1–35 (2001).
- [Wod] WODZICKI, M., *Excision in cyclic homology and in rational algebraic K-theory*, Ann. of Math. **129**, 591–639 (1989).
- [ZS] ZARISKI, O., SAMUEL, P., *Commutative algebra, Vol. I, II*. Van Nostrand, Princeton 1958, 1960.

Índice de Términos

- álgebra
 - de cadenas, 20
 - de tipo finito, 8
 - esencialmente de tipo finito, 8
 - formalmente suave, 17
 - homológicamente regular, 20
 - regular, 8
 - simétrica, 4
 - tensorial, 5
- anillo E -regular, 79
- anillo local, 77
- anillo regular, 79
- caracter de Chern, 90
- cohomología
 - de de Rham, 9
 - infinitesimal, 17
- complejo
 - CW , 82
 - doble mezclado, 11
 - Hochschild, 1
 - mezclado, 10
- cuadrado
 - cartesiano, 85
 - de Milnor, 86
- escisión, 89
- espacio clasificante, 82
- formas diferenciales
 - álgebra de, 7
 - modulo de, 7
- grupo de Grothendieck, 76
- grupo de matrices elementales, 80
- grupo de Picard, 78
- homología
 - cíclica, 13
 - negativa, 12
 - periódica, 11
 - de Hochschild
 - con coef.en M , 93
 - Hochschild, 1
- ideal
 - Jacobiano, 37
- índice de Briançon-Skoda, 57
- índice de ramificación de una curva, 95
- K-teoría
 - infinitesimal, 92
- Lema de Perturbación, 51
- matriz elemental, 79
- Meyer-Vietoris, 90
 - sucesión de, 90
- modelo
 - de cadena, 20
- nilradical, 79
- operador
 - de Connes, 10
- permutación
 - barajada, 6
- producto

barajado, 6
 en la homología HH, 42
 en la homología HN, 48
 fibrado, 85
propiedad $\mathcal{X}^{q,p}$, 36

retracto por deformación, 51
 filtrado, 51

sucesión exacta de Connes, 13

Lista de Símbolos

Los términos de esta lista de símbolos están colocados por orden de aparición en esta memoria. El número que aparece al lado de cada símbolo es el número de la página donde está definido.

- $C_*(A)$ ó $(C_*(A), b)$, 1, complejo de Hochschild.
- $HH_*(A)$, 1, homología de Hochschild.
- $S(V)$, 3, álgebra simétrica del espacio vectorial V .
- $T(V)$, 5, álgebra tensorial del espacio vectorial V .
- $sh_{p,q}$, 6, producto barajado.
- Ω_A^n , 7, A -módulo de n -formas diferenciales.
- Ω_A^* , 7, álgebra de formas diferenciales de A .
- $H_{dR}^*(A)$, 8, cohomología de de Rham.
- $[\ast, \ast]$, 9, conmutador, $[a, b] = a \cdot b + (-1)^{|a| \cdot |b|} b \cdot a$.
- B , 10, operador de Connes.
- (C_*, b, B) , 10, complejo mezclado.
- $\mathcal{CP}(A)$, 10, complejo doble periódico de A .
- $HP_*(A)$, 11, homología cíclica periódica de A .
- $\mathcal{CN}(A)$, 11, complejo doble negativo de A .
- $HN_*(A)$, 12, homología cíclica negativa de A .
- $\mathcal{B}(A)$, 12, complejo mezclado, cociente de $\mathcal{CP}(A)$ entre $\mathcal{CN}(A)$.
- $HC_*(A)$, 12, homología cíclica de A .

- SBI , 13, sucesiones exactas de Connes.
- $Z^n\Omega_A$, 15, núcleo del morfismo $d : \Omega_A^n \rightarrow \Omega_A^{n+1}$.
- $H_{inf}^*(A)$, 17, cohomología infinitesimal de A .
- $(\mathfrak{C}_{p,q}, \partial, d)$, 21, complejo doble en el segundo cuadrante.
- $\hat{\Omega}_\Gamma$, 21, álgebra de cadenas con ideales diferenciales $\hat{\Omega}_\Gamma^{\geq p+1}$.
- \mathfrak{A} , 22, álgebra diferencial definida como $\prod_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\Omega}_\Gamma^{\geq p} \cdot t^p$.
- $H_n^{?p}(A)$, 23, parte de Hodge de índice p de $H_n^?(A)$, donde $?$ puede ser H, C, N o P .
- $\mathcal{X}^{q,p}$, 36, término usado para definir una propiedad de un elemento f .
- $Der(R)$, 37, conjunto de derivaciones del álgebra R .
- $depth_R(I, A)$, 37, profundidad del ideal I de R en el R -módulo A .
- **RD**, 49, abreviación de retracto por deformación.
- $Singf$, 49, conjunto de puntos singulares de f .
- **bs**, 55, índice de Briançon-Skoda.
- $(J : p)$, 56, ideal cociente, coincide con $\{q \in R / q \cdot p \in J\}$.
- $V(I)$, 73, variedad algebraica del ideal I de R .
- $r(I)$, 73, ideal radical de I .
- $Proj(R)$, 77, conjunto de clases de isomorfía de módulos proyectivos finitamente generados sobre R .
- $M_n(R)$, 78, conjunto de matrices de orden n sobre R .
- $GL_n(R)$, 78, grupo de matrices inversibles de orden n sobre R .
- $M(R)$, 79, unión de los $M_n(R)$ para $n \in \mathbb{N}$.
- $GL(R)$, 79, unión de los $GL_n(R)$ para $n \in \mathbb{N}$.
- $Pic(R)$, 80, grupo de Picard de R .
- $Spec(R)$, 80, conjunto de ideales primos de R .

- $e_{i,j}(a)$, 81, matriz elemental.
- $E_n(R)$, 82, subgrupo de $GL_n(R)$ generado por las matrices elementales.
- $E(R)$, 82, unión de los $E_n(R)$ para $n \in \mathbb{N}$.
- $GL_{ab}(R)$, 82, grupo cociente de $GL(R)$ entre $E(R)$.
- BG , 84, espacio clasificante del grupo G .
- $K_n(A)$, 85, n -grupo de K -teoría.
- $Ann_R(A)$, 90, ideal anulador de A en R .
- ch_n , 92, carácter de Chern.
- $K_n^{inf}(A)$, 92, n -grupo de K -teoría infinitesimal de A .
- $HH_n(A, M)$, 95, homología de Hochschild de A con coeficientes en el A -módulo M .