

APROXIMACIONES EFICIENTES PARA PROBLEMAS DE VIBRACIONES EN SISTEMAS FLUIDO-ESTRUCTURA

Mario Scheble^a, Maria Gabriela Armentano^b y Claudio Padra^a

^a*Grupo de Mecánica Computacional, Centro Atómico Bariloche, 8400 Bariloche, Argentina, scheble@cab.cnea.gov.ar; padra@cab.cnea.gov.ar*

^b*Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1428 Buenos Aires, Argentina, garmenta@mate.dm.uba.ar*

Palabras Clave: Vibraciones. Interacción fluido-estructura. Adaptividad hp.

Resumen.

En este trabajo se presenta un algoritmo que calcula eficientemente soluciones de elementos finitos para problemas de vibraciones en sistemas fluido-estructura que tienen una matriz de masas con núcleo de gran dimensión y que tiene intersección con el núcleo de la matriz de masas no nulo.

En este trabajo, hemos diseñado un algoritmo adecuado y eficiente para problemas con esta dificultad. También se ha implementado la versión p de elementos finitos para este problema y se validó con problemas de solución analítica y resultados obtenidos por otros métodos existentes en la bibliografía.

Luego de introducir un estimador *a-posteriori* del error se desarrolló un algoritmo hp-adaptivo adecuado para soluciones con singularidades. Por último, se obtuvieron resultados en un problema de interés en el área de la ingeniería nuclear.

1. INTRODUCCIÓN

En el campo del modelado por el método de elementos finitos ya hace mucho tiempo que se conoce la importancia de desarrollar códigos adaptivos. Para ello es imprescindible desarrollar estimadores *a posteriori* del error. En la bibliografía hay numerosos estimadores para distintos tipos de problemas (ver por ej. (Ainsworth y Oden, 2000; R. Verfürth , 1996, 1989)). En este trabajo se presenta un algoritmo que calcula eficientemente soluciones de elementos finitos para problemas de vibraciones en sistemas fluido-estructura. Consideramos las vibraciones de un conjunto de tubos elásticamente montados e inmersos en un fluido perfecto incompresible, contenidos dentro de una estructura rígida. En el modelo utilizado, suponemos que los tubos son rígidos y solo son admisibles pequeñas oscilaciones del fluido alrededor del estado de equilibrio. Además, el fluido se supone irrotacional, de donde se sigue que el campo de velocidades deriva de una función potencial. Este potencial es solución de un problema de autovalores de tipo Steklov, llamado usualmente *modelo de Laplace*.

En la sección 2 se describirá el modelo continuo; y en la sección 3 introduciremos la discretización por elementos finitos. Como el objetivo es desarrollar adaptividad hp, se presenta la versión p del MEF para el problema modelo. Al discretizar estas ecuaciones por elementos finitos se obtiene un problema matricial de autovalores generalizado donde la matriz de rigidez y la de masas tienen núcleos no nulos y con intersección no nula. Más aún, el rango de la matriz de masas es el doble de los tubos inmersos en los fluidos, en general, mucho menor que la dimensión de la matriz. En esta sección se también se presentará un algoritmo adecuado y eficiente para problemas con esta dificultad.

En la sección 4 se introduce un estimador *a-posteriori* del error y se presenta un algoritmo adaptivo adecuado para soluciones con singularidades. Finalmente, en la sección ?? se comienza validando el código con problemas de solución analítica. Por último, se presentan resultados en problemas de interés para la ingeniería.

2. EL PROBLEMA CONTINUO

El modelo que aquí se presenta puede verse en (Conca y Planchard y Vanninathan , 1995). Consideramos las vibraciones de un conjunto de tubos elásticamente montados e inmersos en un fluido perfecto incompresible, contenidos dentro de una estructura rígida. Suponemos que los tubos son rígidos y solo son admisibles pequeñas oscilaciones del fluido alrededor del estado de equilibrio. Además, el fluido se supone irrotacional, de donde se sigue que el campo de velocidades v deriva de una función potencial ϕ .

2.1. Ecuaciones en el fluido

Por tratarse de un fluido incompresible se tiene

$$\Delta\phi = \operatorname{div} v = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

Si introducimos la hipótesis de pequeñas deformaciones en la ecuación de equilibrio, la misma queda reducida a

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div} \sigma = 0$$

y en virtud de la hipótesis de fluido ideal tenemos que

$$\sigma = -pI$$

En consecuencia, obtenemos

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p \right) = 0$$

de donde se sigue

$$p = c(t) - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2)$$

2.2. Ecuaciones en los sólidos

Ahora pasamos a considerar el movimiento de los sólidos. Supondremos que son sólidos rígidos y elásticamente montados de manera que pueden moverse transversalmente. Entonces, suponiendo que son osciladores armónicos, su ecuación de movimiento es

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} + k_i \mathbf{R}_i = \int_{\Gamma_i} p \mathbf{n} d\Gamma$$

y reemplazando la expresión de p obtenida en (2) obtenemos

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} + k_i \mathbf{R}_i = -\rho \int_{\Gamma_i} \frac{d\phi}{dt} \mathbf{n} d\Gamma \quad (3)$$

2.3. Ecuaciones en las fronteras

Suponemos que en las fronteras se verifican las siguientes condiciones de acople:

$$\text{en } \Gamma_0 \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (4)$$

y,

$$\text{en } \Gamma_i \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} \cdot \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} \cdot \mathbf{n} \quad (5)$$

2.4. Movimiento armónico

Suponemos que

$$\begin{cases} \phi(x, t) = \varphi(x) e^{i\omega t} \\ \mathbf{R}_i(t) = \mathbf{r}_i e^{i\omega t} \end{cases} \quad (6)$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (3) resulta

$$\mathbf{r}_i = -\frac{-i\rho\omega}{k_i - m_i\omega^2} \int_{\Gamma_i} \varphi \mathbf{n} d\Gamma \quad (7)$$

Supondremos también que $k_i = k$ y $m_i = m$ para todo i .

Ahora reemplazando (6) y (7) en las ecuaciones (1), (4), (5) se obtiene que el potencial debe ser solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 & \text{en } \Gamma_0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lambda \left(\int_{\Gamma_j} \varphi \mathbf{n} d\Gamma \right) \mathbf{n} & \text{en } \Gamma_j, \quad \forall j = 1, \dots, J \end{cases}$$

donde Γ_0 es la frontera exterior y Γ_j , $j = 1, \dots, J$ son las fronteras interiores y $\lambda = \frac{\rho_0 \omega^2}{k - m \omega^2}$ con k la rigidez por unidad de longitud, m masa por unidad de longitud y ω es la frecuencia de resonancia (incógnita) del sistema acoplado. Este modelo es conocido como *modelo de Laplace*. La formulación débil de este problema es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } (\varphi, \lambda) \in H^1(\Omega) - \{0\} \times \mathbb{R} \text{ tal que } \forall \psi \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \psi dx = \lambda \sum_{j=1}^J \left(\int_{\Gamma_j} \varphi \mathbf{n} d\Gamma \right) \left(\int_{\Gamma_j} \psi \mathbf{n} d\Gamma \right) \end{array} \right. \quad (8)$$

3. DISCRETIZACIÓN

Dada una triangulación \mathcal{T} del dominio Ω definimos el espacio \mathcal{V} de elementos finitos conformes

$$\mathcal{V} := \{u \in H^1(\Omega) : u|_T \in \mathcal{P}_p(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}\}$$

donde $\mathcal{P}_p := \text{span} \{x^i y^j : i + j \leq p\}$. Observemos que $\dim \mathcal{P}_p = \binom{p+2}{p} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$.

Con estos espacios, resulta que la aproximación por elementos de \mathcal{V} verifica

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } (\varphi_h, \lambda_h) \in \mathcal{V} - \{0\} \times \mathbb{R} \text{ tal que } \forall \psi \in \mathcal{V} \\ \int_{\Omega} \nabla \varphi_h \nabla \psi dx = \lambda_h \sum_{j=1}^J \left(\int_{\Gamma_j} \varphi_h \mathbf{n} d\Gamma \right) \left(\int_{\Gamma_j} \psi \mathbf{n} d\Gamma \right) \end{array} \right. \quad (9)$$

Este problema se puede escribir matricialmente como un problema de autovalores generalizado de la forma

$$KX = \lambda_h MX$$

, donde la matriz de rigidez K y la de masas M tienen núcleos no nulos y con intersección no nula. Más aún, el rango de la la matriz de masas es $2J$, en general, mucho menor que la dimensión de la matriz.

Como K y M tienen la intersección del núcleo de dimensión positiva, podemos realizar las proyecciones ortogonales a la intersección, o por lo que hemos optado, fijamos un nodo de Dirichlet nulo. Esto convierte en inversible a la matriz de rigidez K .

Las matrices por bloques se escriben

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^t & K_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

donde los nodos con subíndices 22 están asociados a la frontera de interfaz. Observemos que la matriz M aún sigue siendo no inversible de rango $2J$. Operando por bloques podemos escribir:

$$(K_{22} - K_{12}^t K_{11}^{-1} K_{12}) X_2 = \lambda_h M_{22} X_2$$

Utilizamos la descomposición LU de la matriz K_{11} en formato ralo para calcular $K_{11}^{-1}K_{12}$. Resolvemos el sistema tantas veces como nodos en la frontera de interfaz. Observemos que la matriz $K_{22} - K_{12}^t K_{11}^{-1} K_{12}$ es llena, pero chica. LLamando

$$A = K_{22} - K_{12}^t K_{11}^{-1} K_{12} \quad \text{y} \quad B = M_{22}$$

escribimos el sistema:

$$AX_2 = \lambda_h B X_2$$

con A y B matrices llenas de orden número de nodos de frontera interfaz, y B semidefinida positiva de rango $2J$.

La matriz B puede diagonalizarse por medio de una matriz ortogonal Q de manera que

$$Q^t B Q = \text{diag} (0, \dots, b_1^1, b_2^1, \dots, b_1^J, b_2^J) = D \quad \text{con } b_i^j \neq 0$$

LLamando $Y_2 = Q^t X_2$ tenemos

$$\tilde{A} Y_2 = (Q^t A Q) Y_2 = \lambda (Q^t B Q) Y_2 = \lambda D Y_2$$

Nuevamente realizamos una descomposición en bloques

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^t & A_{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

siendo $B_{22} = \text{diag} (b_1^1, b_2^1, \dots, b_1^J, b_2^J) \in \mathbb{R}^{2J \times 2J}$. Queda el sistema de $2J \times 2J$:

$$(A_{22} - A_{12}^t A_{11}^{-1} A_{12}) Z_2 = \lambda B_{22} Z_2$$

Una vez obtenido los $2J$ pares de autovalores y autovectores podemos recuperar el autovector del sistema original de la siguiente manera: Sea $Z_1 = -A_{11}^{-1} A_{12} Z_2$. De aquí se puede obtener

$$Y_2 = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos calcular $X_2 = Q Y_2$ y por último $X_1 = -K_{11}^{-1} K_{12} X_2$. Recordando que $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ obtenemos el autovector buscado.

Observemos que hay sólo $2J$ autovalores positivos del problema.

El método matricial expuesto, puede sintetizarse de la siguiente manera: En un primer paso trabajando con matrices ralas, reducimos el problema a otro de matrices llenas de orden número de nodos de la frontera interna. Recién en el segundo paso proyectamos sobre la imagen de la matriz de masas, trabajando con matrices llenas pero pequeñas.

4. ESTIMADOR A POSTERIORI

En esta sección introducimos en primer lugar un indicador del error definido para cada elemento y luego, un estimador del error global. Los indicadores del error nos permitirán ordenar los elementos en orden para saber cuales de ellos tienen concentrado el error, y a partir de esa distribución del error obtener una nueva malla refinando los elementos con más error. El refinamiento se hará con los algoritmos usuales que no permitan que se deteriore la calidad de la malla.

Sea \mathcal{E} el conjunto de lados de la malla y \mathcal{E}_I será el subconjunto de los lados interiores. Para $\ell \in \mathcal{E}$ definimos

$$J_\ell = \begin{cases} \left[\left[\frac{\partial \varphi_h}{\partial n} \right] \right]_\ell & \text{si } \ell \in \mathcal{E}_I \\ \frac{\partial \varphi_h}{\partial n} \Big|_\ell & \text{si } \ell \in \Gamma_0 \\ \frac{\partial \varphi_h}{\partial n} \Big|_\ell - \lambda_h \left(\int_{\Gamma_i} \varphi_h \mathbf{n} d\Gamma \right) \mathbf{n}_\ell & \text{si } \ell \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, J \end{cases}$$

y para cada $T \in \mathcal{T}$ definimos el siguiente indicador del error

$$\eta_T = \left\{ h_T^2 \|\Delta \varphi_h\|_{L^2(T)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\ell \subset \partial T} h_\ell \|J_\ell\|_{L^2(\ell)}^2 \right\}^{1/2}$$

Definimos el siguiente estimador del error global

$$\eta = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2 \right\}^{1/2}$$

El estimador verifica la siguiente acotación global por arriba del error,

$$\|\nabla \varphi - \nabla \varphi_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \eta + h.o.t.$$

donde *h.o.t.* indica términos de mayor orden. Esta estimación muestra que si el estimador, asintóticamente tiende a cero, entonces el error también lo hará. También puede demostrarse una acotación local por abajo del error,

$$\eta_T \leq C_2 \|\nabla \varphi - \nabla \varphi_h\|_{L^2(T^*)} + h.o.t.$$

donde T^* es el conjunto de los elementos de \mathcal{T} que tienen un vértice en común con T . Esta estimación muestra que donde sean grande los indicadores, mayor será el error de la autofunción, y dicho elemento debería refinarse. Las demostraciones de estas desigualdades siguen las ideas desarrolladas en (Durán y Gastaldi y C. Padra , 1999; Durán y Padra y Rodríguez , 2003) y son una variación del trabajo (Armentano y Padra , 2008) Son conocidos algoritmos que no deterioran la calidad de la malla a medida que se realizan los refinamientos (ver (??))

En la sección que sigue se presentan varios ejemplos, en los cuales se ha utilizado el criterio de selección de elementos a ser refinados aquellos elementos T que verifiquen

$$\eta_T \geq 0,5 \eta_{max}$$

donde $\eta_{max} := \max\{\eta_T : T \in \mathcal{T}\}$.

5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 Tubos circulares concéntricos.

En primer lugar presentamos un ejemplo con solución analítica, utilizado para validar el código de cálculo. Se trata de dos tubos circulares concéntricos de radios r_i y r_e , tal como se muestra en la Figura 1.

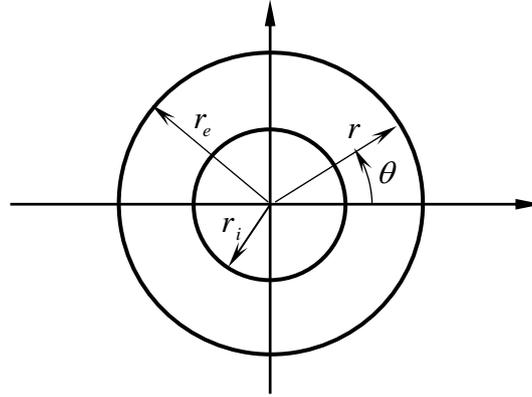


Figura 1. Tubos circulares concéntricos

Resolviendo la ecuación de Laplace por separación de variables en coordenadas polares, e imponiendo las condiciones de borde en la frontera del dominio anular, puede demostrarse que el problema tiene un único autovalor doble

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\pi} \frac{r_e^2 - r_i^2}{r_i^2 (r_e^2 + r_i^2)}.$$

El subespacio asociado está generado por las siguientes autofunciones ortogonales

$$\begin{cases} \varphi_1(r, \theta) = \left(r + \frac{r_e^2}{r} \right) \cos \theta \\ \varphi_2(r, \theta) = \left(r + \frac{r_e^2}{r} \right) \sin \theta \end{cases}$$

Empleando el código desarrollado, calculamos la solución para el caso particular $r_i = 1$, $r_e = 3$, utilizando una malla uniforme de 25796 nodos y 50838 elementos. Para el caso $p = 2$ (elementos cuadráticos), con un número total de 102429 incógnitas, el valor obtenido para los dos autovalores fue $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.25465$, mientras que el valor exacto es $\lambda_{exacto} = 0.25475$.

En la Figura 2 se muestran los mapas de zonas de nivel de la función potencial de los campos de velocidades correspondientes a los dos modos normales calculados. Un esquema vectorial de dichos campos se presenta la Figura 3 y en la Figura 4, en las que \mathbf{r} es el vector que indica la parte espacial del desplazamiento transversal del tubo interior, calculado como se indica en la ecuación (7). Finalmente, la Figura 5 ofrece un gráfico tridimensional de la función potencial de ambos modos normales, debiendo

tenerse en cuenta que se ha utilizado una perspectiva diferente a la orientación de los gráficos anteriores, para facilitar su visualización.

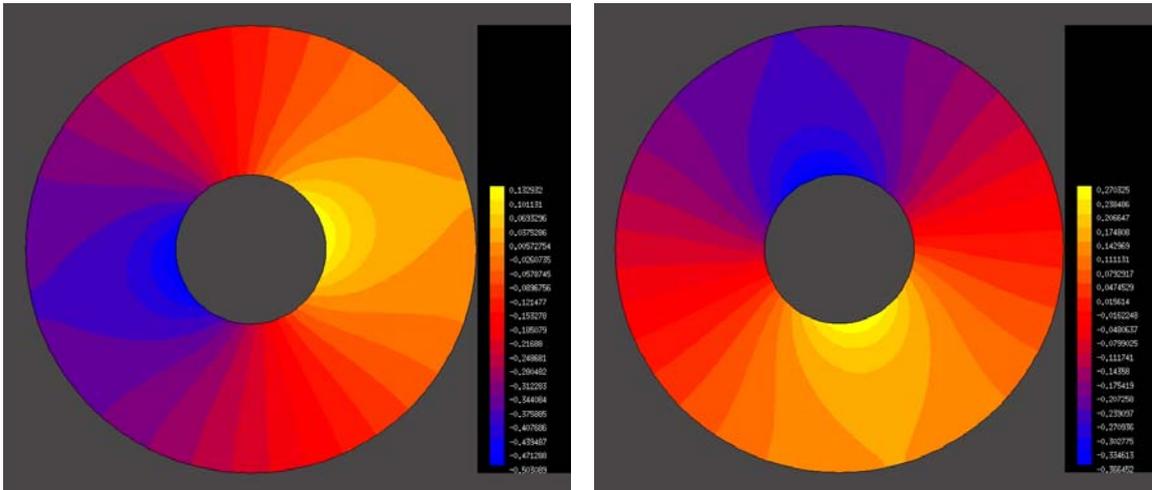


Figura 2. Zonas de nivel de las autofunciones 1 y 2.

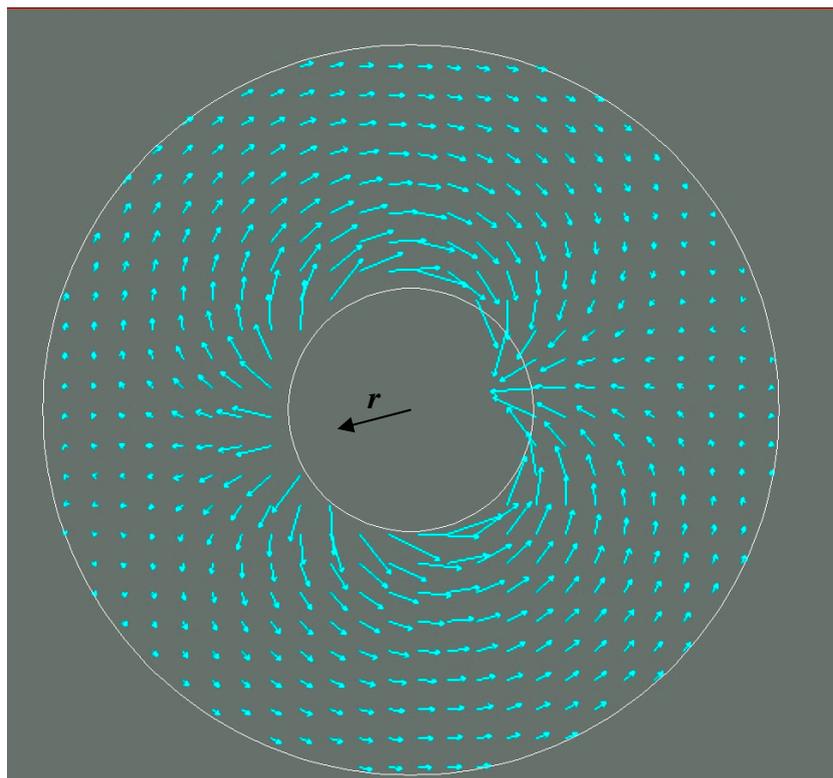


Figura 3. Campo de velocidades del modo normal 1.

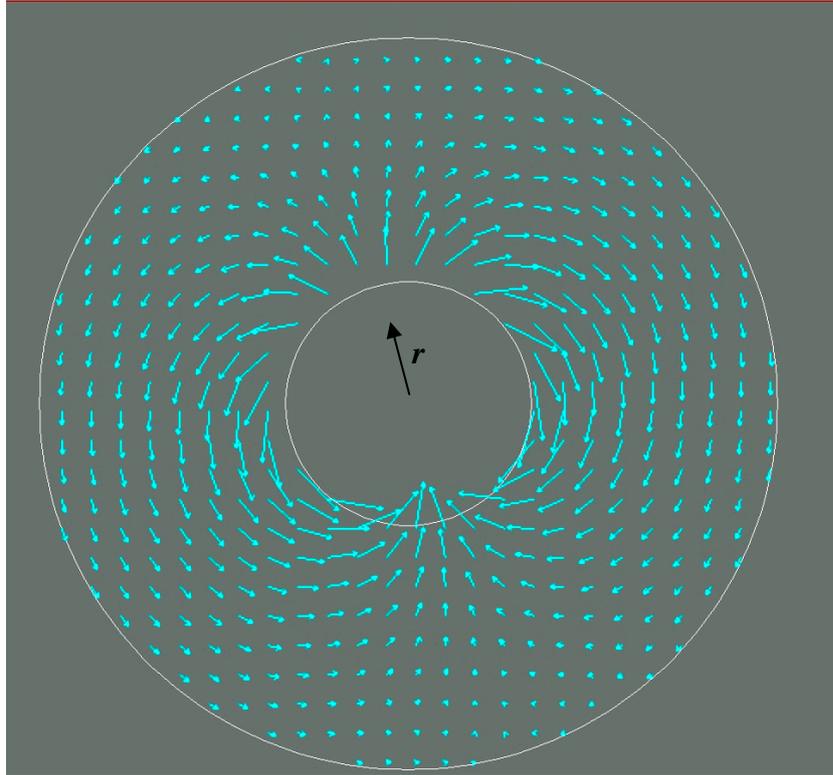


Figura 4. Campo de velocidades del modo normal 2.

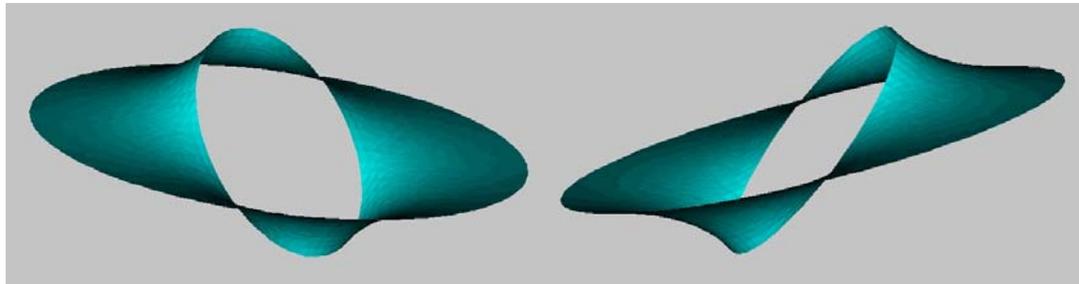


Figura 5. Gráfico tridimensional de las autofunciones.

5.2 Cavity rectangular con dos tubos cuadrados.

Como ejemplo de problema con singularidades, presentamos el caso de una cavidad rectangular con dos tubos cuadrados de las dimensiones que se muestran en la Figura 6. Este problema fue resuelto con una malla uniforme y luego haciendo adaptividad h con p constante en todos los elementos.

5.2.1 Resolución con una malla uniforme

La Tabla 1 muestra los autovalores calculados utilizando $p=3$ con una malla uniforme de 16799 nodos y 32768 elementos, lo que produce un sistema con un total de 148702 incógnitas.

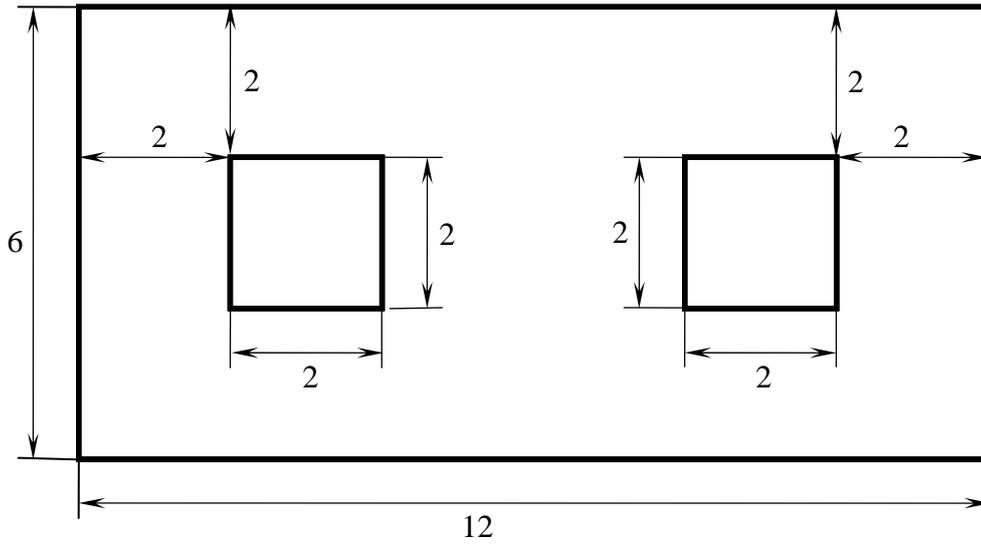


Figura 6. Cavity rectangular con dos tubos cuadrados.

Modo	Autovalor
1	0.1647278
2	0.1647278
3	0.1669340
4	0.1868538

Tabla 1. Autovalores del sistema.

Las zonas de nivel de las correspondientes autofunciones se presentan en la Figura 7 y en la Figura 8, y los campos de velocidades desde la Figura 9 hasta la Figura 12.

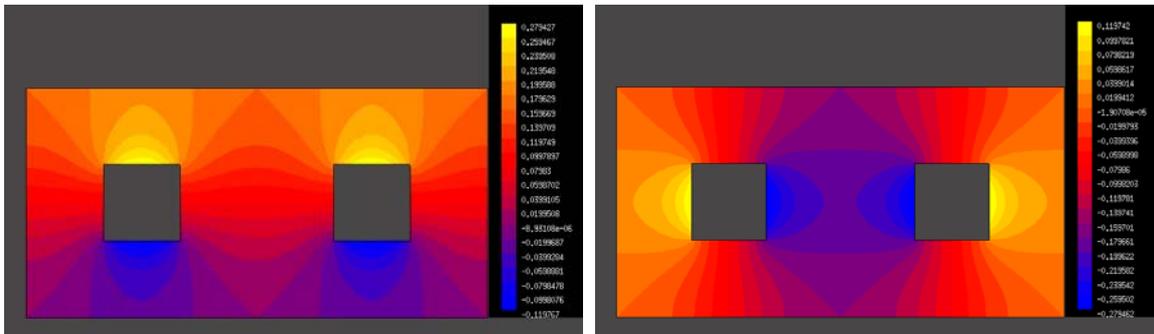


Figura 7. Zonas de nivel para las autofunciones 1 y 2.

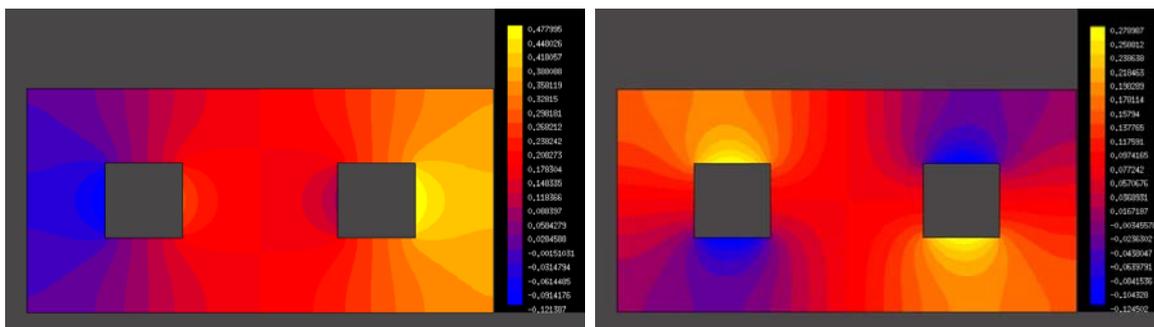


Figura 8. Zonas de nivel para las autofunciones 3 y 4.

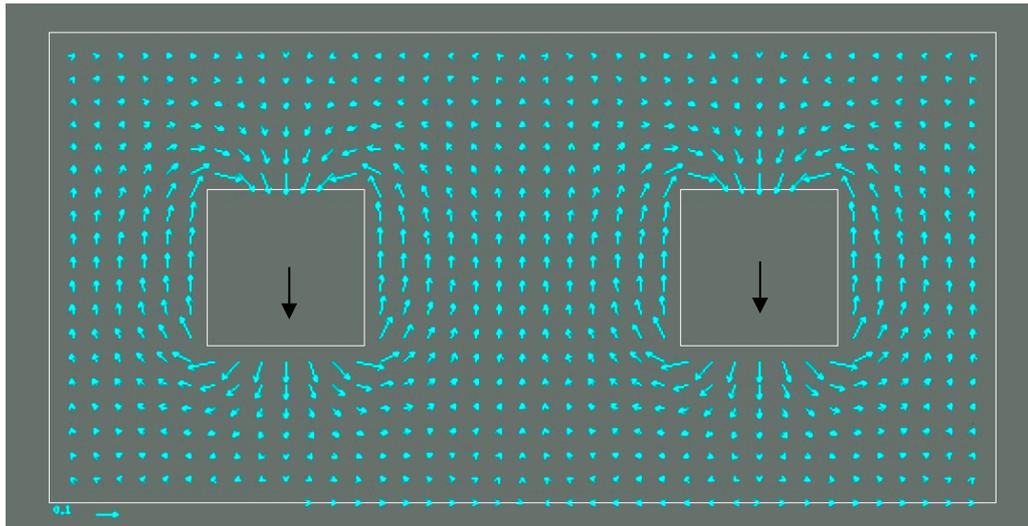


Figura 9. *Campo de velocidades del modo normal 1.*

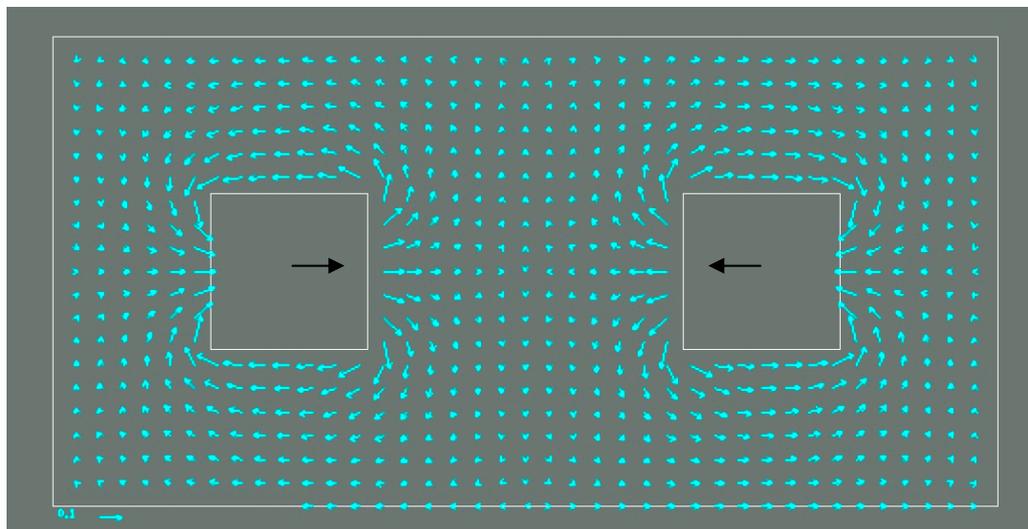


Figura 10 *Campo de velocidades del modo normal 2.*

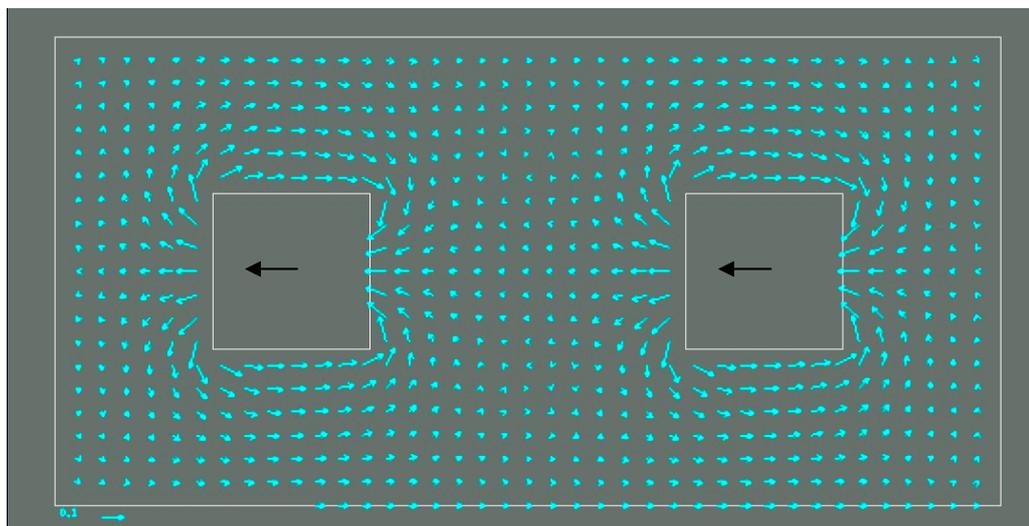


Figura 11 *Campo de velocidades del modo normal 3.*

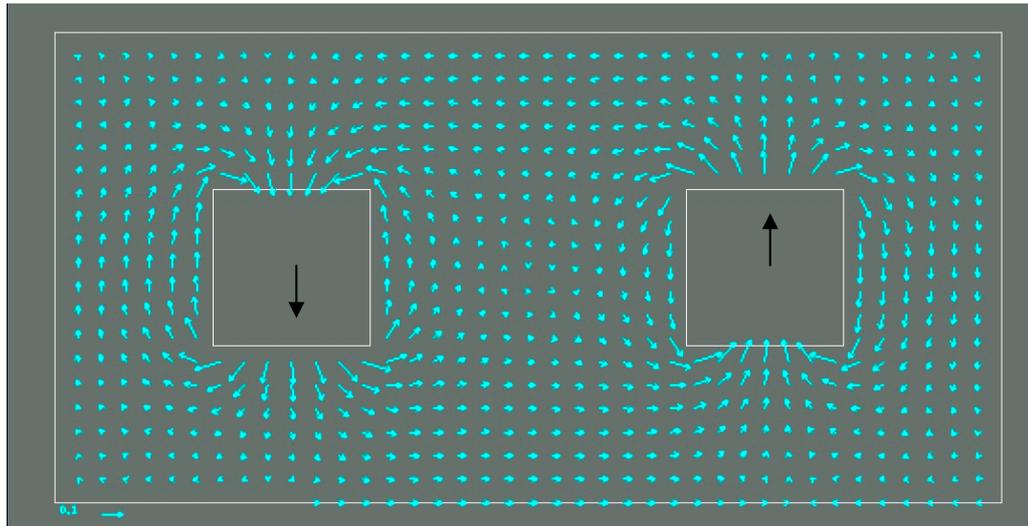


Figura 12 Campo de velocidades del modo normal 4.

5.2.2 Adaptividad h con p constante.

Como ejemplo de adaptividad, se calcularon el primer autovalor y autofunción del mismo problema, partiendo de una malla uniforme con pocos elementos y refinando en cada paso los triángulos con un error superior al 50% del error máximo. El valor de p se fijó igual a 2 para todos los elementos.

La Tabla 2 muestra la convergencia del primer autovalor en función del número de elementos e incógnitas, para cada paso de adaptividad. La Figura 13 ilustra el refinamiento sucesivo de la malla cerca de las esquinas de los tubos interiores. Puede observarse una densificación mayor en la proximidad los vértices ubicado a 90° de la dirección de desplazamiento transversal de los tubos.

Paso	Autovalor 1	Nº de elementos	Nº de incógnitas
0	0.175693	128	306
1	0.168995	240	538
2	0.166567	352	770
3	0.165625	464	1002
4	0.165078	632	1346
5	0.164865	824	1746
6	0.164808	936	1978
7	0.164768	1142	2406
8	0.164693	1568	3284
9	0.164668	1576	3674
10	0.164654	3162	4494

Tabla 2. Convergencia de λ_1 en función del refinamiento de la malla

De la comparación con la Tabla 1 surge que con tan sólo 3284 grados de libertad se mejora la estimación del autovalor obtenida con 148702 incógnitas, utilizando una malla uniforme.

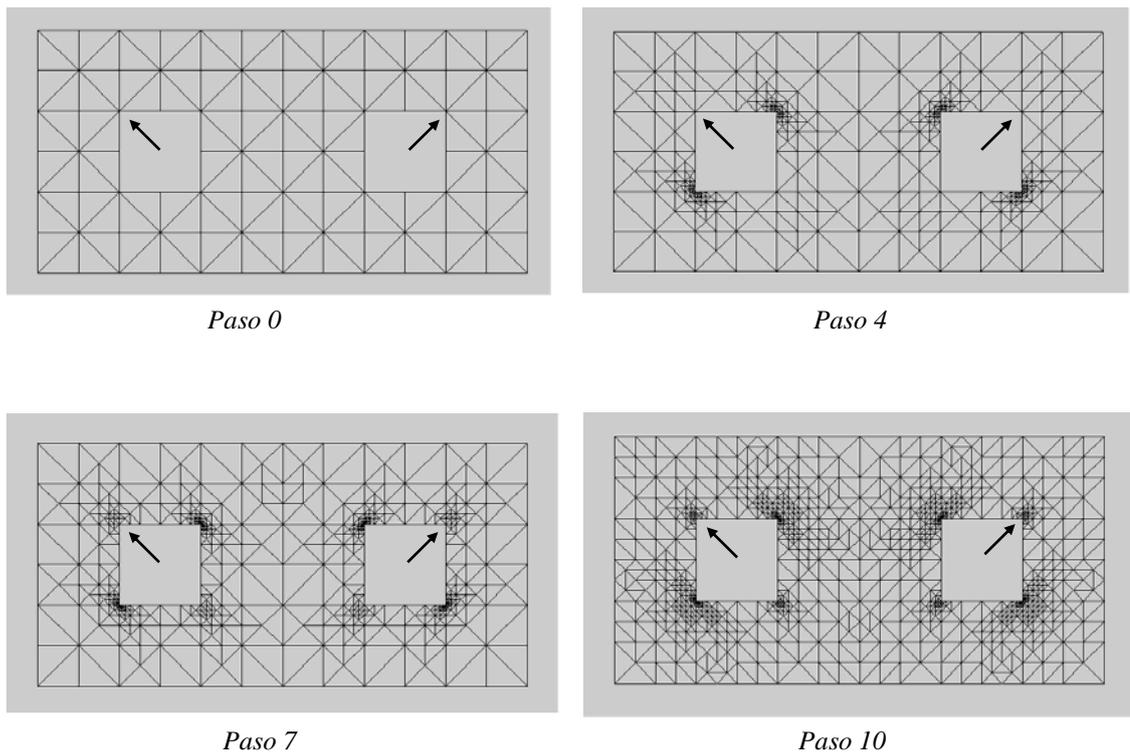


Figura 13. Refinamientos sucesivos de la malla.

5.2.3 Orden de convergencia.

Finalmente, repetimos el cálculo del primer autovalor con $p=1$, partiendo de la misma malla. El objetivo era ver si el proceso adaptivo recupera el orden h de convergencia que la teoría predice para mallas uniformes en el caso de problemas regulares.

Paso	Error Estimado (e)	Nº de incógnitas (n)
0	7.634e-1	88
1	5.317e-1	124
2	4.033e-1	204
3	3.368e-1	308
4	2.805e-1	436
5	2.530e-1	566
6	1.907e-1	982
7	1.718e-1	1230
8	1.421e-1	1815
9	1.211e-1	2489
10	9.664e-2	3860

Tabla 3. Error vs. Nº de incógnitas

En la Tabla 3 se muestra el error calculado con el estimador a posteriori en cada paso de refinamiento en función del número de incógnitas del sistema. En la Figura 14 graficamos estos datos en escala logarítmica, y realizamos un ajuste lineal de los puntos obtenidos. La pendiente de la recta resulta de -0.51533 , lo que indica un orden aproximado h de convergencia.

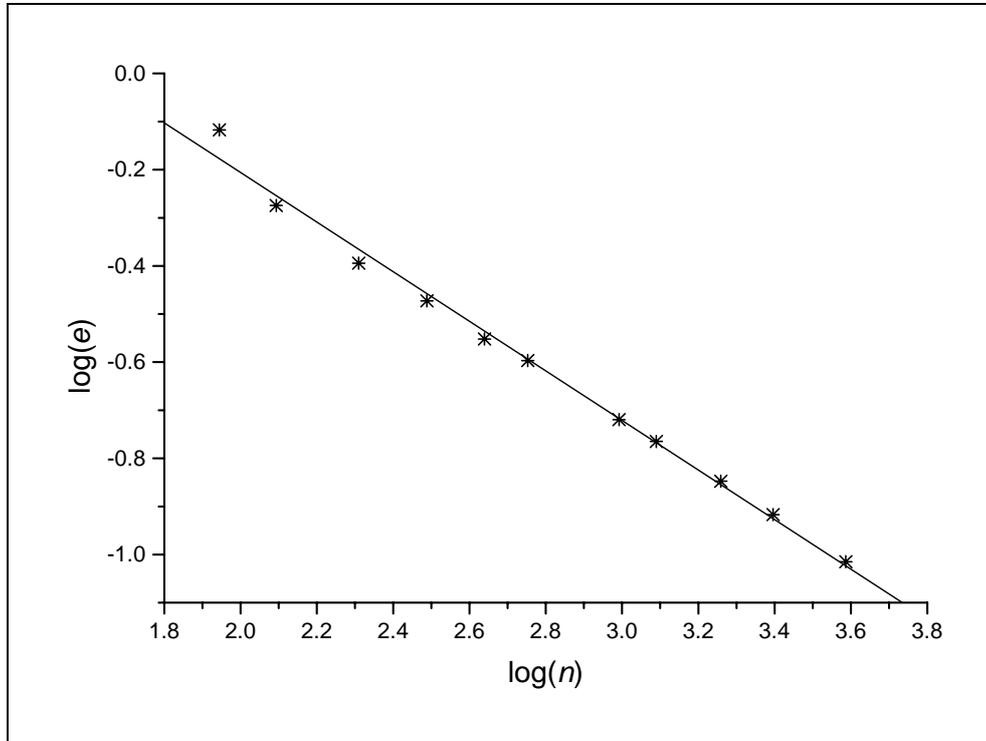


Figura 14. Convergencia del error en función del número de incógnitas.

6 CONCLUSIONES

Se desarrolló un código de cálculo para resolver en forma adaptiva problemas de interacción fluido-estructura en 2D utilizando el método de elementos finitos, versión p . Se implementó la versión h de adaptividad, con p arbitrario, pero constante en todos los elementos.

El código incorpora un algoritmo que permite atacar eficientemente las dificultades que surgen en la resolución de sistemas generalizados de autovalores con matrices de masa con núcleo de dimensión muy grande, e intersección no nula con el núcleo de la matriz de rigidez, situación característica en este tipo de problemas físicos.

El código se validó con un problema regular con solución analítica. El algoritmo adaptivo mostró ser muy eficiente cuando se aplica a problemas singulares utilizando $p > 1$. Por otro lado, en el caso $p = 1$, se constató numéricamente que se recupera el orden h de convergencia que la teoría predice para problemas regulares con mallas uniformes.

REFERENCIAS

- M. Ainsworth y J. T. Oden A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. *Wiley*, 2000.
- G. Armentano y C. Padra A Posteriori Error Estimates For The Steklov Eigenvalue Problem. *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 58 , 5, 593-601, 2008.
- C. Conca, J. Planchard y M. Vanninathan *Fluid and periodic Structures*, John Wiley & Sons, NY, 1995.
- R. Durán, C. Padra y R. Rodríguez *A posteriori error estimates for the finite element approximation of eigenvalue problems*, *Math. Mod. & Met.in Appl. Sc. (M³AS)*, vol 13, no 8, pp 1219-1229, 2003.
- R. G. Durán, L. Gastaldi y C. Padra *A posteriori error estimators for mixed approximations of eigenvalue problems*, *Math. Mod. & Met.in Appl. Sc. (M³AS)*, vol 9, no 8, pp 1165-1178, 1999.
- R M. C. Rivara *Mesh refinement processes based on the generalized bisection of simplices*, *SIAM J. Numer. Anal.*,**21** (1984) 604–613.
- RV M. C. Rivara, M. J. Vénere, Cost analysis of the longest-side refinement algorithm for triangulations *Eng. Comput.* **12** (1996) 224–234.
- R. Verfürth A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques (Wiley & Teubner, 1996).
- R. Verfürth A posteriori error estimates for nonlinear problems *Math. Comp.* 62 (1989) 445–475.