

# Topología

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2005

## PRÁCTICA 8

### Revestimientos.

- 1) Probar que si  $p : E \rightarrow B$  es un revestimiento, entonces es una aplicación abierta.
- 2) Probar que si  $p : E \rightarrow B$  y  $p' : E' \rightarrow B'$  son revestimientos, entonces  $p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$  es un revestimiento.
- 3) Sea  $Y$  un espacio topológico discreto. Probar que dado  $X$  cualquier espacio topológico, la proyección en la primer coordenada  $p : X \times Y \rightarrow X$  es un revestimiento.
- 4) Probar que  $p : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow S^1$  definida por  $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$  es un homeo local pero no es revestimiento.
- 5) Verificar que los siguientes son revestimientos.
  - a)  $p : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $p(x) = x^n$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .
  - b)  $p : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  la proyección al espacio proyectivo real de dimensión  $n$ .
- 6) a) Sea  $p : E \rightarrow B$  un revestimiento, y sea  $B' \subset B$ . Sea  $E' = p^{-1}(B')$ . Probar que  $p|_{E'} : E' \rightarrow B'$  es un revestimiento.  
b) Sea  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{Z} \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\}$  y sea  $B = \{(z, w) \in S^1 \times S^1, z = 1 \text{ ó } w = 1\}$  (donde  $S^1$  lo vemos como subespacio de  $\mathbb{C}$ ). Probar que  $p : E \rightarrow B$  definida por  $p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$  es un revestimiento.
- 7) Sea  $p : E \rightarrow B$  un revestimiento, con  $B$  conexo. Probar que si  $p^{-1}(b_0)$  tiene  $k$  elementos para algún  $b_0 \in B$ , entonces  $p^{-1}(b)$  tiene  $k$  elementos para todo  $b \in B$ . En ese caso se dice que  $p : E \rightarrow B$  es finito y que tiene grado  $k$ , o que es un revestimiento con  $k$ -hojas.
- 8) Sean  $p : X \rightarrow Y$  y  $q : Y \rightarrow Z$  revestimientos.
  - a) Probar que si  $q^{-1}(z)$  es finito para cada  $z \in Z$ , entonces  $q \circ p : X \rightarrow Z$  es un revestimiento.
  - b) Probar que el teorema falla si  $q^{-1}(z)$  no es finito.
- 9) Sea  $p : E \rightarrow B$  un revestimiento. Supongamos que  $B$  es conexo y localmente conexo. Mostrar que si  $C$  es una componente de  $E$ , entonces  $p|_C : C \rightarrow B$  es un revestimiento.
- 10) Sea  $X$  un  $G$ -espacio tal que la acción es propiamente discontinua. Probar que la proyección  $p : X \rightarrow X/G$  es un revestimiento.  
Observar que el revestimiento usual  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  es un ejemplo de esta construcción. Encuentre en esta práctica otros ejemplos.

- 11) a) Sea  $X$  simplemente conexo y localmente arco conexo y sean  $f, g : X \rightarrow S^1$ . Probar que  $f$  y  $g$  son homotópicas.
- b) Probar que toda función continua del plano proyectivo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  a  $S^1$  es null homotópica ( $n \geq 2$ ).
- c) Probar que no existe  $f : S^n \rightarrow S^1$  que preserve antípodas ( $n \geq 2$ ).  
(Sugerencia: una tal  $f$  induce una función  $\bar{f} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow S^1$  que aplica el elemento no nulo de  $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$  en un elemento no nulo.)
- 12) Consideremos el toro  $T = S^1 \times S^1$ . Sabemos que su grupo fundamental es  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , y que su revestimiento universal es el producto de dos copias del revestimiento universal de  $S^1$ . Dados los siguientes subgrupos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  hallar el revestimiento correspondiente.
- a) El subgrupo generado por el elemento  $(1, 0)$ .
- b) El subgrupo generado por el elemento  $(1, 1)$ .
- c) El subgrupo  $H = \{(2n, 2m) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ .
- 13) \* Sea  $p : E \rightarrow X$  un revestimiento, con  $X, E$  arco conexos. Sea  $x_0 \in X$  y denotemos  $F = p^{-1}(x_0)$  la fibra sobre  $x_0$ ,  $\pi = \pi_1(X, x_0)$  el grupo fundamental y  $G$  el grupo de automorfismos de  $p : E \rightarrow X$  (aplicaciones continuas  $E \rightarrow E$  que conmutan con  $p$ ). Para cada  $g \in G$  denotamos  $\rho(g) : F \rightarrow F$  la restricción de  $g$  a  $F$ .
- Demostrar:
- a)  $\rho : G \rightarrow \mathbb{S}(F)$  es un morfismo de grupos inyectivo de  $G$  en el grupo simétrico de  $F$ . Sea  $\mu : \pi \rightarrow \mathbb{S}(F)$  el morfismo de monodromía (definido en clase vía levantamiento de lazos). Entonces las correspondientes acciones de  $G$  y  $\pi$  en  $F$  conmutan.
- b) La acción de  $G$  en  $F$  tiene estabilizadores triviales (o sea,  $g.e = e$  implica  $g = 1$ ). Deducir que  $|G| \leq |F|$ .
- c) Dar ejemplos de revestimientos finitos con  $|G| = |F|$  (numero máximo de automorfismos) y de revestimientos con  $|G| = 1$  (no triviales).  
Se dice que  $p : E \rightarrow X$  es un *revestimiento normal* (o *regular*, o *de Galois*) si la acción de  $G$  en  $F$  es transitiva.
- d) Un revestimiento finito es normal si y sólo si  $|G| = |F|$ .
- e) Sea  $e_0 \in F$  y denotemos  $H = p_*\pi_1(E, e_0) \subset \pi$ . Entonces  $p : E \rightarrow X$  es un revestimiento normal si y sólo si  $H$  es un subgrupo normal de  $\pi$ .
- f) Sea  $N(H) = \{[\sigma] \in \pi/[\sigma].H = H.[\sigma]\}$  el normalizador de  $H$ . Demostrar que los grupos  $N(H)/H$  y  $G$  son isomorfos.  
Sugerencia: Definir un morfismo sobreyectivo  $N(H) \rightarrow G$  con núcleo  $H$ . Puede ser conveniente demostrar f) en primer lugar y luego deducir los puntos anteriores.
- 14) Sea  $X$  un  $G$ -espacio arco-conexo, donde la acción de  $G$  en  $X$  es propiamente discontinua. Probar que el revestimiento  $p : X \rightarrow X/G$  es normal.  
(Sugerencia: considerar las multiplicaciones por elementos de  $G$ .)

- 15) Sea  $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$  el revestimiento usual del toro. Describir el grupo de automorfismos de  $p$ .
- 16) \* Sea  $P_d$  el conjunto de polinomios mónicos de grado  $d$  con coeficientes complejos en una variable, provisto de la topología inducida por la biyección  $P_d \cong \mathbb{C}^d$  que asigna a un polinomio sus coeficientes, donde por supuesto damos a  $\mathbb{C}$  la topología usual. Sea  $R_d = \{(f, t) \in P_d \times \mathbb{C} / f(t) = 0\}$  (con la topología de subespacio del producto) y denotemos  $p_1 : R_d \rightarrow P_d$  la primera proyección. Sea  $X \subset P_d$  el conjunto de los polinomios con raíces simples (o sea, sin raíces múltiples) y denotemos  $p : E = p_1^{-1}(X) \rightarrow X$  la restricción de  $p_1$ .

Demostrar:

- a)  $X$  es un abierto denso conexo.

Sugerencia:  $X = P_d - (\Delta = 0)$ , donde  $\Delta$  es el discriminante.

- b)  $E$  es conexo.

- c)  $p$  es un revestimiento de grado  $d$ .

- d) El grupo de automorfismos de  $p$  es  $\{1\}$ .

- e) El morfismo de monodromía  $\pi_1(X) \rightarrow \mathbb{S}_d$  es sobreyectivo.

- f) Reemplazar  $\mathbb{C}$  por  $\mathbb{R}$  y pensar cuáles son las modificaciones que corresponde hacer.

Referencia: J. Harris, Galois groups of enumerative problems, Duke Mathematical Journal, vol. 46 (1979).

- 17) **Existencia de clausura normal.** Sea  $p : E \rightarrow X$  un revestimiento. Existe un único (salvo isomorfismo) revestimiento normal  $\bar{p} : \bar{E} \rightarrow X$  tal que:

- a)  $\bar{p} \geq p$  (o sea, existe  $q : \bar{E} \rightarrow E$  morfismo de revestimientos)

- b) Si  $p' : E' \rightarrow X$  es normal y  $p' \geq p$  entonces  $p' \geq \bar{p}$

Ademas, si  $H$  es el subgrupo (salvo conjugación) de  $\pi$  correspondiente a  $p$ , ¿cuál es el subgrupo correspondiente a  $\bar{p}$ ?