

Topología

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2005

PRÁCTICA 6

Notaciones Varias.

* el conjunto con un único elemento

$I = [0, 1]$ con la topología usual

$\mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ es continua}\}$

$[X, Y]$ el conjunto de clases de homotopía de funciones continuas de X a Y , es decir

$$[X, Y] = \{[f] : f : X \rightarrow Y \text{ es continua}, [f] = [g] \text{ sii } f \simeq g\} = \mathcal{C}(X, Y) / \simeq$$

Espacios de funciones.

Sean X e Y espacios topológicos. Queremos definir una topología en el espacio $\mathcal{C}(X, Y)$, que verifique las siguientes condiciones:

- La función evaluación $e : \mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y$ definida por $e(f, x) = f(x)$ es continua.
- Para todo espacio topológico Z y toda función continua $h : Z \times X \rightarrow Y$, la función $\hat{h} : Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ definida por $\hat{h}(z)(x) = h(z, x)$ es continua.

A una tal topología la llamaremos topología *exponencial*. Observar que no tiene porque existir.

- 1) Probar que si la topología exponencial existe, entonces es la menor topología que hace continua a la evaluación.

Sugerencia: Considerar \hat{e} .

- 2) Supongamos que tenemos una topología \mathcal{T} en $\mathcal{C}(X, Y)$ tal que la evaluación es continua. Probar que entonces para todo abierto $U \subset Y$ y todo cuasi-compacto $K \subset X$ el conjunto $S(K, U) = \{f : X \rightarrow Y : f(K) \subset U\}$ es abierto para \mathcal{T} .

Sugerencia: Si $f \in S(K, U)$, entonces $\{f\} \times K \in e^{-1}(U)$. Usar entonces el lema del tubo.

- 3) Probar que la familia de conjuntos $S(K, U)$ con $K \subset X$ cuasi-compacto y $U \subset Y$ abierto forman una subbase para una topología. Esta topología se llama la topología *compacto abierta*. Deducir que si la evaluación es continua tomando en $\mathcal{C}(X, Y)$ la topología compacto abierta, entonces la topología exponencial existe y es la compacto abierta.
- 4) Probar que si X es localmente cuasi-compacto (recordar: todo entorno de x contiene un entorno cuasi-compacto), entonces la evaluación es continua si en $\mathcal{C}(X, Y)$ consideramos la topología compacto abierta.

- 5) Sean $p : X \rightarrow Y$ un cociente y Z un espacio localmente cuasi-compacto. Probar que la función $p \times i : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ definida por $p \times i(x, z) = (p(x), z)$ es un cociente.

Sugerencia: Probar que para toda $\varphi : Y \times Z \rightarrow W$ se tiene φ es continua si y sólo si $\psi = \varphi \circ (p \times i)$ lo es. Pero ψ es continua si y sólo si $\widehat{\psi}$ lo es. Como $\widehat{\psi} = \widehat{\varphi} \circ p$, y p es cociente, $\widehat{\psi}$ es continua si y sólo si $\widehat{\varphi}$ lo es y esta última es continua si y sólo si φ lo es.

Homotopía de funciones continuas.

- 6) Sean X, Y espacios topológicos, con X localmente cuasi-compacto. Sea $H : X \times I \rightarrow Y$ una homotopía. Entonces $\hat{H} : I \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ es una función continua si en $\mathcal{C}(X, Y)$ consideramos la topología compacto abierta. En particular si $X = I$, las homotopías de caminos son curvas continuas de caminos.
- 7) Si X es un espacio topológico definimos $\pi_0(X) = [*, X]$, donde $*$ es el conjunto con un sólo elemento. Probar que $\pi_0(X)$ es el conjunto de componentes arco-conexas de X .
- 8) Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea $\Omega X = \{\alpha : I \rightarrow X, \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$ con la topología del subespacio de la compacto abierta. Probar que $\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega X)$ (igualdad de conjuntos).
- 9) Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexo. Mostrar que dos caminos con los mismos extremos son homotópicos.
- 10) a) Sea $I = [0, 1]$. Mostrar que para cualquier X , el conjunto $[X, I]$ consta de un único elemento.
b) Mostrar que si Y es arco-conexo, el conjunto $[I, Y]$ consta de un único elemento.
- 11) Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Decimos que f es *nulhomotópica* si f es homotópica a una función constante. Decimos que un espacio X se dice *contráctil* si la función identidad $i_X : X \rightarrow X$ es nulhomotópica.
a) Mostrar que I y \mathbb{R} son contráctiles.
b) Mostrar que un espacio contráctil es arco-conexo.
c) Mostrar que si Y es contráctil, entonces para todo X el conjunto $[X, Y]$ tiene un único elemento.
d) Mostrar que si X es contráctil, entonces $[X, Y] = \pi_0(Y)$. Deducir que si X es contráctil e Y es arco-conexo, el conjunto $[X, Y]$ tiene un único elemento.
- 12) Sea X el peine

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1, x = 0 \text{ ó } x = 1/n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, y) / y = 0, 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

Probar que X es contráctil.

Sugerencia: Primero contraer el peine al eje x . Luego contraer el eje x al origen.

Grupo fundamental

- 13) Sea X espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea S^1 la circunferencia y sea $a \in S^1$ un punto cualquiera. Sea

$$[(S^1, a), (X, x_0)] = \{[f] : f : S^1 \rightarrow X \text{ es continua y } f(a) = x_0\}$$

donde $[f] = [g]$ si f es homotópica a g a través de una homotopía H que verifica $H(a, t) = x_0$ para todo t . Probar que $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, a), (X, x_0)]$ (igualdad de conjuntos).

- 14) Un subconjunto A de \mathbb{R}^n se dice *estrellado* si para algún punto $a_0 \in A$, todas los segmentos que unen a_0 con otro punto de A están contenidos en A .

- Probar que si A es estrellado, entonces es simplemente conexo.
- Probar que si A es estrellado, entonces dos caminos con los mismos extremos son homotópicos.

- 15) Sea X un espacio topológico y sean $x, y \in X$.

- Sean α, β caminos de x a y . Probar que si α es homotópico a β , entonces $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$.
- Sean α y β caminos de x a y . Probar que $\tilde{\alpha}$ difiere de $\tilde{\beta}$ en un automorfismo interior de $\pi_1(X, y)$, es decir, existe $[\gamma] \in \pi_1(X, y)$ tal que $\tilde{\alpha}([f]) = [\gamma]^{-1} \tilde{\beta}([f]) [\gamma]$.
- Probar que $\pi_1(X, x)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos α, β de x a y , $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$.

- 16) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto. Sea $h : A \rightarrow Y$. Mostrar que si h se extiende a una función continua $\bar{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$, entonces $h_* : \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ es el morfismo cero.

- 17) Sea $A \subset X$ un subespacio. Probar que si A es un retracto de X con retracción $r : X \rightarrow A$, entonces para cualquier $a_0 \in A$ se tiene que $r_* : \pi_1(X, a_0) \rightarrow \pi_1(A, a_0)$ es un epimorfismo e $i_* : \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$ es un monomorfismo (donde $i : A \rightarrow X$ es la inclusión).

- 18) Sean X, Y espacios topológicos arco-conexos.

- Sean $f : I \rightarrow X$, $g : I \rightarrow Y$ caminos cerrados con punto base $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ respectivamente. Sean $i : X \rightarrow X \times Y$ y $j : Y \rightarrow X \times Y$ las inclusiones definidas por $i(x) = (x, y_0)$, $j(y) = (x_0, y)$. Demostrar que los caminos $(i \circ f) * (j \circ g)$ y $(j \circ g) * (i \circ f)$ son homotópicos.

Sugerencia: Observar que $(i \circ f) * (j \circ g) = (f * c_{x_0}, c_{y_0} * g)$.

- Probar que la aplicación $\rho : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ definida por $\rho([f], [g]) = [(i \circ f) * (j \circ g)]$ es un isomorfismo de grupos.
- Un espacio topológico se llama un *H-espacio* (H de Heinz Hopf) si existe una aplicación continua $\mu : X \times X \rightarrow X$ y un punto $x_0 \in X$ tales que $\mu \circ i \simeq_{x_0} id$ y

$\mu \circ j \simeq_{x_0} id$, donde \simeq_{x_0} quiere decir que la homotopía H verifica $H(x_0, t) = cte$ para todo $t \in I$. Observar que $\mu(x_0, x_0) = x_0$. Probar que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano.

Sugerencia: Probar que $\mu((i \circ f) * (j \circ g)) \simeq f * g$ y usar a).

- 19) Sea G un grupo que además es un espacio topológico. Decimos que G es un *grupo topológico* si las funciones μ, ν definidas por

$$\mu : G \times G \rightarrow G, \mu(g, h) = gh$$

$$\nu : G \rightarrow G, \nu(g) = g^{-1}$$

son continuas. Probar que G es un H-espacio con μ la multiplicación y x_0 la identidad del grupo. Deducir que $\pi_1(G, x_0)$ es abeliano.

- 20) Sea $h : X \rightarrow Y$ continua. Mostrar que si X es arco-conexo, el homomorfismo inducido por h es independiente del punto base, salvo isomorfismo entre los grupos involucrados. Esto es, si $h(x_0) = y_0$ y $h(x_1) = y_1$, mostrar que existen isomorfismos ϕ, ψ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(h_{x_0})_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{(h_{x_1})_*} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

Concluir que si $(h_{x_0})_*$ es el morfismo nulo (o suryectivo, o inyectivo), también lo es $(h_{x_1})_*$.