

Topología

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2005

PRÁCTICA 5

- 1) Sean X un espacio topológico e $Y \subset X$ un subespacio. Sean $A, B \subset Y$ tales que $Y = A \cup B$. Probar que A, B es una separación de Y si y sólo si $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ (las clausuras en X).
- 2) Sean X un espacio topológico y $A, B \subset X$ una separación de X . Probar que si $Y \subset X$ es conexo, entonces $Y \subset A$ o $Y \subset B$.
- 3) Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías en X . Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, ¿qué puede implicar la conexión de X en una de las topologías respecto de la conexión en la otra?
- 4) Probar que $\prod_{i \in I} X_i$ es conexo si y sólo si cada X_i es conexo.
- 5) Probar que en \mathbb{R}^ω con la topología caja el conjunto de las sucesiones acotadas es abierto y cerrado, y por lo tanto \mathbb{R}^ω no es conexo con esta topología.
- 6) a) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es conexo.
b) Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X . Demostrar que si $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $A \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es conexo.
- 7) a) ¿Es el producto de espacios arco-conexos arco-conexo?
b) Si $A \subset X$ y A es arco-conexo, ¿Es \overline{A} arco-conexo?
c) Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y X es arco-conexo, ¿Es $f(X)$ arco-conexo?
d) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una colección de subconjuntos arco-conexos de X y $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$, ¿Es $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ arco-conexo?
- 8) Mostrar que \mathbb{R}^n y \mathbb{R} no son homeomorfos si $n > 1$.
- 9) Calcular las componentes conexas y arco-conexas de \mathbb{R}_l .
- 10) Sea X localmente arco-conexo. Mostrar que todo abierto conexo de X es arco-conexo.
- 11) Demostrar que toda variedad topológica de dimensión n es localmente arco-conexa. Deducir que las variedades conexas son arco-conexas.