

# Topología

## SEGUNDO CUATRIMESTRE 2005

### PRÁCTICA 4

#### Compacidad.

- 1) Sea  $X$  un espacio topológico. Probar que son equivalentes:
  - a)  $X$  es cuasi-compacto.
  - b) Para todo espacio topológico  $Y$ , y para todo abierto  $W \subset X \times Y$  que verifica  $X \times \{y_0\} \subset W$  para  $y_0 \in Y$ , existe  $V \subset Y$  tal que  $y_0 \in V$  y  $X \times V \subset W$ .
  - c) Para todo espacio topológico  $Y$ , la proyección  $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$  es cerrada.
- 2)
  - a) Sean  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  dos topologías en  $X$ . Supongamos que  $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ . ¿La compacidad de alguna de estas topologías implica la compacidad de la otra?
  - b) Si  $X$  es compacto tanto para  $\mathcal{T}$  como para  $\mathcal{T}'$  entonces  $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$  o no son comparables.
- 3)
  - a) Probar que en  $\mathbb{R}$  con la topología del complemento finito todo subconjunto es cuasi-compacto, pero los nicos cerrados son los conjuntos finitos. Por lo tanto hay conjunto cuasi-compactos que no son cerrados.
  - b) ¿Es  $[0, 1]$  cuasi-compacto como subespacio de  $\mathbb{R}$  en la topología

$$\mathcal{T}_c = \{U : \mathbb{R} \setminus A \text{ es numerable o todo } \mathbb{R}\}$$

¿Lo es como subespacio de  $\mathbb{R}_l$ ?

- 4) Mostrar que si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, donde  $X$  es cuasi-compacto e  $Y$  es Hausdorff, entonces  $f$  es cerrada.
- 5) *Teorema.* Sea  $f : X \rightarrow Y$ , con  $Y$  compacto. Entonces  $f$  es continua si y sólo si el gráfico de  $f$ ,

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\},$$

es cerrado en  $X \times Y$ .

(Sugerencia: Si  $G_f$  es cerrado y  $V$  es un entorno abierto de  $f(x_0)$ , encontrar un tubo que contenga a  $\{x_0\} \times (Y \setminus V)$  que no corte a  $G_f$ .)

**Compacidad local.** Un espacio topológico se dice localmente compacto si y sólo si para cada  $x \in X$  los entornos cuasi-compactos de  $x$  forman una base para el filtro de entornos de  $X$ .

- 6) Probar que si  $X$  es Hausdorff,  $X$  es localmente compacto si y sólo si todo punto  $x$  tiene un entorno compacto.
- 7) Mostrar que  $\mathbb{Q}$  no es localmente compacto.

- 8) Mostrar que si  $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$  es localmente compacto, entonces cada  $X_\alpha$  es localmente compacto y todos los  $X_\alpha$ , salvo una cantidad finita, son compactos.
- 9) Sea  $X$  un espacio localmente compacto. Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, ¿Es  $f(X)$  localmente compacto? ¿Y si  $f$  es además abierta?

**Compactificación de Alexandroff.** Si  $X$  es un espacio topológico definimos la *compactificación de Alexandroff* como el conjunto  $X^* = X \cup \{\infty\}$  donde la topología es la unión de la topología en  $X$  y los conjuntos  $U \subset X^*$  tales que  $X^* \setminus U$  es cuasi-compacto y cerrado en  $X$ .

- 10) *Teorema (Alexandroff).* La compactificación de Alexandroff  $X^*$  de un espacio topológico  $X$  es un espacio cuasi-compacto y  $X$  es un subespacio de  $X^*$ .

El espacio  $X^*$  es compacto si y sólo si  $X$  es Hausdorff y localmente compacto.

Además  $X$  es cuasi-compacto si y sólo si  $\infty$  es un punto aislado de  $X^*$  (i.e., abierto y cerrado), y por lo tanto  $X$  es denso en  $X^*$  si y sólo si  $X$  no es cuasi-compacto.

- 11) Sea  $\mathbb{N}$  con la topología discreta. Probar que su compactificación de Alexandroff es homeomorfa a  $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  con la topología que hereda como subespacio de  $\mathbb{R}$ .
- 12) Probar que la compactificación de Alexandroff de  $\mathbb{R}^n$  es homeomorfa a  $S^n$ . (Considerar la proyección estereográfica  $p : S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$ .)

**Variedades topológicas.** Un espacio topológico  $X$  se dice una variedad topológica de dimensión  $n$  si es un espacio Hausdorff en el cada punto tiene un entorno homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

- 13) Probar que  $S^n$  y  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  son variedades de dimensión  $n$  y que  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  es una variedad de dimensión  $2n$ .
- 14) Probar que el toro y la botella de Klein son variedades de dimensión 2 (se llaman superficies).
- 15) Sea  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \sim$  donde  $(x, 0) \sim (y, 1)$  si y sólo si  $x = y \neq 0$  ( $X$  es una la recta con el origen doble).

Probar que todo punto de  $X$  tiene un entorno homeomorfo a  $\mathbb{R}$  pero  $X$  no es Hausdorff y por lo tanto no es una variedad.

- 16) Sea  $X$  un  $G$ -espacio. Decimos que  $G$  actúa *libremente* en  $X$  si se verifica que  $g \cdot x \neq x$  si  $g \neq 1$ .

Decimos que la acción es *propiamente discontinua* si se verifica que para todo  $x \in X$  existe un abierto  $U$  tal que  $x \in U$  y tal que  $g \cdot U \cap U = \emptyset$  para todo  $g \neq 1$ .

Probar:

- a) Sea  $X$  un  $G$ -espacio Hausdorff, donde  $G$  un grupo finito que actúa libremente en  $G$ . Probar que la acción es propiamente discontinua.
- b) Sea  $X$  es un  $G$ -espacio Hausdorff, donde  $G$  es un grupo finito. Probar que el espacio cociente  $X/G$  es Hausdorff.
- c) Deducir que si un grupo finito actúa libremente en una variedad (compacta) de dimensión  $n$ , entonces el espacio cociente  $X/G$  es también una variedad (compacta) de dimensión  $n$ .
- d) Volver a probar que el espacio proyectivo real  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  es una variedad de dimensión  $n$ .
- 17) Sea  $g$  un número natural. Consideramos un disco cerrado  $D_0 \subset \mathbb{R}^2$  y  $g$  discos cerrados disjuntos  $D_1, \dots, D_g$  contenidos en el interior de  $D_0$ . Denotemos  $D_i^\circ$  el interior de  $D_i$  y definamos

$$D(g) = D_0 - \bigcup_{i=1}^g D_i^\circ$$

Sea  $X = D(g) \times \{0\} \cup D(g) \times \{1\}$  la unión disjunta de dos copias de  $D(g)$ . Sea  $S(g)$  el conjunto cociente de  $X$  por la relación de equivalencia generada por  $(x, 0) \sim (x, 1)$  si  $x$  pertenece al borde de alguno de los  $D_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, g$ .

Demostrar:

- a)  $S(g)$  es una variedad topológica compacta de dimensión dos
- b) Si modificamos los radios y posición de los discos  $D_i$  obtenemos espacios homeomorfos.
- c)  $S(g) + S(h)$  es homeomorfa a  $S(g + h)$   
 (+ es cirugía o costura: Si  $X$  e  $Y$  son variedades de dimensión  $n$  se eligen  $D_X \subset X$  y  $D_Y \subset Y$  homeomorfos a la bola cerrada en  $\mathbb{R}^n$  de centro 0 y radio 1. Se considera entonces  $(X \setminus D_X^\circ) \amalg_f (Y \setminus D_Y^\circ)$  donde  $f : \partial D_X \rightarrow \partial D_Y$  es un homeomorfismo entre los bordes de las bolas.)
- 18) Sea  $g$  un número natural. Sea  $P_g \subset \mathbb{R}^2$  un polígono regular con  $4g$  lados denotados  $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_g, b_g, c_g, d_g$  consecutivamente al recorrer el borde de  $P_g$ , digamos en sentido anti-horario. Vamos a definir una relación de equivalencia  $\sim$  en  $P_g$  cuyo efecto será identificar cada  $a_i$  con  $c_i$  y  $b_i$  con  $d_i$  de una manera específica. Precisamente,  $\sim$  es la relación de equivalencia generada por  $x \sim y$  si  $x \in a_i, y \in c_i, d(x, a_i \cap d_i) = d(y, c_i \cap d_i)$  o bien  $x \in b_i, y \in d_i, d(x, a_i \cap b_i) = d(y, a_i \cap d_i)$  donde  $d$  denota distancia en  $\mathbb{R}^2$  (¡hacer un dibujo!).

Denotamos  $S'(g) = P_g / \sim$  y  $\pi : P_g \rightarrow S'(g)$  la proyección al cociente. Le damos a  $S'(g)$  la topología cociente de la topología en  $P_g$  de subespacio de  $\mathbb{R}^2$ .

Demostrar:

- a)  $S'(g) + S'(h)$  es homeomorfa a  $S'(g + h)$
- b)  $S(g)$  (ejercicio anterior) y  $S'(g)$  son homeomorfas.  
 (Sug.: induccion usando a), también ver de hacerlo directamente)

Se tiene el siguiente

*Teorema.* Si  $X$  es una variedad topológica de dimensión dos, compacta y orientable, entonces existe un único número natural  $g$  (denominado “género de  $X$ ”) tal que  $X$  es homeomorfa a  $S(g)$ .

### Complejos CW.

- 19) Sea  $X$  un espacio topológico  $T_2$  y sea  $D_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ . Sea  $f : D_n \rightarrow X$  que verifica  $f|_{D_n^\circ} : D_n^\circ \rightarrow X$  es un homeomorfismo. Sea  $Y = X \coprod_f D_n$  el espacio definido como  $X \coprod D_n / \sim$  donde  $\sim$  es la menor relación de equivalencia que verifica que  $x \sim z$  si  $x \in X$ ,  $z \in S^{n-1} \subset D_n$  y  $f(z) = x$ . Sean  $\lambda : X \rightarrow Y$  definida por  $\lambda(x) = \bar{x}$  y  $\mu : D_n \rightarrow Y$  definida por  $\mu(z) = \bar{z}$ . Probar:
- La aplicación  $\lambda$  es una inmersión y  $\lambda(X)$  es un cerrado en  $Y$  (nombre:  $\lambda$  es una *inmersión cerrada*).
  - El conjunto  $\mu(D_n)$  es cerrado en  $Y$ .
  - $F \subset Y$  es cerrado si y sólo si  $F \cap \lambda(X)$  es cerrado en  $X$  y  $F \cap \mu(D_n)$  es cerrado en  $D_n$ .
  - La aplicación  $\mu|_{D_n^\circ} : D_n^\circ \rightarrow Y$  es una inmersión y su imagen es abierta en  $Y$  (nombre:  $\mu|_{D_n^\circ}$  es una *inmersión abierta*).
  - $Y$  es Hausdorff.
- 20) Describir una estructura de complejo CW para los siguientes espacios:
- $S^n$ .
  - $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ .
  - La superficie de género  $g$ ,  $S_g$  (usar la definición  $S'_g$ )
- 21) Sea  $\{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $\mathbb{R}^n$ . Probar que la base define una estructura de CW-complejo en  $\mathbb{R}^n$  tomando como  $k$ -esqueleto al conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^n s_i v_i : s_i \in \mathbb{R}, s_i \in \mathbb{Z} \text{ para al menos } n - k \text{ índices } i \right\}$$

Dibujar en  $\mathbb{R}^2$ .

- 22) Sea  $K$  una estructura celular en  $X$  y  $L$  una estructura celular en  $Y$ . Probar que  $K \times L = \{e \times f : e \in K, f \in L\}$  es una estructura celular en  $X \times Y$ . Si ambos son CW, ¿lo es el producto?

**Espectro de un anillo conmutativo.** Sea  $A$  un anillo conmutativo con unidad. Definimos el conjunto *espectro primo de  $A$*  como el conjunto

$$\text{Spec } A = \{\mathfrak{p} \subseteq A : \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo}\}.$$

Para un conjunto  $E \subseteq A$  definimos el subconjunto  $V(E) \subset \text{Spec}(A)$  como

$$V(E) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : E \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

23) Probar:

a)  $V(E) = V(J_E)$  con  $J_E$  el ideal generado por  $E$ .

b)  $V(0) = \text{Spec } A$ ,  $V(1_A) = \emptyset$ .

c)  $V(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(E_\alpha)$ .

d)  $V(E \cup E') = V(E) \cup V(E')$ .

Por lo tanto existe una topología en  $\text{Spec } A$  tal que los conjuntos  $V(E)$  son conjuntos cerrados. Se llama la *topología de Zariski*.

24) Para cada  $f \in A$ , notamos  $D_f$  al conjunto

$$D_f = \text{Spec}(A) \setminus V(\{f\}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) : f \notin \mathfrak{p}\}.$$

Probar que los conjuntos  $D_f$  forman una base para la topología de Zariski, y que

a)  $D_f \cap D_g = D_{fg}$

b)  $D_f = \emptyset$  si y sólo si  $f$  es nilpotente

c)  $D_f = \text{Spec}(A)$  si y sólo si  $f$  es unidad

d)  $\text{Spec}(A)$  es cuasi-compacto

(Sugerencia: refinando el cubrimiento podemos suponer que  $\text{Spec } A$  está cubierto por una familia  $\{D_{f_i}\}_{i \in I}$ . Esto quiere decir que los  $f_i$  generan el ideal generado por  $1 \in A$  y por lo tanto  $1 = a_1 f_{i_1} + \cdots + a_n f_{i_n}$ . Entonces  $\{D_{f_{i_k}}\}_{k=1}^n$  cubren  $\text{Spec } A$ .)

25) Para facilitar la notación designaremos con  $x, y$ , etc. los puntos de  $\text{Spec } A$  y con  $\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y$ , etc. los ideales primos correspondientes en  $A$  (¡aunque es claro que son la misma cosa!)

a) Probar que  $x \in \text{Spec } A$  es cerrado si y sólo si  $\mathfrak{p}_x$  es un ideal maximal de  $A$ .

b)  $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$ .

c)  $y \in \overline{\{x\}}$  si y sólo si  $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_y$ .

d)  $\text{Spec } A$  es un espacio  $T_0$ .

e) Si  $A$  es un dominio íntegro el punto correspondiente al ideal  $(0)$  es denso.

26) Sea  $\varphi : A \rightarrow B$  un morfismo de anillos. Probar:

a) El morfismo  $\varphi$  induce una función  $\tilde{\varphi} : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ ,  $\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$  para  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ .

b)  $\tilde{\varphi}^{-1}(V(E)) = V(\varphi(E))$  para todo  $E \subseteq A$ .

c)  $\tilde{\varphi}^{-1}(D_f) = D_{\varphi(f)}$  para todo  $f \in A$ .

Por lo tanto  $\tilde{\varphi}$  es una función continua.

27) Definimos el *espectro maximal* de  $A$  como el conjunto

$$\text{Max } A = \{\mathfrak{m} \in \text{Spec } A : \mathfrak{m} \text{ es un ideal maximal}\}.$$

Sea  $X$  un espacio topológico compacto, y sea  $C(X)$  el anillo de funciones continuas a valores reales con las operaciones definidas punto a punto. Para cada  $x \in X$ , sea  $\mathfrak{m}_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ . El ideal  $\mathfrak{m}_x$  es maximal, pues es el núcleo del epimorfismo evaluación en  $x$ ,  $\epsilon_x : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $\epsilon_x(f) = f(x)$ . Por lo tanto se tiene una función  $\mu : X \rightarrow \text{Max}(C(X))$ , definida por  $\mu(x) = \mathfrak{m}_x$ .

Probaremos que  $\mu$  es un homeomorfismo entre  $X$  y  $C(X)$ .

a) Sea  $\mathfrak{m} \in \text{Max } C(X)$ , y sea  $V = V(\mathfrak{m})$  definido por

$$V(\mathfrak{m}) = \{x \in X : f(x) = 0 \forall f \in \mathfrak{m}\}.$$

Supongamos que  $V$  es vacío. Entonces para cada  $x \in X$  existe  $f_x \in \mathfrak{m}$  tal que  $f_x(x) \neq 0$ . Dado que  $f_x$  es continua, existe un entorno abierto  $U_x$  de  $x$  en el que  $f_x$  no se anula. Como  $X$  es compacto, existen finitos  $x_1, \dots, x_n$  tales que  $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$  cubren  $X$ . Sea  $f = f_{x_1}^2 + \dots + f_{x_n}^2$ .  $f$  no se anula en ningún punto de  $X$ , por lo tanto es una unidad en  $C(X)$ , que contradice el hecho que  $f \in \mathfrak{m}$ . Por lo tanto  $V$  es no vacío.

Sea  $x \in V$ . Entonces  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ , y por lo tanto iguales. Esto prueba que  $\mu$  es sobreyectiva.

b) Como  $X$  es  $T_4$ , dados  $x, y \in X$  distintos, existe una función continua que los separa, por lo que  $\mu$  es inyectiva.

c) Sea  $f \in C(X)$ , y sean

$$U_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\} \quad \widetilde{U}_f = \{\mathfrak{m} \in \text{Max } X : f \notin \mathfrak{m}\}.$$

Probar que  $\mu(U_f) = \widetilde{U}_f$ . Los abiertos  $U_f$  (respectivamente  $\widetilde{U}_f$ ) forman una base para la topología de  $X$  (respectivamente de  $\text{Max } X$ ) y por lo tanto  $\mu$  es un homeomorfismo.

Así  $X$  puede ser reconstruido a partir del anillo de funciones  $C(X)$ .

**Paracompacidad.** Sea  $X$  un espacio topológico  $X$  y sea  $\mathcal{U}$  un cubrimiento abierto de  $X$ . Un *refinamiento* de  $\mathcal{U}$  es un cubrimiento  $\mathcal{V}$  tal que para todo  $V \in \mathcal{V}$  existe  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $V \subset U$ . Un refinamiento *abierto* es un refinamiento por conjuntos abiertos. Un espacio topológico  $X$  se dice *paracompacto* si es Hausdorff y si todo cubrimiento abierto de  $X$  tiene un refinamiento abierto y localmente finito que cubre  $X$ .

28) Un espacio compacto  $X$  es, trivialmente, paracompacto.

29) *Teorema.* Todo espacio paracompacto es  $T_4$ .

- a) Probar que  $X$  es  $T_3$  de la siguiente manera: Sea  $a \notin B$  con  $B$  cerrado. Para cada  $b \in B$  separar  $a$  de  $b$  por un abierto  $U_b$  tal que  $a \notin \overline{U_b}$ . Conseguir un refinamiento  $\mathcal{V}$  localmente finito de  $\{U_b : b \in B\} \cup \{X \setminus B\}$ . Considerar  $\mathcal{W} = \{V \in \mathcal{V} : V \cap B \neq \emptyset\}$ . Probar que  $U = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W$  verifica  $B \subset U$  y  $\overline{U} = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} \overline{W}$  (acá se usa que el refinamiento es localmente finito), por lo que  $a \notin \overline{U}$ .
- b) Repetir el argumento reemplazando a  $a$  por  $A$  cerrado disjunto con  $B$ .

**Partición de la unidad.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $\phi : X \rightarrow [0, 1]$  una función continua. Definimos el soporte de  $\phi$  como el conjunto  $\text{sop } \phi = \overline{\{x \in X : \phi(x) \neq 0\}}$ . Sea  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  un cubrimiento abierto de  $X$ . Una familia de funciones continuas  $\{\phi_\alpha : X \rightarrow [0, 1]\}_{\alpha \in \Lambda}$  se dice una *partición de la unidad subordinada al (o dominada por el) cubrimiento*  $\{U_\alpha\}$  si se verifica:

- I)  $\text{sop } \phi_\alpha \subset U_\alpha$  para todo  $\alpha \in \Lambda$
  - II) La familia  $\{\text{sop } \phi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  es localmente finita
  - III)  $\sum_{\alpha \in \Lambda} \phi_\alpha(x) = 1$  para todo  $x \in X$  (observar que la suma es finita por II)).
- 30) Una familia de conjuntos  $\{A_\alpha\}_\alpha$  se dice *indexada finitamente por puntos* si cada  $x \in X$  pertenece a finitos conjuntos  $A_\alpha$ .

*Lema de encogimiento.* Sea  $X$  un espacio  $T_4$  y sea  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  un cubrimiento abierto de  $X$ . Entonces existe un cubrimiento abierto de  $X$ ,  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  tal que  $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$  para todo  $\alpha \in \Lambda$ .

- a) Probar el lema en el caso  $\Lambda = \mathbb{N}$ .
- (Supongamos que tenemos para cada  $j < n$  abiertos  $V_j$  tales que  $\overline{V_j} \subset U_j$  y  $X = V_1 \cup \dots \cup V_{n-1} \cup \bigcup_{k \geq n} U_k$ . Considerar  $A_n = X \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{n-1} \cup \bigcup_{k > n} U_k) \subset U_n$ ; la normalidad implica que existe  $V_n$  abierto tal que  $A_n \subset V_n \subset \overline{V_n} \subset U_n$ . Probar que los  $V_n$  cubren  $X$ .)
- b) El caso general se prueba haciendo inducción transfinita en el conjunto (bien ordenado)  $\Lambda$ .
- 31) *Teorema.* Si  $X$  es un espacio  $T_4$  y  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  es un cubrimiento por abiertos localmente finito, entonces existe una partición de la unidad dominada por  $\{U_\alpha\}_\alpha$ .
- Sugerencia: Usar el lema de encogimiento para definir funciones  $\psi_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$  tales que  $\psi_\alpha(\overline{V_\alpha}) = 1$ ,  $\psi_\alpha(X \setminus U_\alpha) = 0$ . La función  $\psi : X \rightarrow [0, 1]$  definida por  $\psi(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \psi_\alpha(x)$  está bien definida y es nunca nula. Definir  $\phi_\alpha = \frac{\psi_\alpha}{\psi}$ .
- 32) *Teorema.* Probar que si  $X$  es paracompacto y  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  es un cubrimiento por abiertos, entonces existe una partición de la unidad dominada por  $\{U_\alpha\}$ .
- (Sugerencia: Si  $\{V_\beta\}$  es un refinamiento abierto localmente finito de  $\{U_\alpha\}$ , sea para cada  $\alpha$ ,  $W_\alpha = \bigcup_{V_\beta \subset U_\alpha} V_\beta$ . Entonces  $\{W_\alpha\}$  es localmente finito.)