

# Topología

## SEGUNDO CUATRIMESTRE 2005

### PRÁCTICA 3

#### Separación.

- 1) Sea  $X = \mathbb{R}$  con la topología que tiene como base

$$\{(a, b) : a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b) \setminus K : a < b \in \mathbb{R}\}$$

donde  $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ . Probar que  $X$  es  $T_2$  pero no es  $T_3$ .

(Sugerencia: no se pueden separar el 0 de  $K$ .)

- 2) Mostrar que si  $X$  es  $T_3$ , todo par de puntos de  $X$  tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.
- 3) Mostrar que si  $X$  es  $T_4$ , todo par de cerrados disjuntos tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.
- 4) Mostrar que si  $X$  es un conjunto ordenado, entonces es  $T_3$  con la topología del orden.
- 5) Mostrar que si  $X$  es un conjunto bien ordenado, entonces es  $T_4$  con la topología del orden. Por lo tanto  $S_\Omega$  y  $\overline{S}_\Omega$  son espacios  $T_4$ .
- 6) Mostrar que un subespacio cerrado de un espacio  $T_4$  es  $T_4$ .
- 7) Mostrar que si  $\prod X_\alpha$  es  $T_i$  ( $0 \leq i \leq 4$ ), entonces cada  $X_\alpha$  lo es.
- 8) Sea  $X$  un conjunto con dos topologías  $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ . Supongamos que  $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$ . Si  $X$  es  $T_i$  ( $0 \leq i \leq 4$ ) con alguna de las topologías, ¿qué se puede decir sobre la otra?
- 9) Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  funciones continuas. Supongamos que  $Y$  es Hausdorff. Mostrar que  $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$  es cerrado en  $X$ .
- 10) Sea  $X$  un espacio regular. Definimos una relación de equivalencia en  $X$  por  $x \sim y$  si y sólo si  $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ . Probar que la proyección  $p : X \rightarrow X/\sim$  es tanto abierta como cerrada, y que  $X/\sim$  es un espacio  $T_3$ .  
(Sugerencia: Si  $A$  es abierto o cerrado en  $X$  y  $x \in A$  entonces  $\overline{\{x\}} \subset A$ .)
- 11) Sea  $p : X \rightarrow Y$  un cociente. Probar que si  $p$  es cerrada y  $X$  es normal, entonces  $Y$  es normal.
- 12) Probar que los espacios métricos son normales, mostrando que dados dos cerrados  $A, B$  disjuntos, existe una función continua  $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\varphi(A) = \{0\}$  y  $\varphi(B) = \{1\}$ .  
(Sugerencia: recordar que si  $x \in X$  y  $C \subset X$ , la función (continua)  $d_C(x) = \inf\{d(x, c) : c \in C\}$  verifica  $d_C(x) = 0$  si y sólo si  $x \in \overline{C}$ . Usar entonces  $d_A$  y  $d_B$  para armar la función  $\varphi$ .)

13)  $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$  **no es**  $T_4$ .

Consideremos en  $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$  la recta  $L = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ . La topología de  $L$  como subespacio de  $\mathbb{R}_l$  es la discreta y  $L$  es un cerrado en  $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ . Por lo tanto cualquier subconjunto  $A \subset L$  es cerrado en  $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ .

Supongamos que  $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$  es  $T_4$ . Entonces para cada  $A \subset L$  existen abiertos  $U_A, V_A \subset \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$  tales que  $U_A \cap V_A = \emptyset$ ,  $A \subset U_A$  y  $L \setminus A \subset V_A$ . Sea  $D$  el conjunto de los puntos de  $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$  con coordenadas racionales. Definamos una función  $\theta : \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{P}(D)$  (donde  $\mathcal{P}$  denota las partes de un conjunto) como sigue:

$$\begin{aligned}\theta(A) &= U_A \cap D \text{ si } A \neq \emptyset \text{ y } A \neq L \\ \theta(\emptyset) &= \emptyset, \\ \theta(L) &= D.\end{aligned}$$

Probar que  $\theta$  es inyectiva y por lo tanto  $\#\mathcal{P}(L) \leq \#\mathcal{P}(D)$ . Esto último es una contradicción ya que  $\#\mathcal{P}(D) = \#L < \#\mathcal{P}(L)$ .

**Observación:**  $\mathbb{R}_l$  es  $T_4$  (es fácil verlo), y por lo tanto  $T_3$ . Así, este ejemplo muestra que producto de espacios  $T_4$  no es necesariamente  $T_4$  y que hay espacios  $T_3$  que no son  $T_4$ .