

Topología

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2005

PRÁCTICA 2

Redes

Sea Λ un conjunto no vacío. Decimos que Λ es dirigido si existe una relación \geq en Λ que verifica:

- I) $\alpha \geq \alpha \quad \forall \alpha \in \Lambda$
- II) Si $\alpha \geq \beta$ y $\beta \geq \gamma \Rightarrow \alpha \geq \gamma$
- III) Dados $\alpha, \beta \in \Lambda$, existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $\gamma \geq \alpha$ y $\gamma \geq \beta$

Un subconjunto $\Gamma \subset \Lambda$ se dice *cofinal* si para todo $\lambda \in \Lambda$, $\exists \gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma \geq \lambda$. Se verifica fácilmente que Γ está dirigido por \geq .

Sea X un espacio topológico. Una *red en X* es una función $f : (\Lambda, \geq) \rightarrow X$ donde el par (Λ, \geq) denota a un conjunto dirigido. Si $\alpha \in \Lambda$ notaremos $f(\alpha) = x_\alpha$, y a la red $f : (\Lambda, \geq) \rightarrow X$ como $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$.

Se dice que una red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *converge a x* si para todo U abierto tal que $x \in U$ existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x_\beta \in U$ si $\beta \geq \alpha_0$. Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x , escribimos $x_\alpha \rightarrow x$.

Dada $f : (\Lambda, \geq) \rightarrow X$ una red, (Γ, \succeq) otro conjunto dirigido y $g : \Gamma \rightarrow \Lambda$ una función, decimos que $f \circ g : (\Gamma, \succeq) \rightarrow X$ es una *subred de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$* si g verifica: $\forall \alpha \in \Lambda, \exists \gamma_0 \in \Gamma$ tal que $g(\gamma) \geq \alpha \quad \forall \gamma \succeq \gamma_0$. A la subred la notaremos $(x_{\alpha_\gamma})_{\gamma \in \Gamma}$.

1) Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Probar que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:

R1: Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a la constante.

R2: Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x , entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x .

R3: Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x , entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x .

R4: Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x_k^\alpha)_{k \in \Gamma_\alpha}$, que converge a $x^\alpha \in X$, y además $(x^\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a $x \in X$. Consideremos $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha \in \Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta \quad \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \mapsto x_{k_\alpha}^\alpha$ converge a x .

2) Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Probar que la fórmula

$$\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq A, \text{ y } x_\alpha \rightarrow x\}$$

define un operador de clausura. Probar que esta clausura es la misma que la usual.

- 3) Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un *punto de acumulación* de la red si para todo $A \in \mathcal{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ . Probar que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ que converge a x (para la ida, considerar Γ el conjunto de pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$, U entorno abierto de x que contiene a x_α , con el orden $(\alpha, U) \preceq (\beta, V)$ si $\alpha \leq \beta$ y $V \subseteq U$).
- 4) Si X es un espacio Hausdorff entonces toda red converge a lo sumo a un punto.

Funciones Continuas.

- 5) Sean X, Y espacios topológicos. Probar que cada una de las siguientes condiciones sobre $f : X \rightarrow Y$ es equivalente a pedir que f sea continua
- Para todo $x \in X$, y para todo $A \in \mathcal{F}_y$ ($y = f(x)$) existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $f(B) \subseteq A$.
 - Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset X$ tal que $x_\alpha \rightarrow x$, se tiene que $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$.
 - Para todo $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
 - Si \mathcal{B} es una base para la topología de Y , $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.
 - Si \mathcal{S} es una sub-base para la topología de Y , $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.
- 6) Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio topológico X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \rightarrow Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.
- Probar que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.
 - Probar que si \mathcal{A} es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.
 - Encontrar un ejemplo donde $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.
 - Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α . Mostrar que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.
- 7) Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Sea $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ la función característica de E , esto es,
- $$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$
- Probar que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E (la frontera de E es $\overline{E} \cap \overline{(X \setminus E)}$).
- 8) a) Sean X, Y conjuntos ordenados, con la topología del orden. Si $f : X \rightarrow Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.
- b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Probar que g es un homeomorfismo.

c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Probar que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

9) Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas.

a) Probar que el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X .

b) Sea $h : X \rightarrow Y$ la función

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Probar que h es continua.

(Sugerencia: probar que h es continua en dos cerrados apropiados.)

Topologías dadas por una métrica

10) a) Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Probar que las funciones $f : X \rightarrow X \times Y$ y $g : Y \rightarrow X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son inmersiones (i.e. definen un homeomorfismo con su imagen).

b) Sea X un espacio con una distancia $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que la topología inducida por la métrica es la mínima tal que d es continua.

(Sugerencia: si d es continua, también lo es $d_{x_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$, $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$.)

11) Mostrar que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del orden del diccionario es metrizable (i.e. existe una métrica tal que la topología que induce la métrica coincide con la dada).

12) Sea \mathbb{R}^ω el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define en \mathbb{R}^ω la topología uniforme de la siguiente manera:

Primero se define en \mathbb{R} la métrica acotada $\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$ (nota: induce la misma topología que la usual). Luego se define en \mathbb{R}^ω la métrica uniforme como $d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\bar{d}(a_n, b_n)\}$.

a) Verificar que la métrica uniforme es efectivamente una métrica.

b) Decidir si las siguientes funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^ω son continuas tomando en \mathbb{R} la topología usual, y en \mathbb{R}^ω la topología uniforme.

$$\begin{aligned} f(t) &= (t, 2t, 3t, \dots), \\ g(t) &= (t, t, t, \dots), \\ h(t) &= (t, \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{3}t, \dots). \end{aligned}$$

- c) Decidir si las siguientes sucesiones convergen en \mathbb{R}^ω con la topología uniforme.

$$\begin{array}{ll} w_1 = (1, 1, 1, 1, \dots), & x_1 = (1, 1, 1, 1, \dots) \\ w_2 = (0, 2, 2, 2, \dots), & x_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots) \\ w_3 = (0, 0, 3, 3, \dots), & x_3 = (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots) \\ \dots & \dots \\ y_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), & z_1 = (1, 1, 0, 0, \dots) \\ y_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), & z_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots) \\ y_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots), & z_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots), \\ \dots & \dots \end{array}$$

- d) Calcular la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a la topología uniforme de \mathbb{R}^ω .

- 13) Sea $\bar{\rho}$ la distancia uniforme sobre \mathbb{R}^ω . Dado $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$ y dado $0 < \epsilon < 1$, sea

$$U(x, \epsilon) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \dots \times (x_n - \epsilon, x_n + \epsilon) \dots$$

- a) Pruebe que $U(x, \epsilon)$ no es igual a la bola $B_{\bar{\rho}}(x, \epsilon)$.
 b) Pruebe que $U(x, \epsilon)$ ni siquiera es abierto en la topología uniforme.
 c) Pruebe que

$$B_{\bar{\rho}}(x, \epsilon) = \cup_{\delta < \epsilon} U(x, \delta).$$

- 14) Sean $(a_1, a_2, \dots), (b_1, b_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$ dos sucesiones tales que $a_i \neq 0$ para todo i . Definamos $h : \mathbb{R}^\omega \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ por la fórmula

$$h((x_1, x_2, \dots)) = (a_1 x_1 + b_1, a_2 x_2 + b_2, \dots),$$

Dar condiciones sobre los números a_i, b_i para que h sea continua. ¿Y para que h sea un homeomorfismo?

Topología Producto vs. Topología Caja

- 15) Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada $i \in I$ un subconjunto $A_i \subseteq X_i$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas si se toma en $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topología producto. ¿Y si se toma la topología caja?

- a) Si cada A_i es cerrado en X_i entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es cerrado en X .
 b) $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

- 16) Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red de puntos en el espacio topológico $X = \prod_{i \in I} X_i$ (considerado con la topología producto). Probar que la sucesión $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x si y sólo si la red $\pi_i(x_\alpha)$ converge a $\pi_i(x)$ en X_i para todo $i \in I$. ¿Es cierto esto si se toma en X la topología caja?

- 17) a) Comparar las topologías caja, producto y uniforme en \mathbb{R}^ω .

- b) Hacer de nuevo los items (b), (c), (d) del ejercicio 12 de esta práctica, tomando en \mathbb{R}^ω la topología caja y la producto. Comparar con lo obtenido para la topología uniforme.
- 18) Considerar la función h definida en el ejercicio 14 de la práctica 1. Probar que con sólo pedir que todos los a_i sean no nulos entonces h es un homeomorfismo si se considera en \mathbb{R}^ω la topología producto. ¿Y si en \mathbb{R}^ω consideramos la topología caja?

Topologías iniciales y finales – Cocientes

- 19) Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Sean $Z = \prod_{i \in I} X_i$, $W = \coprod_{i \in I} X_i$, y para cada $i \in I$, $\pi_i : Z \rightarrow X_i$ la proyección i -ésima, y $\lambda_i : X_i \rightarrow W$ la inclusión.
- a) Probar que π_i es abierta para todo $i \in I$.
- b) Probar que λ_i es abierta y cerrada.
- 20) Sea $\left\{X \xrightarrow{f_i} X_i\right\}_{i \in I}$ una familia inicial de funciones (o sea, X tiene la topología inicial inducida por las funciones f_i), y $f : X \rightarrow \prod X_i$ la función definida por

$$f(x) = (f_i(x))_{i \in I}.$$

Sea Z la imagen de f . Probar que $f : X \rightarrow Z$ es abierta.

- 21) Consideremos el espacio de Sierpinski, $S = \{0, 1\}$, $\mathcal{T}(S) = \{\emptyset, \{1\}, S\}$. Sea X un espacio topológico.
- a) Probar que $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si la función característica de A , $\chi_A : X \rightarrow S$, es continua.
- b) Probar que la familia $\{\chi_U\}_{U \in \mathcal{T}_X}$ es una familia inicial para la topología de X .
- 22) Probar que si $f : X \rightarrow Y$ es final e inyectiva, entonces es inicial.
- 23) Si $f : X \rightarrow Y$ es inicial y suryectiva, entonces es cociente (i.e. f es final y suryectiva).
- 24) Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que si existe $g : Y \rightarrow X$ continua tal que $f \circ g = id_Y$, entonces f es un cociente.
- 25) Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada.
- a) Sea X el subespacio $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $g = \pi_1|_X$. Mostrar que g es cerrada pero no abierta.
- b) Sea Y el subespacio $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $h = \pi_1|_Y$. Mostrar que h no es abierta ni cerrada pero es cociente.

- 26) Caracterizar el espacio cociente \mathbb{R}^2 / \sim en cada uno de los siguientes casos

- a) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$.

b) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$.

27) Sea Z el subespacio $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow Z$ por la fórmula

$$\begin{cases} g((x, y)) &= (x, 0) \text{ si } x \neq 0 \\ g((0, y)) &= (0, y) \end{cases}$$

a) ¿Es g un cociente? ¿Es g continua?

b) Mostrar que Z con la topología cociente inducida por g no es Hausdorff.

28) Sean X un espacio topológico, \sim una relación de equivalencia en X y $p : X \rightarrow X/\sim$ la proyección al cociente.

Sea $R = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$. Probar que :

a) Si X/\sim es Hausdorff, entonces R es cerrado en $X \times X$.

b) Si $p : X \rightarrow X/\sim$ es abierta y R es cerrado en $X \times X$, entonces X/\sim es Hausdorff.

c) Si $p \times p : X \times X \rightarrow X/\sim \times X/\sim$ dada por $p \times p(x_1, x_2) = (p(x_1), p(x_2))$ es final, y R es cerrado en $X \times X$, entonces X/\sim es Hausdorff.

29) Sea $X = \mathbb{C} \times \{0, 1\}$ con la topología producto, $\{0, 1\}$ con la topología discreta. Definimos en X dos relaciones de equivalencia:

$$(z, 0) \sim_1 (w, 1) \Leftrightarrow z = w \neq 0, \quad (z, j) \sim_1 (w, j) \Leftrightarrow z = w$$

$$(z, 0) \sim_2 (w, 1) \Leftrightarrow z \cdot w = 1, \quad (z, j) \sim_2 (w, j) \Leftrightarrow z = w$$

Se definen $X_1 = X/\sim_1$, $X_2 = X/\sim_2$ y se les da a ambos la topología cociente. Probar que:

a) En X_1 todo punto es cerrado, pero X_1 no es Hausdorff.

b) Probar que $f : X \rightarrow S^2$ definida por

$$f(x + iy, j) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, 1-x^2-y^2) & \text{si } j = 0 \\ \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, -2y, x^2+y^2-1) & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

induce un homeomorfismo $\bar{f} : X_2 \rightarrow S^2$. (Sugerencia: Probar que \bar{f} es biyectiva; probar la continuidad de la inversa en los abiertos $S^2 \setminus \{P_N\}$, $S^2 \setminus \{P_S\}$, donde P_N y P_S son los polos norte y sur respectivamente.)

Acciones de un grupo en un espacio topológico.

Sea X un espacio topológico y G un grupo. Decimos que X es un G -espacio si G actúa en X por homeomorfismos, esto es, G actúa en X , y para cada $g \in G$ la función $\theta_g : X \rightarrow X$ definida por $\theta_g(x) = g \cdot x$ es continua (y dado que $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$, tenemos que θ_g es homeomorfismo).

30) Probar que los siguientes espacios topológicos son G -espacios.

- a) $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$, y la acción es $n \cdot x = n + x$, para $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y la acción es $(n, m) \cdot (x, y) = (n + x, m + y)$.
- c) $X = S^n$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$, y la acción es $\pm 1 \cdot x = \pm x$.
- d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1/2 \leq y \leq 1/2\}$, $G = \mathbb{Z}$, y la acción es $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$.

31) Si X es un G -espacio, podemos definir en X una relación de equivalencia por

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

El espacio de cociente resultante lo notamos con X/G , y consideramos en él la topología cociente.

- a) Probar que la proyección al cociente $p : X \rightarrow X/G$ es abierta.
- b) Probar que si G es finito, p es cerrada.
- c) Probar que el espacio cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} (ejercicio 30, a) es homeomorfo a S^1 .
- d) Probar que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ejercicio 28, b) es homeomorfo al toro $S^1 \times S^1$.
- e) El espacio cociente S^n/\mathbb{Z}_2 (ejercicio 30, c) se nota $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, y se llama el espacio proyectivo real de dimensión n .
- f) El espacio cociente X/\mathbb{Z} (ejercicio 30, d) es homeomorfo a la banda de Möbius. (Recordar que la banda de Möbius se define como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ por la relación que identifica $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$, $y \in [0, 1]$.)