NOTA SOBRE ALGEBRAS DE SEMI-GRUPO

Fernando Cukierman

Marzo 2002

Modulos sobre algebras de semigrupo

Sea A un anillo y $(S,*)$ un semigrupo. En el conjunto A^S de todas las funciones $\alpha : S \to A$ definimos dos operaciones:

$$(\alpha+\beta)(s) = \alpha(s) + \beta(s)$$

(suma punto a punto)

$$(\alpha.\beta)(s) = \sum_{\{(u,v)\in S\times S/u*v=s\}} \alpha(u).\beta(v)$$

(producto de convolucion)

Suponemos que el semigrupo S es tal que el conjunto

$$\{(u,v)\in S\times S/u*v=s\}$$

es finito para todo $s\in S$ (p. ej. $S\subset \mathbb{N}^k$, o S finito).

a) Se verifica que $(A^S,+,.)$ es un anillo, que denotamos $A[[S]]$. Es usual escribir un elemento $\alpha\in A^S$ como una suma formal $\sum_{s\in S}\alpha(s).s$.

El subconjunto $A^{(S)}\subset A^S$ de funciones con soporte finito ($\alpha(s)=0$ salvo a lo sumo finitos $s\in S$) es un subanillo, denotado $A[S]$ y llamado Algebra del Semigrupo S con coeficientes en A.

Existen varios ejemplos usuales de esta construccion.

– $A[[\mathbb{N}^r]] \cong A[[x_1, \ldots, x_r]]$, anillo de series formales en las variables $x_1, \ldots, x_r$
– $A[\mathbb{N}^r] \cong A[x_1, \ldots, x_r]$, anillo de polinomios.
– $A[\mathbb{Z}^r] \cong A[x_1, \ldots, x_r, x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}]$, anillo de polinomios de Laurent.
– Si S es un grupo finito entonces la multiplicacion en $A[S]$ se escribe

$$(\alpha.\beta)(s) = \sum_{t \in S} \alpha(s.t^{-1}).\beta(t)$$

– Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo estable por multiplicacion por escalares positivos, entonces $S = X \subset \mathbb{Z}^n$ es un semigrupo. De esta manera, para cada X se tiene un ejemplo de semigrupo S y sus correspondientes algebras de semigrupo (dibujar ejemplos de $X \subset \mathbb{R}^2$). Un caso interesante de cono X es la interseccion de un numero finito de semi-espacios (cono polihedral); este caso es utilizado en la teoria de las Variedades Toricas.

DEFINICION: Sea A un anillo y sea S un semigrupo (con las hipotesis de mas arriba). Una representacion A-lineal de S es un A-modulo M provisto de un morfismo de semigrupos

$$\rho : S \to \mathrm{End}_A(M)$$

donde consideramos $\mathrm{End}_A(M)$ como semigrupo con la operacion de composicion. Notar que ρ induce una accion (lineal) de S en M dada por la formula $s.m = \rho(s)(m)$.

PROPOSICION: Dar una representacion A-lineal de S en M equivale a dar una estructura de $A[S]$-modulo en M.
DEMOSTRACION: ejercicio.

EJEMPLOS:
– $A = k$ un cuerpo, $S = \mathbb{N}$, de manera que $A[S] = k[t]$. Reencontramos la correspondencia entre $k[t]$- modulos y espacios vectoriales provistos de un endomorfismo.
– $A = k$ un cuerpo, $S = \mathbb{N}^2$, de manera que $A[S] = k[s, t]$. Hay correspondencia biyectiva entre $k[s, t]$-modulos y espacios vectoriales provistos de dos endomorfismos que conmutan entre si.
– $A = k$ un cuerpo, $S = G$ un grupo. Existe correspondencia biyectiva entre $k[G]$-modulos y representaciones k-lineales de G.