# INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE SCHUBERT

Fernando Cukierman

Diciembre 2003

Notas del curso dictado en el Primer Encuentro Nacional de Algebra, Vaquerías, Córdoba, Agosto 2003.



## §1 - Algunos problemas enumerativos.

Comenzamos enunciando dos problemas clásicos de geometría enumerativa.

(1.1) Sean $L_1, L_2, L_3, L_4$ cuatro rectas en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^3$, en posición general. El problema consiste en determinar el número de rectas $L \subset \mathbb{P}^3$ que intersecan a las cuatro rectas dadas.

(1.2) Sean $C_1, \dots, C_5$ cinco cónicas en el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2$, en posición general. Se trata de determinar el número de cónicas no-degeneradas $C \subset \mathbb{P}^2$ que son tangentes a las cinco cónicas dadas.

(1.3) Un modo clásico de tratar estos y otros problemas similares es utilizando el Principio de Continuidad (también llamado Principio de Conservación del número de soluciones). Este método consiste en elegir los datos en una posición especial, convenientemente elegida, para la cual el problema es fácilmente resoluble. Luego se conjetura o se demuestra que la respuesta obtenida es también válida para datos en posición general. Veamos como funciona el Principio de Continuidad en el problema de las cuatro rectas.

(1.4) Consideremos ahora cuatro rectas $A, B, C, D$ en posición especial: $A$ y $B$ se cortan en un punto $p$, $C$ y $D$ se cortan en un punto $q$ y las cuatro se encuentran en posición general satisfaciendo estas condiciones. Denotemos $M$ (resp. $N$) el plano generado por $A$ y $B$ (resp. $C$ y $D$). Sea $L = \bar{pq}$ la recta generada por $p$ y $q$; sea $L' = M \cap N$ la recta intersección de los planos $M$ y $N$. Afirmamos que $L$ y $L'$ son las únicas rectas que cortan a las cuatro rectas dadas; dejamos la demostración como ejercicio para el lector. Por lo tanto, la respuesta al problema, para estas cuatro rectas, es "dos". Consideremos ahora $L_1, L_2, L_3, L_4$ en posición general y denotemos $n$ al número de rectas $L$ que intersecan a todas las $L_i$, de modo que $n$ es la solución a nuestro problema. Imaginemos las cuatro rectas $L_i$ moviéndose continuamente hasta alcanzar una posición especial como la de las rectas $A, B, C, D$ recién consideradas. Sigamos durante este movimiento a las $n$ rectas solución del problema. En la posición final el número de soluciones es dos. Por lo tanto, $n = 2$.

(1.5) Crítica (constructiva) al razonamiento anterior: el único punto cuestionable parece ser el "por lo tanto" del último paso. En principio podria ser el caso que la respuesta correcta sea p. ej. $n = 100$ pero que en el límite veamos solamente dos rectas; es concebible que durante el movimiento p. ej. tres rectas solución tiendan a $L$ y las otras 97 tiendan a $L'$. De hecho, resulta ser que esto no sucede y la respuesta correcta es $n = 2$. Pero esto requiere una demostración, que será explicada más adelante. Esencialmente el punto consiste en demostrar que las soluciones $L$ y $L'$ para la configuración especial tienen "multiplicidad uno". De todos modos observemos que el método descripto al menos nos ha proporcionado la conjetura $n = 2$, que en este caso resulta verdadera. La fundamentación rigurosa del Cálculo de Schubert es uno de los Problemas Matemáticos planteados por Hilbert ante el Congreso Internacional de Matemáticos realizado en Paris en 1900 (Problema 15, ver [K]).

(1.6) Planteamos ahora otro enfoque al problema de las cuatro rectas. Consideremos la variedad Grassmaniana $\mathbb{G}(1, 3)$ cuyos puntos son las rectas $L \subset \mathbb{P}^3$ (ver §2). Para cada recta $L_i \subset \mathbb{P}^3$ consideremos

$$[L_i] = \{L \in \mathbb{G}(1, 3) / L \cap L_i \neq \emptyset\}$$

Observemos que el problema (1.1) consiste en determinar el cardinal del conjunto $X = [L_1] \cap [L_2] \cap [L_3] \cap [L_4]$. Vamos a ver en §2 que $\mathbb{G}(1,3)$ es una variedad de dimensión compleja cuatro y que cada $[L_i]$ es una hipersuperficie. Por lo tanto, es razonable esperar que $X$ es un conjunto finito. Además, existe una inmersión

$$\sigma : \mathbb{G}(1,3) \to \mathbb{P}^5$$

(la inmersión de Plücker) tal que $\sigma(\mathbb{G}(1,3))$ es una cuádrica $Q \subset \mathbb{P}^5$ y cada $\sigma([L_i])$ es una sección hiperplana de $Q$. Debido a que las rectas $L_i$ se encuentran en posición general, se demuestra que dichas secciones hiperplanas son transversales. Resulta entonces del Teorema de Bezout en $\mathbb{P}^5$ que el cardinal de $X$ es dos, como en (1.4). Nos proponemos justificar y generalizar este argumento en las secciones siguientes.

(1.7) Consideremos ahora el problema (1.2) de las cinco cónicas. Una cónica $C \subset \mathbb{P}^2$ está determinada, salvo constante multiplicativa, por un polinomio homogéneo $F(x_0, x_1, x_2)$ de grado dos, con coeficientes complejos. Un tal polinomio tiene seis coeficientes y por lo tanto el conjunto de todas las cónicas puede ser identificado con $\mathbb{P}^5$. Para cada una de las cinco cónicas $C_i$ dadas, consideremos el conjunto $[C_i] \subset \mathbb{P}^5$ consistente de todas las cónicas que son tangentes a $C_i$. Afirmamos que $[C_i]$ es una hipersuperficie de grado seis; proponemos la demostración de este hecho como un interesante ejercicio para el lector. En estos términos, el problema de las cinco cónicas consistiria en determinar el cardinal del conjunto $X = \bigcap_{i=1}^{5} [C_i]$, intersección de cinco hipersuperficies séxticas en $\mathbb{P}^5$. La primera tentación aqui es aplicar el Teorema de Bezout para concluir que el cardinal de $X$ es $6^5$. Sin embargo, esta respuesta es incorrecta. El motivo es que cada $[C_i]$ contiene el conjunto $V$ consistente en todas las cónicas dadas por una ecuación de la forma $F = G^2$ donde $G$ es una forma lineal (estas cónicas son llamadas "rectas dobles"), ya que una recta doble es ciertamente tangente a cualquier cónica. Este conjunto $V \subset \mathbb{P}^5$ de todas las rectas dobles es una superficie algebraica denominada superficie de Veronese. Vemos entonces que las seis hipersuperficies séxticas $[C_i]$ no se encuentran en posición general ya que su intersección contiene una variedad $V$ de dimensión positiva (excess intersection, ver [F] para mayores detalles). El enunciado del problema (1.2) pide el número de cónicas *no-degeneradas* y por lo tanto se trata, más precisamente, de determinar el cardinal del conjunto $X - V$.

La respuesta correcta para (1.2) es $6^5 - 4512 = 3264$. Existen varias demostraciones de este resultado, para lo cual referimos a [F].

En estas notas nos concentraremos en los problemas enumerativos referentes a espacios *lineales*, como el problema de las cuatro rectas y otros a ser considerados más adelante (el problema de las cinco cónicas no pertenece a esta clase y requiere métodos un poco diferentes).

La técnica utilizada para resolver estos problemas consiste en operar en el **anillo de Chow de las Grassmannianas.** En §2, 3, 4 desarrollaremos estos conceptos y en §5 los utilizaremos para resolver varios problemas enumerativos.

## §2 - Grassmannianas y variedades de Schubert.

(2.1) Sea $K$ un cuerpo y sean $0 \leq d \leq n$ números naturales. Consideramos el conjunto

$$G(d,n)$$

cuyos elementos son los subespacios lineales $S \subset K^n$ de dimensión $d$. Vamos a definir en $G(d,n)$ una estructura de variedad algebraica sobre $K$. Para esto, sea

$$X = \{x \in K^{n\times d} / \text{ rango } (x) = d\}$$

el abierto (Zariski) de $K^{n\times d}$ de las matrices de rango máximo, igual a $d$. Equivalentemente, $X$ es el conjunto de aplicaciones lineales inyectivas $x : K^d \to K^n$. Consideremos la aplicación sobreyectiva

$$\sigma : X \to G(d,n)$$

definida por $\sigma(x)$ = subespacio de $K^n$ generado por las columnas de $x$. Equivalentemente, si $x : K^d \to K^n$ es lineal inyectiva entonces $\sigma(x) = \text{im } (x)$. El grupo $GL(d)$ de las matrices inversibles $d \times d$ (con coeficientes en $K$) actúa en $X$ por multiplicación a derecha. Es claro que $\sigma(x) = \sigma(y)$ si y sólo si existe $c \in GL(d)$ tal que $y = xc$, o sea, se tiene una biyección

$$\bar{\sigma} : X/GL(d) \to G(d,n)$$

(2.2) Pasamos a definir una estructura de variedad algebraica en el conjunto $X/GL(d)$, lo cual inducirá, via $\bar{\sigma}$, una estructura de variedad algebraica en $G(d,n)$.

Denotamos

$$I = \{i_1 < \cdots < i_d\} \subset \{1, \ldots, n\}$$

un subconjunto de cardinal $d$. Para cada $x = (x_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq d} \in K^{n\times d}$ sea

$$x_I = (x_{ij})_{i\in I, 1\leq j\leq d} \in K^{d\times d}$$

el $I$-ésimo $d\times d$ menor de $x$. Sea

$$X_I = \{x \in K^{n\times d} / \det\,(x_I) \neq 0\}$$

el conjunto de matrices con $I$-ésimo menor inversible. Resulta entonces que $X$ es igual a la unión de los abiertos Zariski $GL(d)$-estables $X_I$. Denotando $1_d$ la matriz identidad $d\times d$, definimos

$$L_I = \{x \in K^{n\times d} / \ x_I = 1_d\}$$

Notemos que $L_I$ es una variedad lineal de dimensión $(n-d)d$ contenida en $X_I$. Además, toda $x \in X_I$ es equivalente, bajo la acción de $GL(d)$, a una matriz $y \in L_I$. En efecto, $x$ es equivalente a $y = xx_I^{-1}$. Vamos a considerar la matriz $(n-d)\times d$ obtenida a partir de $y$ eliminando las filas pertenecientes a $I$. Más precisamente, consideremos para cada $I$ la aplicación

$$\varphi_I : X_I \to K^{(n-d)\times d}$$

definida por $\varphi_I(x) = (xx_I^{-1})_{I'}$, donde $I' = \{1,\ldots,n\} - I$. Sea además

$$\psi_I : K^{(n-d)\times d} \to L_I$$

la inclusión natural, definida por $\psi_I(z) = x$ si $x_I = 1_d$ y $x_{I'} = z$.
Denotemos $\pi : X \to X/GL(d)$ la proyección al cociente y

$$\bar{\psi}_I : K^{(n-d)\times d} \to X_I/GL(d)$$

la composición $\pi\circ\psi_I$. Afirmamos que

a) $\varphi_I(xc) = \varphi_I(x)$ para $x\in X_I$, $c\in GL(d)$. Por lo tanto $\varphi_I$ induce

$$\bar{\varphi}_I : X_I/GL(d) \to K^{(n-d)\times d}$$

b) $\bar{\varphi}_I$ es biyectiva y su inversa es $\bar{\psi}_I$
c) Si $I$ y $K$ son subconjuntos de $\{1,\ldots,n\}$ de cardinal $d$, la composición $\bar{\varphi}_I\circ\bar{\varphi}_K^{-1} = \bar{\varphi}_I\circ\bar{\psi}_K$ es una función racional $K^{(n-d)\times d} \to K^{(n-d)\times d}$, regular en el abierto $\bar{\varphi}_K((X_I\cap X_K)/GL(d))$.

Dejamos la verificación de a), b), c) como ejercicio para el lector. La colección de cartas $\{(X_I/GL(d), \bar{\varphi}_I)\}_I$ constituye entonces un atlas en el conjunto $X/GL(d)$ y lo provee de una estructura de variedad algebraica sobre $K$, localmente isomorfa a $K^{(n-d)\times d}$. En particular, la Grassmanniana $G(d,n)$ de $d$-subespacios en $K^n$ es una variedad algebraica racional de dimensión $d(n-d)$.

(2.3) Si $f : K^n \to K^n$ es un isomorfismo lineal entonces $f$ induce la aplicación

$$\tilde{f} : G(d,n) \to G(d,n)$$

tal que $\tilde{f}(S) = f(S) \subset K^n$. Se verifica que $\tilde{f}$ es morfismo de variedades algebraicas. De este modo, el grupo $GL(n)$ actúa transitiva y regularmente en $G(d,n)$. En particular, $G(d,n)$ es un espacio homogéneo $G(d,n) \cong GL(n)/H$ donde $H$ es el subgrupo estabilizador de un $S \in G(d,n)$.

(2.4) Describimos ahora la inmersión de Plücker de $G(d,n)$. Denotemos $\mathcal{I} = \mathcal{I}(d,n)$ el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos $I \subset \{1,\ldots,n\}$ de cardinal $d$, como en (2.2). Sea $V = V(d,n)$ el $K$-espacio vectorial generado libremente por el conjunto $\mathcal{I}$ y sea $\mathbb{P}(V) = V - \{0\}/K^*$ el espacio proyectivo asociado. Un elemento típico de $V$ tiene la forma $v = (v_I)_{I\in\mathcal{I}}$ con $v_I \in K$; denotaremos también $(v_I)_{I\in\mathcal{I}} \in \mathbb{P}(V)$ la clase de $v$ si $v \neq 0$. Con la notación de (2.1), consideramos la aplicación

$$p : X \to \mathbb{P}(V)$$

tal que $p(x) = (\det\,(x_I))_{I\in\mathcal{I}}$, de modo que $p$ asocia a una matriz $x \in K^{n\times d}$ (de rango $d$) la familia de todos sus menores $d \times d$. Es claro que si $c \in GL(d)$ entonces $p(xc) = p(x)$ para toda $x \in X$, de modo que $p$ se factoriza por el cociente como

$$\bar{p} : X/GL(d) \to \mathbb{P}(V)$$

Definimos la aplicación de Plücker

$$\wp : G(d,n) \to \mathbb{P}(V)$$

como $\wp = \bar{p} \circ \bar{\sigma}^{-1}$. Notar que como $\bar{\sigma}$ es un isomorfismo, las propiedades de $\wp$ equivalen a las de $\bar{p}$. Si $S \in G(d,n)$ es un subespacio de $K^n$ de dimensión $d$, se dice que $\wp(S) \in \mathbb{P}(V)$

son las coordenadas de Plücker de $S$. El resultado fundamental sobre $\wp$ es el siguiente.

**Teorema:**
a) $\wp$ es una inmersión (inyectiva y con diferencial inyectiva en todo punto).
b) La imagen $\wp(G(d,n)) \subset \mathbb{P}(V)$ es una variedad proyectiva cuyo ideal está generado por elementos de grado dos explícitos (cuádricas de Plücker).

**Demostración:** Referimos por ejemplo a [G-H], [K-L].

En términos más intrínsecos, sea $U$ un espacio vectorial de dimensión $n$ y consideremos la Grassmanniana $G(d,U)$ de subespacios $S \subset U$ de dimensión $d$. Para $S \subset U$, la potencia exterior $\wedge^d(S) \subset \wedge^d(U)$ es un subespacio vectorial de dimensión uno del espacio vectorial $\wedge^d(U)$ de dimensión $\binom{n}{d}$. En estos términos, la aplicación de Plücker es

$$G(d,U) \to \mathbb{P}(\wedge^d(U))$$
$$S \mapsto \wedge^d(S)$$

La imagen de esta aplicación consiste de los tensores descomponibles y es la única órbita cerrada de la acción natural de $\mathrm{GL}(U)$ en $\mathbb{P}(\wedge^d(U))$.

(2.5) Notación proyectiva. Sea $\mathbb{P}^n(K) = K^{n+1} - \{0\}/K^*$ el espacio proyectivo standard de dimensión $n$ sobre $K$ y sea $\pi : K^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n(K)$ la aplicación cociente. Un subespacio lineal de dimensión $d \geq 0$ en $\mathbb{P}^n(K)$ es por definición un conjunto de la forma $L = \pi(S - \{0\})$ donde $S \subset K^{n+1}$ es una variedad lineal de dimensión $d+1 \geq 1$. Denotaremos

$$\mathbb{G}(d,n)$$

el conjunto cuyos elementos son los subespacios lineales $L \subset \mathbb{P}^n(K)$ de dimensión $d$. Se tiene la identificación natural

$$\mathbb{G}(d,n) = G(d+1,n+1)$$

y por lo tanto $\mathbb{G}(d,n)$ es una variedad algebraica de dimensión $(d+1)(n-d)$. Las dos notaciones, afín y proyectiva, son intercambiables. Pero en algunos contextos preferiremos la notación proyectiva ya que puede resultar geométricamente más sugestiva.

(2.6) Variedades de Schubert. Fijemos subespacios lineales

$$A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_d \subset \mathbb{P}^n$$

Denotaremos $a_i = \dim A_i$, de modo que

$$0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_d \leq n$$

Definimos

$$[A_0, \ldots, A_d] = \{L \in \mathbb{G}(d,n) / \dim L \cap A_i \geq i, \ i = 0, \ldots, d\}$$
$$[A_0, \ldots, A_d]_0 = \{L \in \mathbb{G}(d,n) / \dim L \cap A_i = i, \ i = 0, \ldots, d\}$$

Se dice que $[A_0, \ldots, A_d]$ es la *variedad de Schubert* definida por la *bandera* $A_0 \subsetneq \cdots \subsetneq A_d$ y que $[A_0, \ldots, A_d]_0$ es la correspondiente *celda de Schubert.*

(2.7) Veamos algunos ejemplos de variedades de Schubert.

a) Consideremos la Grassmanniana $\mathbb{G}(1,3)$ de las rectas (variedades lineales de dimensión uno) en $\mathbb{P}^3$ (ver (1.6)). La siguiente es la lista de todas las posibles variedades de Schubert en este caso.

| $(a_0, a_1)$ | $[A_0, A_1]$ |
|---|---|
| $(0,1)$ | $\{A_1\}$ |
| $(0,2)$ | $\{L / A_0 \in L \subset A_1\}$ |
| $(0,3)$ | $\{L / A_0 \in L\}$ |
| $(1,2)$ | $\{L / L \subset A_1\}$ |
| $(1,3)$ | $\{L / L \cap A_0 \neq \emptyset\}$ |
| $(2,3)$ | $\mathbb{G}(1,3)$ |

b) En general, la primera entre las condiciones de Schubert de (2.6), $\dim (L \cap A_0) \geq 0$, significa $L \cap A_0 \neq \emptyset$, mientras que la última condición de Schubert, $\dim (L \cap A_d) \geq d$, significa $L \subset A_d$.

c) Si $a_i = \dim (A_i) \geq n - d + i$ entonces la $i$-ésima condición $\dim (L \cap A_i) \geq i$ se satisface automáticamente. Por ejemplo, si $a_i = n - d + i$ para $i = 1, \ldots, d$ entonces $[A_0, \ldots, A_d] = \{L / L \cap A_0 \neq \emptyset\}$; en particular, el conjunto de $d$-subespacios lineales que cortan a un subespacio lineal fijo es una variedad de Schubert.

d) Fijados subespacios lineales $A \subset B \subset \mathbb{P}^n$, el conjunto de los $d$-subespacios lineales $L \subset \mathbb{P}^n$ tales que $A \subset L \subset B$ es una variedad de Schubert en $\mathbb{G}(d,n)$ isomorfa a $\mathbb{G}(d',n')$ para ciertos $d', n'$ (ejercicio). En general, las variedades de Schubert tienen puntos singulares; las de este ejemplo son no-singulares.

(2.8) Dadas dos banderas $A_0 \subsetneq \cdots \subsetneq A_d$ y $B_0 \subsetneq \cdots \subsetneq B_d$ en $\mathbb{P}^n$ tales que dim $A_i =$ dim $B_i$ para todo $i$, es claro que existe un isomorfismo lineal $f : K^{n+1} \to K^{n+1}$ tal que $f(A_i) = B_i$ para todo $i$. Resulta entonces que $\tilde{f} : G(d,n) \to G(d,n)$ (ver (2.3)) satisface

$$\tilde{f}[A_0, \ldots, A_d] = [B_0, \ldots, B_d]$$

(2.9) Geometría y descripción matricial de las variedades de Schubert.

Sea $\{e_0, e_1, \ldots, e_d\}$ la base canónica de $K^{d+1}$. Sea $\{(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} / x_i = 0 \text{ para } i > j\}$ el subespacio generado por $\{e_0, e_1, \ldots, e_j\}$ y sea $S_j \subset \mathbb{P}^n$ la variedad lineal proyectiva de dimensión $j$ correspondiente, para $j = 0, 1, \ldots, d$.

Sea $a$ un índice de Schubert, o sea, $a = (a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$ con $0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_d \leq n$. Entonces

$$S_a = (S_{a_0} \subset \cdots \subset S_{a_d})$$

es una bandera de tipo $a = (a_0, \ldots, a_d)$. Denotamos, como en (2.2),

$$\begin{aligned} X &= \{x = (x_{ij})_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq d} \in K^{(n+1)\times(d+1)} / \text{ rango}(x) = d+1\} \\ &= \{x : K^{d+1} \to K^{n+1} / \ x \text{ es inyectiva } \} \end{aligned}$$

y definimos

$$\begin{aligned} X(a) &= \{x \in X / \ x_{ij} = 0 \ \text{ para todo } (i,j) \text{ tal que } i > a_j\} \\ &= \{x : K^{d+1} \to K^{n+1} / \ x(e_j) \in S_{a_j}, \ j = 0, \ldots, d\} \\ X(a)_0 &= \{x \in X(a) / \ x_J = 1_{d+1}\} \ \text{ donde } \ J = \{a_0 + 1, \ldots, a_d + 1\} \\ Y(a) &= \{x \in X / \ \det(x_I) = 0, \forall I = \{i_0 < \cdots < i_d\} \text{ tal que } i_j > a_j \text{ para algun } j\} \end{aligned}$$

(2.10) **Proposición:** Sean $a$ un índice de Schubert y sean $S_a = (S_{a_0} \subset \cdots \subset S_{a_d})$ la bandera standard,

$$S(a)_0 = [S_{a_0}, \dots, S_{a_d}]_0 \subset S(a) = [S_{a_0}, \dots, S_{a_d}]$$

las correspondientes celda de Schubert y variedad de Schubert (ver (2.6).
Sea $\sigma : X \to G(d+1, n+1) = \mathbb{G}(d, n)$ como en (2.1). Entonces

a) $S(a) = \sigma(X(a))$ y $S(a)_0 = \sigma(X(a)_0)$.

b) $S(a) = \sigma(Y(a))$.

c) $S(a)$ es una subvariedad algebraica de $\mathbb{G}(n, d)$ y $S(a)_0 \subset S(a)$ es un abierto Zariski denso isomorfo a un espacio afín de dimensión

$$d(a) = \sum_{i=0}^{d} a_i - i$$

En particular, $S(a)$ es una variedad algebraica irreducible de dimensión $d(a)$.

d) Sea $b = (b_0, \dots, b_d)$ un índice de Schubert tal que $b \le a$ (o sea, $b_i \le a_i$ para $i = 0, \dots, d$). Entonces $S(b) \subset S(a)$ y la variedad de Schubert $S(a)$ es unión de celdas de Schubert

$$S(a) = \bigcup_{b \le a} S(b)_0$$

**Demostración:**
a) Es claro a partir de las definiciones.
b) Resulta de que para toda $y \in Y(a)$ existe una matriz inversible $z$ tal que $x = y.z \in X(a)$.
c) Es claro que $X(a)_0 \subset K^{(n+1)\times(d+1)}$ es una variedad lineal de dimensión $\sum_{i=0}^{d} a_i - i$. De las definiciones de (2.2) resulta inmediatamente que $\sigma : X(a)_0 \to S(a)_0$ es un isomorfismo de variedades algebraicas. Siendo $X(a)$ la clausura Zariski de $X(a)_0$, obtenemos lo afirmado.
d) Es claro que $X(a) = \bigcup_{b \le a} X(b)_0$; la afirmación resulta entonces de a).

(2.11) **Corolario:** Sea $B = (B_0 \subsetneq \cdots \subsetneq B_d)$ una bandera en $\mathbb{P}^n$. Entonces, en la inmersión de Plücker, la variedad de Schubert $[B_0, \dots, B_d]$ es la intersección de $\mathbb{G}(d, n)$ con una variedad lineal.

**Demostración:** Sea $a_i = \dim\,(B_i)$ y sea $a = (a_0, \ldots, a_d)$ el índice de Schubert de la bandera $B$. En virtud de (2.8), basta con demostrar la afirmación para la bandera standard $S_a$, lo cual resulta de (2.10) b) ya que $\det(x_I) = 0$ es la ecuación de un hiperplano (coordenado) en la inmersión de Plücker.

## §3 - Anillo de Chow de variedades algebraicas.

Sea $K$ un cuerpo y sea $X$ una variedad algebraica sobre $K$. Suponemos $X$ es irreducible, no-singular, de dimensión $n$.

(3.1) **Definición:** Sea $r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq n$. Denotemos $\mathcal{V}_r$ el conjunto cuyos elementos son las subvariedades algebraicas irreducibles $Y \subset X$ de dimensión $r$. Un $r$-ciclo algebraico en $X$ es una combinación lineal formal

$$c = \sum_{Y \in \mathcal{V}_r} n_Y Y$$

donde los $n_Y$ son números enteros y sólo finitos entre ellos son no-nulos. Denotamos

$$\mathcal{C}_r(X)$$

el conjunto de los $r$-ciclos algebraicos en $X$. Es el grupo abeliano libre generado por el conjunto $\mathcal{V}_r$.

(3.2) **Definición:** Sean $c, c' \in \mathcal{C}_r(X)$. Decimos que $c$ y $c'$son *linealmente equivalentes*, escrito $c \sim c'$, si existe un $r+1$-ciclo $C \in \mathcal{C}_{r+1}(X \times \mathbb{A}^1)$ en la variedad producto cartesiano de $X$ por la recta afín $\mathbb{A}^1$ tal que $C_0 = c$ y $C_1 = c'$, donde para $t \in \mathbb{A}^1$denotamos $c_t = C \cap (X \times t) \in \mathcal{C}_r(X)$.

(3.3) **Observación:** La idea de la equivalencia lineal es que $c$ y $c'$ están conectados por una familia de ciclos parametrizada por la recta afín. Intuitivamente se puede pensar que $c'$ es una deformación de $c$, similar por ejemplo a la noción de homotopía, aunque en un contexto algebraico. Referimos a [F1], [F2], [H] para mayores detalles.

(3.4) Denotamos $A_r(X) = \mathcal{C}_r(X)/\sim$ el grupo de clases de equivalencia lineal de $r$-ciclos. También es conveniente denotar $A^r(X) = A_{n-r}(X)$ el grupo de clases de equivalencia lineal de ciclos de codimensión $r$ y

$$A(X) = \bigoplus_{r=0}^{n} A^r(X)$$

el grupo abeliano de clases de equivalencia lineal de ciclos en $X$. Si $c$ es un ciclo denotaremos

$$[c]$$

la clase de equivalencia lineal de $c$.

(3.5) **Teorema:** Existe en $A(X)$ una (única) operación de producto de ciclos tal que si $Y, Z$ son ciclos en $X$ de respectivas codimensiones $r, s$ cuya intersección tiene componentes irreducibles

$$Y \cap Z = W_1 \cup \cdots \cup W_m$$

donde cada $W_i$ tiene codimensión $r+s$ y la intersección de $Y$ y $Z$ es transversal genéricamente a lo largo de $W_i$, entonces

$$[Y].[Z] = [\sum_{i=1}^{m} W_i] \in A^{r+s}(X)$$

Provisto de este producto, $A(X)$ tiene estructura de anillo graduado, denominado Anillo de Chow de $X$.

**Demostración:** La demostración de este teorema es altamente no-trivial y excede el objetivo de estas notas. Nos contentaremos con aceptarlo y mostrar su uso en el Cálculo de Schubert, remitiendo al lector a las referencias [Ch], [F] para una demostración completa. La dificultad esencial consiste en definir el producto de ciclos irreducibles $Y, Z$ cuya intersección no es propia (o sea, algún $W_i$ tiene codimensión menor que $r + s$) o bien no es transversal (i. e. $Y, Z$ son tangentes a lo largo de algún $W_i$). Para resolver la cuestión de intersecciones impropias un modo consiste en demostrar el llamado "Moving Lemma": existe un ciclo $c$ linealmente equivalente a $Y$ tal que $c$ y $Z$ se intersecan propiamente. Otro modo de tratar el problema de intersecciones impropias fué desarrollado más recientemente por Fulton y MacPherson [F]. En cuanto a las intersecciones no transversales se procede a asignar a cada $W_i$ un número natural $(Y, Z; W_i)$ (llamado "multiplicidad de intersección de $Y, Z$ a lo largo de $W_i$") tal que

$$[Y].[Z] = [\sum_{i=1}^{m}(Y, Z; W_i)W_i] \in A^{r+s}(X)$$

es una clase de ciclos bien definida y tal que se satisfacen los axiomas de anillo en $A(X)$.

(3.6) Grado de cero-ciclos. Consideremos la aplicación

$$\deg : \mathcal{C}_0(X) \to \mathbb{Z}$$

definida por deg $(\sum_{x\in X} n_x x) = \sum_{x\in X} n_x$, o sea, deg es el único morfismo de grupos que vale 1 en cada cero-ciclo irreducible (o sea, en cada punto $x \in X$). Se tiene el siguiente

(3.7) **Teorema:** Si $X$ es una variedad proyectiva no-singular entonces cero-ciclos en $X$ linealmente equivalentes tienen el mismo grado. De este modo deg pasa al cociente y define un morfismo de grupos

$$\deg\ : A_0(X) \to \mathbb{Z}$$

**Demostración:** También aceptaremos este resultado; una demostración se encuentra en [F], o también ver [H] para el caso (esencial) en que $X$ es una curva algebraica. Notar que el resultado es falso sin la hipótesis de proyectividad. Por ejemplo en $X = \mathbb{A}^1$ dos cero-ciclos cualesquiera son linealmente equivalentes (ejercicio).

(3.7) Clase de cohomología asociada a un ciclo. Supongamos que $X$ es una variedad algebraica no singular sobre el cuerpo de los números complejos. Existe un morfismo de anillos natural

$$\gamma : A(X) \to H(X)$$

donde $H(X)$ es el anillo de cohomogía (singular o De Rham) de $X$. Mucho de lo que estamos haciendo se puede formular reemplazando $A(X)$ por $H(X)$. Esto es especialmente cierto para variedades $X$ tales que $\gamma$ es un isomorfismo; esta clase de variedades justamente incluye a las Grassmannianas.

## §4 - Estructura del anillo de Chow de las Grassmannianas.

Suponemos que $K = \mathbb{C}$ es el cuerpo de los números complejos.

(4.1) Sea $X = \mathbb{G}(d,n)$ una Grassmanniana y sea $A_0 \subsetneq \cdots \subsetneq A_d$ una bandera en $\mathbb{P}^n$. Recordemos de (2.10) que la variedad de Schubert $[A_0,\ldots,A_d]$ es irreducible de dimensión $d(a) = \sum_{i=0}^{d} a_i - i$, donde $a_i = \dim A_i$.

(4.2) Consideremos dos banderas $A_0 \subsetneq \cdots \subsetneq A_d$ y $B_0 \subsetneq \cdots \subsetneq B_d$ tales que $\dim A_i = \dim B_i$ para todo $i$. Afirmamos que los ciclos de Schubert correspondientes son linealmente equivalentes. En efecto, como en (2.8) sea $f \in GL(n+1,K)$ tal que $f(A_i) = B_i$ para todo $i$. El automorfismo inducido $\tilde{f} : \mathbb{G}(d,n) \to \mathbb{G}(d,n)$ verifica entonces $\tilde{f}[A_0,\ldots,A_d] = [B_0,\ldots,B_d]$. Sea $f_t$ una curva en $GL(n+1,K)$ tal que $f_0 = 1_{d+1}$ y $f_1 = f$ (estamos trabajando sobre el cuerpo de los complejos, donde el grupo general lineal es conexo por arcos; que pasa con este argumento sobre los reales ?). Entonces la familia de ciclos $c_t = \tilde{f}_t[A_0,\ldots,A_d]$ define la equivalencia lineal anunciada.

(4.3) **Definición:** Sea $a$ un índice de Schubert y sea $A = (A_0 \subsetneq \cdots \subsetneq A_d)$ una bandera de tipo $a$. Denotamos

$$[a] = [a_0,\ldots,a_d] \in A_{d(a)}(\mathbb{G}(d,n))$$

la clase de equivalencia lineal de $[A_0,\ldots,A_d]$ (*clase de Schubert* correspondiente al índice $a$). Por (4.2), $[a]$ depende sólo de $a$ y no de la bandera elegida.

(4.4) **Definición:** Sea $a = (0 \le a_0 < \cdots < a_d \le n)$ un índice de Schubert. Definimos el índice de Schubert dual de $a$ como

$$a' = (0 \le n - a_d < \cdots < n - a_0 \le n)$$

Similarmente, decimos que la clase de equivalencia lineal $[a']$ es la clase dual de $[a]$. Observemos que $d(a) + d(a') = (d+1)(n-d) = \dim \mathbb{G}(d,n)$.

Gran parte del cálculo de Schubert se basa en los dos Teoremas siguientes.

(4.5) **Teorema:** (de la base) Las clases de Schubert constituyen una base de $A(\mathbb{G}(d,n))$ como grupo abeliano. Más precisamente, las clases $[a_0,\ldots,a_d]$ con $\sum_{i=0}^{d} a_i - i = N - r$ forman una base de $A^r(\mathbb{G}(d,n))$ para cada $r = 0,1,\ldots,N$, donde $N = (d+1)(n-d)$.

**Demostración:** Se demuestra (no dificilmente) que para toda variedad algebraica provista de una estratificación tal que las celdas son espacios afines, las clases de las clausuras de las celdas forman una base aditiva del anillo de Chow. Las Grassmannianas admiten una tal estratificación mediante variedades de Schubert, lo cual implica el resultado. Referimos a [F] para mayores detalles.

El próximo resultado describe la estructura multiplicativa de $A(\mathbb{G}(d,n))$, al menos en lo que respecta a multiplicación de clases de dimensión complementaria. En un resultado posterior (ver (4.9)) completaremos la descripción de la estructura multiplicativa. En virtud de (4.5), basta con expresar el producto de dos clases de Schubert como combinación lineal de clases de Schubert.

(4.6) **Teorema:** (estructura multiplicativa I) Sean $a$ y $b$ dos índices de Schubert tales que $d(a) + d(b) = N = \dim\, \mathbb{G}(d,n)$, de modo que el producto de clases de Schubert $[a].[b]$ pertenece a $A_0(\mathbb{G}(d,n))$. Entonces

$$\begin{aligned} \deg([a].[b]) &= 1 \qquad \text{para } b = a' \\ &= 0 \qquad \text{para } b \neq a' \end{aligned}$$

**Demostración:** Se eligen banderas $A$ y $B$ de tipos $a$ y $b$ respectivamente, en posición general. Resulta de las definiciones que la intersección de las correspondientes variedades de Schubert es: el conjunto vacío si $b \neq a'$ (lo cual implica la segunda igualdad) y un punto si $b = a'$. Para completar la demostración de la primera igualdad resta verificar que en dicho punto la intersección de las dos variedades de Schubert es transversal (ver (3.5)). Esto resulta de la descripción matricial de (2.10). Dejamos los detalles como un instructivo ejercicio para el lector.

(4.7) **Corolario:** Sea $z \in A^r(\mathbb{G}(d,n))$ una clase de equivalencia lineal de codimensión $r$. Entonces $z$ se expresa, de modo único, como combinación lineal de clases de Schubert

$$z = \sum_a \delta(a')a'$$

donde la suma se extiende al conjunto de índices de Schubert $a$ con $d(a) = r$ y los coeficientes (denominados "grados" o "caracteristicas" de $z$) son

$$\delta(a') = \deg(z.[a])$$

Si $w \in A^{N-r}(\mathbb{G}(d,n))$ es una clase de dimensión complementaria, escrita a su vez en términos de la base como

$$w = \sum_a \deg(w.[a'])a$$

entonces el grado del producto $z.w$ es

$$\deg(z.w) = \sum_a \deg(z.[a])\deg(w.[a'])$$

**Demostración:** Resulta inmediatamente a partir de (4.5) y (4.6) (Pitágoras).

(4.8) **Aplicaciones:** Los siguientes son ejemplos de aplicación de (4.7)

a) El Teorema de Bezout en $\mathbb{P}^n$ es un caso particular de (4.7). En efecto, para $d = 0$ se tiene $\mathbb{G}(0,n) = \mathbb{P}^n$, un índice de Schubert es $a = (0 \leq a_0 \leq n)$ y una bandera de tipo $a$ consiste de una variedad lineal $A_0 \subset \mathbb{P}^n$ de dimensión $a_0$. La variedad de Schubert $[A_0]$ es igual a $A_0$ y su clase de equivalencia lineal se denota $[a_0]$ como en (4.3). Una base del anillo de Chow está dada, de acuerdo con (4.5), por las clases de Schubert $[r], r = 0, \ldots, n$. La clase de Schubert dual de $[r]$ es $[n-r]$. Si $X \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad irreducible de dimensión $r$ entonces la clase de equivalencia lineal $[X]$ satisface, de acuerdo con (4.7)

$$[X] = \deg(X.[n-r])[r]$$

Notemos que $\deg(X.[n-r]) = \deg(X)$ es lo que usualmente se conoce como el grado de $X$. Si $Y \subset \mathbb{P}^n$ es otra variedad irreducible, de dimensión $n-r$, entonces del mismo modo $[Y] = \deg(Y)[n-r]$ y según (4.7)

$$\deg(X.Y) = \deg(X)\deg(Y)$$

b) Teorema de Halphen (ver [K]). Se denomina "congruencia" a una familia de rectas en $\mathbb{P}^3$ dependiendo de dos parámetros. Más precisamente, si $S \subset \mathbb{G}(1,3)$ es una superficie entonces las rectas de $\mathbb{P}^3$ que corresponden a los puntos de $S$ constituyen una congruencia. Planteamos la siguiente pregunta:

Cuál es el número de rectas comunes a dos congruencias dadas ?

La respuesta resulta de (4.7), del siguiente modo. En primer lugar, referimos a (2.7)a) para el detalle de las clases de Schubert de $\mathbb{G}(1,3)$. Sea $c$ una subvariedad irreducible de $\mathbb{G}(1,3)$ de dimensión dos. Como las clases de Schubert de dimensión dos son $[0,3]$ y $[1,2]$, resulta de (4.7) que

$$[c] = \alpha[0,3] + \beta[1,2]$$

donde $\alpha = \deg(c.[0,3])$ es el número de rectas de la congruencia que pasan por un punto $A_0 \in \mathbb{P}^3$ y $\beta = \deg(c.[1,2])$ es el número de rectas de la congruencia que están contenidas en un plano $A_1 \subset \mathbb{P}^3$. Notar que $(0,3)' = (0,3)$ y $(1,2)' = (1,2)$.

Si $c'$ es otra subvariedad irreducible de $\mathbb{G}(1,3)$ de dimensión dos, con clase de equivalencia lineal

$$[c'] = \alpha'[0,3] + \beta'[1,2]$$

entonces resulta de (4.7) que el número de rectas comunes a $c$ y $c'$ es

$$\deg(c.c') = \alpha\alpha' + \beta\beta'$$

lo cual es el Teorema de Halphen.

Un caso particular del Teorema de Halphen es el siguiente:

Sean $X, X' \subset \mathbb{P}^3$ dos curvas algebraicas. Cuál es el número de rectas $L \subset \mathbb{P}^3$ que son secantes comunes de $X$ y $X'$ ? (una recta secante es una recta que corta a la curva en al menos dos puntos).

Es claro que el conjunto de las rectas secantes a $X$ forma una congruencia $c$. Supongamos que $X$ tiene grado $d$ y género $g$. Entonces, manteniendo la notación anterior, $\alpha$ es el número de rectas secantes que pasan por un punto $A_0 \in \mathbb{P}^3$. Proyectando desde $A_0$ sobre un $\mathbb{P}^2$ resulta de la fórmula del género para curvas planas con puntos singulares (ver [H], [G-H]) que $\alpha = (d-1)(d-2)/2 - g$. Por otra parte es claro que el número $\beta$ de secantes contenidas en un plano es $\beta = d(d-1)/2$. Por el Teorema de Halphen, el número de secantes comunes es

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = ((d-1)(d-2)/2 - g)((d'-1)(d'-2)/2 - g') + dd'(d-1)(d'-1)/4$$

En [K], [Z-P] se pueden encontrar varios otros ejemplos de aplicación de (4.7).

(4.9) Ahora nos proponemos completar la descripción de la estructura multiplicatiava de $A(\mathbb{G}(d,n))$ iniciada en (4.6). Para esto consideramos ciertas clases de Schubert, llamadas *clases de Schubert especiales.* Para cada $h = 0, 1, 2, \ldots, n-d$ consideramos el índice de Schubert $a_h = (h, n-d+1, n-d+2, \ldots, n)$ y la correspondiente clase de Schubert

$$\sigma_h = [h, n-d+1, n-d+2, \ldots, n] \in A(\mathbb{G}(d,n))$$

Resulta de (2.7) c) que $\sigma_h$ es la clase de equivalencia lineal de la variedad de Schubert $\{L \in \mathbb{G}(d,n)/L \cap A_0 \neq \emptyset\}$, donde $A_0 \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad lineal de dimensión $h$.

(4.10) **Teorema:** (estructura multiplicativa II)
a) Las clases de Schubert especiales $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-d}$ generan $A(\mathbb{G}(d,n))$ como $\mathbb{Z}$-álgebra. Más precisamente, para todo índice de Schubert $a$ vale la *Fórmula de Giambelli*:

$$[a_0, \ldots, a_d] = \det\, (\sigma_{a_i - j})_{0 \leq i \leq d,\ 0 \leq j \leq d}$$

donde escribimos $\sigma_h = 0$ para $h \notin [0, n-d]$.
b) El producto entre una clase de Schubert $[a_0, \ldots, a_d]$ y una clase de Schubert especial $\sigma_h$ está dado por la *Fórmula de Pieri*:

$$[a_0, \ldots, a_d].\sigma_h = \sum_b\, [b_0, \ldots, b_d]$$

donde la suma se extiende a todos los índices de Schubert $b = (b_0, \ldots, b_d)$ tales que

$$\sum_i b_i = \sum_i a_i - (n-d-h)$$
$$0 \leq b_0 \leq a_0 < b_1 \leq a_1 < \cdots \leq a_{d-1} < b_d \leq a_d \leq n$$

**Demostración:** Referimos a [F], [G-H], [M].

(4.11) **Observación:** Combinando (4.10) a) y b) se puede calcular el producto de dos clases de Schubert cualesquiera.

(4.12) **Ejemplo:** Como aplicación de (4.10), consideramos nuevamente el problema de las cuatro rectas. Retomando el razonamiento de (1.6) y con la notación de (2.7) a), el número de rectas que cortan a cuatro rectas dadas en posición general es deg $(\sigma_1^4)$ donde $\sigma_1 = (1,3)$ es la clase de Schubert especial, correspondiente al ciclo de Schubert de las rectas que cortan a una recta fija. Usando la fórmula de Pieri,

$$\sigma_1^2 = (1,3).\sigma_1 = (0,3) + (1,2)$$

Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta (4.6) obtenemos

$$\sigma_1^4 = (0,3)^2 + (1,2)^2 + 2(0,3).(1,2) = 0 + 0 + 2 = 2$$

lo cual coincide con el resultado obtenido en (1.4) por el Principio de Continuidad.

(4.13) **Ejemplo:** Generalizando el problema de las cuatro rectas, el número de variedades lineales de dimensión $d$ en $\mathbb{P}^n$ que cortan a $N = (d+1)(n-d)$ variedades lineales de dimensión $n-d-1$ en posición general es

$$\deg\ (\sigma_1^N) = \frac{1!\ 2!\ 3!\ \ldots\ d!\ N!}{(n-d)!\ (n-d+1)!\ \ldots\ n!}$$

Proponemos como ejercicio la verificación de esta igualdad a partir de la fórmula de Pieri. Notemos de paso que deg $(\sigma_1^N)$ es el grado de $\mathbb{G}(d,n)$ en la inmersión de Plücker.

(4.14) **Ejemplo:** Sea $X \subset \mathbb{P}^3$ una curva algebraica de grado $d$. Denotemos

$$\tilde{X} = \{L \in \mathbb{G}(1,3) / L \cap X \neq \emptyset\}$$

el conjunto de rectas que cortan a $X$. Se verifica que $\tilde{X} \subset \mathbb{G}(1,3)$ es una subvariedad irreducible y que su clase de equivalencia lineal es $[\tilde{X}] = d\sigma_1$ (degenerar $X$ a una unión de $d$ rectas, ver [K]). Sean ahora $X_1, X_2, X_3, X_4$ cuatro curvas en $\mathbb{P}^3$, de grados $d_1, d_2, d_3, d_4$. Preguntamos cuál es el número $m$ de rectas $L$ que cortan a las cuatro curvas (otra generalización del problema de las cuatro rectas). Aplicando el método ya familiar,

$$m = \deg\ ([\tilde{X}_1][\tilde{X}_2][\tilde{X}_3][\tilde{X}_4]) = \deg\ (\sigma_1^4) d_1 d_2 d_3 d_4 = 2 d_1 d_2 d_3 d_4$$

Para otras aplicaciones y ejemplos se recomienda consultar [F], [K], [Z-P], [G-H].

En las referencias se puede encontrar también otros temas estrechamente vinculados con el cálculo de Schubert como variedades determinantales, fibrados vectoriales y clases de Chern, representaciones de grupos de Lie, funciones simétricas y representaciones del grupo simétrico.

## References


[**Ch**] C. Chevalley, *Aneaux de Chow et applications*, Seminaire Chevalley - ENS (1958).

[**F1**] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer-Verlag (1984).

[**F2**] W. Fulton, *Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics (AMS) **54** (1996).

[**F3**] W. Fulton, *Young Tableaux*, Student Texts - London Mathematical Society **35** (1997).

[**G-H**] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience (1978).

[**H**] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977).

[**K**] S. Kleiman, *Problem 15: Rigorous Foundation of Schubert's Enumerative Calculus*, Mathematical developments arising from Hilbert Problems, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (AMS), **28** (1976), 445-482.

[**K-L**] S. Kleiman and D. Laksov, *Schubert Calculus*, American Math. Monthly **79** (1972), 1061-1082.

[**M**] L. Manivel, *Fonctions Symmetriques, Polynomes de Schubert et lieux de degenerescence*, Cours Specialises - Societe Mathematique de France **3** (1998).

[**Z-P**] H. Zeuthen et M. Pieri, *Geometrie Enumerative*, Encyclopedie des Sciences Mathematiques Pures et Appliquees, disponible en http://gallica.bnf.fr, **III-2** (1915), 260-331.