

Topología

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2005

PRÁCTICA 8

Revestimientos.

- 1) Probar que si $p : E \rightarrow B$ es un revestimiento, entonces es una aplicación abierta.
- 2) Probar que si $p : E \rightarrow B$ y $p' : E' \rightarrow B'$ son revestimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$ es un revestimiento.
- 3) Sea Y un espacio topológico discreto. Probar que dado X cualquier espacio topológico, la proyección en la primer coordenada $p : X \times Y \rightarrow X$ es un revestimiento.
- 4) Probar que $p : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow S^1$ definida por $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ es un homeo local pero no es revestimiento.
- 5) Verificar que los siguientes son revestimientos.
 - a) $p : S^1 \rightarrow S^1$, $p(x) = x^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
 - b) $p : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la proyección al espacio proyectivo real de dimensión n .
- 6) a) Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento, y sea $B' \subset B$. Sea $E' = p^{-1}(B')$. Probar que $p|_{E'} : E' \rightarrow B'$ es un revestimiento.
b) Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{Z} \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\}$ y sea $B = \{(z, w) \in S^1 \times S^1, z = 1 \text{ ó } w = 1\}$ (donde S^1 lo vemos como subespacio de \mathbb{C}). Probar que $p : E \rightarrow B$ definida por $p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ es un revestimiento.
- 7) Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento, con B conexo. Probar que si $p^{-1}(b_0)$ tiene k elementos para algún $b_0 \in B$, entonces $p^{-1}(b)$ tiene k elementos para todo $b \in B$. En ese caso se dice que $p : E \rightarrow B$ es finito y que tiene grado k , o que es un revestimiento con k -hojas.
- 8) Sean $p : X \rightarrow Y$ y $q : Y \rightarrow Z$ revestimientos.
 - a) Probar que si $q^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces $q \circ p : X \rightarrow Z$ es un revestimiento.
 - b) Probar que el teorema falla si $q^{-1}(z)$ no es finito.
- 9) Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento. Supongamos que B es conexo y localmente conexo. Mostrar que si C es una componente de E , entonces $p|_C : C \rightarrow B$ es un revestimiento.
- 10) Sea X un G -espacio tal que la acción es propiamente discontinua. Probar que la proyección $p : X \rightarrow X/G$ es un revestimiento.
Observar que el revestimiento usual $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ es un ejemplo de esta construcción. Encuentre en esta práctica otros ejemplos.

- 11) a) Sea X simplemente conexo y localmente arco conexo y sean $f, g : X \rightarrow S^1$. Probar que f y g son homotópicas.
- b) Probar que toda función continua del plano proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ a S^1 es null homotópica ($n \geq 2$).
- c) Probar que no existe $f : S^n \rightarrow S^1$ que preserve antípodas ($n \geq 2$).
(Sugerencia: una tal f induce una función $\bar{f} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow S^1$ que aplica el elemento no nulo de $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ en un elemento no nulo.)
- 12) Consideremos el toro $T = S^1 \times S^1$. Sabemos que su grupo fundamental es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y que su revestimiento universal es el producto de dos copias del revestimiento universal de S^1 . Dados los siguientes subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hallar el revestimiento correspondiente.
- a) El subgrupo generado por el elemento $(1, 0)$.
- b) El subgrupo generado por el elemento $(1, 1)$.
- c) El subgrupo $H = \{(2n, 2m) : m, n \in \mathbb{Z}\}$.
- 13) * Sea $p : E \rightarrow X$ un revestimiento, con X, E arco conexos. Sea $x_0 \in X$ y denotemos $F = p^{-1}(x_0)$ la fibra sobre x_0 , $\pi = \pi_1(X, x_0)$ el grupo fundamental y G el grupo de automorfismos de $p : E \rightarrow X$ (aplicaciones continuas $E \rightarrow E$ que conmutan con p). Para cada $g \in G$ denotamos $\rho(g) : F \rightarrow F$ la restricción de g a F .
- Demostrar:
- a) $\rho : G \rightarrow \mathbb{S}(F)$ es un morfismo de grupos inyectivo de G en el grupo simétrico de F .
Sea $\mu : \pi \rightarrow \mathbb{S}(F)$ el morfismo de monodromía (definido en clase vía levantamiento de lazos). Entonces las correspondientes acciones de G y π en F conmutan.
- b) La acción de G en F tiene estabilizadores triviales (o sea, $g.e = e$ implica $g = 1$).
Deducir que $|G| \leq |F|$.
- c) Dar ejemplos de revestimientos finitos con $|G| = |F|$ (numero máximo de automorfismos) y de revestimientos con $|G| = 1$ (no triviales).
Se dice que $p : E \rightarrow X$ es un *revestimiento normal* (o *regular*, o *de Galois*) si la acción de G en F es transitiva.
- d) Un revestimiento finito es normal si y sólo si $|G| = |F|$.
- e) Sea $e_0 \in F$ y denotemos $H = p_*\pi_1(E, e_0) \subset \pi$. Entonces $p : E \rightarrow X$ es un revestimiento normal si y sólo si H es un subgrupo normal de π .
- f) Sea $N(H) = \{[\sigma] \in \pi / [\sigma].H = H.[\sigma]\}$ el normalizador de H . Demostrar que los grupos $N(H)/H$ y G son isomorfos.
Sugerencia: Definir un morfismo sobreyectivo $N(H) \rightarrow G$ con núcleo H . Puede ser conveniente demostrar f) en primer lugar y luego deducir los puntos anteriores.
- 14) Sea X un G -espacio arco-conexo, donde la acción de G en X es propiamente discontinua. Probar que el revestimiento $p : X \rightarrow X/G$ es normal.
(Sugerencia: considerar las multiplicaciones por elementos de G .)

- 15) Sea $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$ el revestimiento usual del toro. Describir el grupo de automorfismos de p .
- 16) * Sea P_d el conjunto de polinomios mónicos de grado d con coeficientes complejos en una variable, provisto de la topología inducida por la biyección $P_d \cong \mathbb{C}^d$ que asigna a un polinomio sus coeficientes, donde por supuesto damos a \mathbb{C} la topología usual. Sea $R_d = \{(f, t) \in P_d \times \mathbb{C} / f(t) = 0\}$ (con la topología de subespacio del producto) y denotemos $p_1 : R_d \rightarrow P_d$ la primera proyección. Sea $X \subset P_d$ el conjunto de los polinomios con raíces simples (o sea, sin raíces múltiples) y denotemos $p : E = p_1^{-1}(X) \rightarrow X$ la restricción de p_1 .

Demostrar:

- a) X es un abierto denso conexo.

Sugerencia: $X = P_d - (\Delta = 0)$, donde Δ es el discriminante.

- b) E es conexo.

- c) p es un revestimiento de grado d .

- d) El grupo de automorfismos de p es $\{1\}$.

- e) El morfismo de monodromía $\pi_1(X) \rightarrow \mathbb{S}_d$ es sobreyectivo.

- f) Reemplazar \mathbb{C} por \mathbb{R} y pensar cuáles son las modificaciones que corresponde hacer.

Referencia: J. Harris, Galois groups of enumerative problems, Duke Mathematical Journal, vol. 46 (1979).

- 17) **Existencia de clausura normal.** Sea $p : E \rightarrow X$ un revestimiento. Existe un único (salvo isomorfismo) revestimiento normal $\bar{p} : \bar{E} \rightarrow X$ tal que:

- a) $\bar{p} \geq p$ (o sea, existe $q : \bar{E} \rightarrow E$ morfismo de revestimientos)

- b) Si $p' : E' \rightarrow X$ es normal y $p' \geq p$ entonces $p' \geq \bar{p}$

Ademas, si H es el subgrupo (salvo conjugación) de π correspondiente a p , ¿cuál es el subgrupo correspondiente a \bar{p} ?