EJERCICIOS SOBRE GEOMETRIA DEL ESPACIO DE MATRICES
INTRODUCCION A LA GEOMETRIA ALGEBRAICA 2002

Fernando Cukierman

Sea K un cuerpo. Consideremos el espacio vectorial $K^{m\times n}$ de todas las matrices $m\times n$ con coeficientes en K. Denotamos $\mathcal{A} = K_{m\times n} = K[x_{ij}, 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n]$ el anillo de polinomios en las mn variables x_{ij}.

La matriz $X = (x_{ij}) \in \mathcal{A}^{m\times n}$ se denomina matriz generica de $m \times n$.

Estos son problemas para ir pensando. El grado de dificultad es heterogeneo. Suponer K algebraicamente cerrado donde haga falta.

1) a) Sea $m = n$ y consideremos el determinante de la matriz generica $\det(X) \in \mathcal{A}$. Es un polinomio homogeneo de grado n en las n^2 variables x_{ij}. Demostrar que es un polinomio irreducible.
b) Sea $\Delta = \Delta(n, K) = \{a \in K^{n\times n},\ \det(a) = 0\}$. Demostrar que Δ es una hipersuperficie irreducible y que su conjunto de puntos singulares $S(\Delta)$ consiste de las matrices de rango $\leq n-2$.

2) a) Sea $U \subset K^{n\times n}$ el conjunto de las matrices con autovalores distintos. Demostrar que U es un abierto Zariski denso en $K^{n\times n}$.
(Sug.: considerar el discriminante del polinomio caracteristico de la matriz generica)
b) Deducir el teorema de Cayley-Hamilton
(Sug.: Basta con demostrar el teorema para matrices que pertenecen a cualquier abierto Zariski, lo cual a veces se llama principio de permanencia de identidades algebraicas. Por a), basta con demostrarlo para matrices con autovalores distintos. Reducir al caso de matrices diagonales).

3) Sea G un grupo algebraico (o sea, G es una variedad algebraica y tambien es un grupo tal que la aplicacion de multiplicacion y la aplicacion de inversa son regulares). Sea X una variedad algebraica y $\alpha : G \times X \to X$ una accion regular (o sea, α es una accion del grupo G en el conjunto X y es una aplicacion regular de variedades).
a) Demostrar que si G es irreducible entonces cada orbita $G.x \subset X$ es irreducible.
(Sug.: la imagen de un irreducible es irreducible)
b) Para $x \in X$ denotemos $G_x = \{g \in G,\ g.x = x\}$ el estabilizador de x. Demostrar que $\dim(G.x) = \dim(G) - \dim(G_x)$.
c) Demostrar que el grupo $\mathrm{GL}(n, K)$ es irreducible.

4) Para subconjuntos $A \subset \{1, \ldots, m\}$, $B \subset \{1, \ldots, n\}$ sea $X_{AB} = (x_{ij})_{i\in A, j\in B}$ la matriz generica con filas en A y columnas en B. Si $|A| = |B|$ denotamos

$$\delta_{AB} = \det(X_{AB}) \in \mathcal{A}$$

Para $r \leq \min\{m, n\}$ sea $J_r \subset \mathcal{A}$ el ideal generado por todos los polinomios δ_{AB} con $|A| = |B| = r + 1$. Demostrar:
a) El conjunto de ceros de J_r es el conjunto $\Delta_r \subset K^{m\times n}$ de las matrices de rango $\leq r$.
b) El conjunto cuasi-afin $\Delta(r) = \Delta_r - \Delta_{r-1}$ de las matrices de rango igual a r es irreducible.
(Sug.: $\Delta(r)$ es una orbita de $G = \mathrm{GL}(m, K) \times \mathrm{GL}(n, K)$ actuando en $K^{m\times n}$ via $(g, h).a = gah^{-1}$).
c) Δ_r es la clausura Zariski de $\Delta(r)$. Por lo tanto, es un conjunto algebraico afin irreducible.
d) La dimension de Δ_r es $r(m + n - r)$.
(Sug.: correspondencia de incidencia).
e) $\mathcal{I}(\Delta_r) = J_r$. Por el teorema de los ceros de Hilbert, esto equivale a decir que J_r es un ideal radical. En virtud de c), tambien equivale a que J_r es un ideal primo.
(Obs.: este es un teorema no trivial).
f) El conjunto de puntos singulares $S(\Delta_r)$ es Δ_{r-1}.
(Sug.: aceptar e) y calcular las derivadas parciales de los δ_{AB}).

5) Sea $N \subset K^{n\times n}$ el conjunto de matrices nilpotentes. Es un conjunto algebraico afin definido por la ecuacion matricial $X^n = 0$. Determinar: ideal, dimension, componentes irreducibles, singularidades. Similarmente y mas en general para $N_k = \{a \in K^{n\times n}, a^k = 0\}$ para cada $k \leq n$.

6) Sea $\alpha \in K^{n\times n}$ una matriz de Jordan (α es una matriz diagonal en bloques, cada bloque es

un bloque de Jordan). Denotemos J el conjunto de todas las matrices de Jordan. Para cada $\alpha \in J$ sea $[\alpha] \subset K^{n\times n}$ el conjunto de las matrices semejantes a α. El grupo $G = \mathrm{GL}(n, K)$ actua en $K^{n\times n}$ via $g.a = gag^{-1}$ y $[\alpha]$ es justamente la orbita de α. La teoria de la forma de Jordan dice que $K^{n\times n}$ es la union disjunta de los $[\alpha]$ para $\alpha \in J$.
a) Denotemos $|\alpha|$ la clausura Zariski de $[\alpha]$. Demostrar que $|\alpha|$ es un conjunto algebraico afin irreducible.
b) Determinar la dimension de $|\alpha|$ para cada $\alpha \in J$.
c) Demostrar que $|\alpha|$ es una union disjunta de conjuntos $[\beta]$ para ciertos $\beta \in J$. Cuales β aparecen ? (o sea, cuales formas de Jordan son caso limite de una forma de Jordan dada ?) La relacion $\beta \leq \alpha$ si $[\beta] \subset |\alpha|$ es una relacion de orden en el conjunto J; explicitarla.