

---

# GEOMETRÍA PROYECTIVA

## Segundo Cuatrimestre — 2011

### Práctica 6: Curvas algebraicas afines

---

1. Grafique las curvas en  $\mathbb{R}^2$  dadas por la ecuación  $f(X, Y) = 0$ :

- (a)  $f = Y - X^2$
- (b)  $f = Y - X^3 + X$
- (c)  $f = Y^2 - X^3$
- (d)  $f = Y^2 - X^3 - X^2$
- (e)  $f = (X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$
- (f)  $f = (X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2$
- (g)  $f = X^2 + X^3 + Y^2$
- (h)  $f = 2X^4 - 3X^2Y + Y^2 - 2Y^3 + Y^4$
- (i)  $f = X^4 + X^2Y^2 - 2X^2Y - XY^2 + Y^2$
- (j)  $f = X^6 - X^2Y^3 - Y^5$

2. Pruebe que las curvas planas definidas por los siguientes polinomios tienen a  $p = (0, 0)$  como único punto singular.

- (a)  $Y^2 - X^3$
- (b)  $Y^2 - X^3 - X^2$
- (c)  $(X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$
- (d)  $(X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2$

3. Encuentre los puntos singulares y las rectas tangentes en ellos de cada una de las siguientes curvas:

- (a)  $Y^3 - Y^2 + X^3 - X^2 + 3Y^2X + 3X^2Y + 2XY$
- (b)  $X^4 + Y^4 - X^2Y^2$
- (c)  $X^3 + Y^3 - 3X^2 - 3Y^2 + 3XY + 1$
- (d)  $Y^2 + (X^2 - 5)(4X^4 - 20X^2 + 25)$

4. Sea  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado, sea  $f \in K[x, y]$  y sea  $p$  un punto singular de la curva afín  $C(f)$  definida por  $f$ . Decimos que  $p$  es un *nodo* si  $f$  tiene multiplicidad dos en  $p$  y su forma inicial es producto de dos factores lineales distintos. Pruebe que  $p$  es un nodo si y sólo si tiene multiplicidad al menos dos en  $C(f)$  y  $f_{xy}^2(p) \neq f_{xx}(p)f_{yy}(p)$ .

5. La curva en  $\mathbb{R}^2$  definida en coordenadas polares por

$$r = 4a \cos^3 \frac{1}{3} \theta, \quad -\frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$$

es una séxtica de ecuación

$$4(x^2 + y^2 - ax)^3 = 27a^2(x^2 + y^2)^2.$$

Esta curva es conocida como la *séxtica de Cayley*.

6. La curva en  $\mathbb{C}^2$  parametrizada por

$$\alpha(t) = (a \sin(nt + d), b \sin(t)), \quad t \in \mathbb{C}$$

es llamada una curva de Lissajous.

- (a) Muestre que si  $n$  es racional, entonces la curva es una curva algebraica.
- (b) Haga gráficos para varios valores de  $a$ ,  $b$ ,  $n$  y  $d$ .

7. Para cada  $d > 0$  hay curvas en el plano afín complejo que son irreducibles, no singulares y de grado  $d$ .

8. Sea  $T : k^2 \rightarrow k^2$  una *aplicación polinómica*, esto es, una función  $k^2 \rightarrow k^2$  tal que existen  $T_1, T_2 \in k[X, Y]$  con  $T(x, y) = (T_1(x, y), T_2(x, y))$  para todo  $(x, y) \in k^2$ . Si  $f \in k[X, Y]$ , definimos  $f^T \in k[X, Y]$  poniendo

$$f^T(X, Y) = f(T_1(X, Y), T_2(X, Y))$$

y denotamos por  $m_p(f)$  la multiplicidad de  $f$  en  $p \in k^2$ .

- (a) Sea  $q \in k^2$  y  $p = T(q)$ . Si la matriz jacobiana de  $T$  en  $q$  es inversible, entonces  $m_q(f^T) = m_p(f)$ .
- (b) La implicación recíproca es falsa. Para verlo, considere la función tal que  $T(X, Y) = (X^2, Y)$ , el polinomio  $f = Y - X^2$  y  $p = q = (0, 0)$ .

9. Calcule las direcciones asintóticas y las asíntotas de las curvas algebraicas definidas por los siguientes polinomios:

- (a)  $X^2 - Y^2 - 1$
- (b)  $X^2 + Y^2 - 1$
- (c)  $Y - X^2$
- (d)  $Y^2 - X^2 + X^3$
- (e)  $Y^2 - X^3 + X$
- (f)  $X^n + Y^n - 1$
- (g)  $X^n - Y^m$
- (h)  $Y^2 - f(X)$ , con  $f \in k[X]$  de grado  $n$ .

10. (a) Si  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  son dos polinomios homogéneos de grado  $r$  y  $r+1$ , respectivamente, y sin factores comunes, entonces  $f + g$  es irreducible.

(b) Dadas rectas  $L_1, \dots, L_n$  y enteros no negativos  $r_1, \dots, r_n$ , existen curvas irreducibles que tienen a cada  $L_i$  como recta tangente de multiplicidad  $r_i$ .

*Sugerencia.* Si para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f_i$  es una ecuación de la recta  $L_i$ , considere un polinomio  $f = \prod_{i=1}^n f_i^{r_i} + g$  con  $g$  un polinomio homogéneo de grado  $1 + \sum_{i=1}^n r_i$  elegido de manera que  $f$  sea irreducible.

11. Si  $k$  es un cuerpo y  $d \geq 0$ , denotemos  $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d} \subset k[X_1, \dots, X_n]$  al subespacio generado por los polinomios de grado menor o igual a  $d$ , y  $k[X_1, \dots, X_n]_d$  a subespacio generado por los polinomios homogéneos de grado  $d$  o nulos.

- (a)  $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d}$  y  $k[X_1, \dots, X_n]_d$  son subespacios vectoriales de  $k[X_1, \dots, X_n]$ . El conjunto de los monomios que tienen grado a lo sumo  $d$  es una base de  $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d}$ , y el conjunto de los monomios de grado  $d$  es una base de  $k[X_1, \dots, X_n]_d$ .

(b) Mostrar que

$$\dim k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d} = \binom{n+d}{d}$$

y

$$\dim k[X_0, \dots, X_n]_d = \binom{n+d}{d}.$$

12. Si  $f \neq 0$  en  $k[X_1, \dots, X_n]$ , entonces

$$f \in k[X_1, \dots, X_n]_d \iff f(tX_1, \dots, tX_n) = t^d f(X_1, \dots, X_n).$$

A la derecha, a igualdad es entre elementos de  $k[t, X_1, \dots, X_n]$ .

13. Si  $F \in k[X_1, \dots, X_n]_d$ , entonces vale la “fórmula de Euler”,

$$\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial F}{\partial X_i} = dF.$$

14. (a) Si  $F, G \in k[X_1, \dots, X_n]$  son polinomios homogéneos de grados  $r$  y  $s$ , respectivamente, entonces  $FG$  es homogéneo de grado  $r + s$ .

(b) Todo factor de un polinomio homogéneo es homogéneo.

15. *Homogeneización y deshomogeneización de polinomios.* Si  $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ , sea  $F_* \in k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d}$  el polinomio

$$F_*(X_1, \dots, X_n) = F(1, X_1, \dots, X_n)$$

Si  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  es un polinomio de grado  $d$ , sea  $f^* \in k[X_0, \dots, X_n]_d$  dado por

$$f^*(X_0, \dots, X_n) = X_0^d f\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right).$$

(a) Si  $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$  y  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ , encuentre expresiones explícitas para los coeficientes de  $F_*$  y de  $f^*$ .

(b) Si  $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$  y  $G \in k[X_0, \dots, X_n]_e$ , y  $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$ , entonces  $(FG)_* = F_* G_*$  y  $(fg)^* = f^* g^*$ .

(c) Si  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ , entonces  $(f^*)_* = f$ .

(d) Si  $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$  y  $r$  es la mayor potencia de  $X_0$  que divide a  $F$ , entonces  $X^r (F_*)^* = F$ .

(e) Si  $F, G \in k[X_0, \dots, X_n]_d$  y  $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$ , entonces  $(F + G)_* = F_* + G_*$  y  $X_0^t (f + g)^* = X_0^e f^* + X_0^d g^*$ , con  $d = \text{gr } f$ ,  $e = \text{gr } g$  y  $t = d + e - \text{gr}(f + g)$ .

16. Sea  $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$  un polinomio no divisible por  $X_0$  y sea  $f = F_*$ , como en el ejercicio anterior.

(a) Los polinomios  $f$  y  $F$  tienen el mismo grado.

(b) Todo divisor no nulo de  $F$  es homogéneo.

(c) Hay una correspondencia biyectiva entre los divisores de  $F$  y los de  $f$ . En particular,  $F$  es irreducible si y sólo si  $f$  lo es.

17. Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado. Si  $F \in k[X, Y]_d$ , entonces existen  $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in k$  tales que  $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$  para todo  $i \in \{1, \dots, d\}$  y

$$F(X, Y) = \prod_{i=1}^d (a_i X + b_i Y).$$

18. Si  $k$  un cuerpo infinito, entonces un polinomio  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  tal que  $f(a_0, \dots, a_n) = 0$  para todo  $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$  es nulo.

19. Sea  $A$  un dominio de integridad y sean  $f, g \in A[X]$  dos polinomios de grado positivo, digamos

$$f = f_0 + f_1 X + \dots + f_n X^n, \quad g = g_0 + g_1 X + \dots + g_m X^m$$

con  $f_n$  y  $g_m$  no nulos. La *resultante* de  $f$  y  $g$  es el determinante

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \dots & \dots & \dots & f_n & & & \\ & f_0 & f_1 & \dots & \dots & \dots & f_n & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & f_0 & f_1 & \dots & \dots & \dots & f_n \\ g_0 & g_1 & \dots & \dots & g_m & & & & \\ & g_0 & g_1 & \dots & \dots & g_m & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & g_0 & g_1 & \dots & \dots & g_m \end{vmatrix};$$

notemos que se trata de una matrix  $(m+n) \times (m+n)$ .

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $f$  y  $g$  tienen un factor común de grado positivo.
- (ii) Existen polinomios no nulos  $\phi, \psi \in A[X]$ , de grados menores que  $n$  y que  $m$ , respectivamente, tales que  $\psi f = \phi g$ .
- (iii) Existen polinomios  $a, b \in A[X]$  tales que  $\text{gr } a < \text{gr } g$ ,  $\text{gr } b < \text{gr } f$  y  $af + bg = 0$ .
- (iv)  $R(f, g) = 0$ .

20. Sea  $A$  un dominio de integridad. Si  $f, g \in A[X]$ , entonces existen  $p, q \in A[X]$  tales que  $R(f, g) = pf + qg$ .

21. Sea  $k$  un cuerpo. Podemos pensar a los elementos de  $k[X, Y]$  como elementos de  $A[Y]$  con  $A = k[X]$ . Si  $f, g \in k[X, Y]$ , podemos entonces calcular la resultante de  $f$  y  $g$  como polinomios en  $Y$ : la notamos  $R_Y(f, g) \in A$ .

Enuncie los resultados del ejercicio 19 en este caso especial. En particular, pruebe que si  $k$  es algebraicamente cerrado y  $a \in K$ , entonces

$$R_Y(f, g)(a) = 0 \iff \exists b \in k : f(a, b) = g(a, b) = 0.$$

Generalice esto a la situación en que  $f, g \in k[X_1, \dots, X_n] = k[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$ .

22. Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado y sean  $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$ . Supongamos que  $f$  es irreducible.

- (a) Se tiene que  $C(f) \subseteq C(g)$  si y solamente si  $f$  divide a  $g$ .
- (b) Si  $g$  también es irreducible y  $C(f) = C(g)$ , entonces  $f = ug$  con  $u \in k^\times$ .

- (c) Exhiba un contraejemplo de la última afirmación cuando el cuerpo de base no es algebraicamente cerrado.

**23.** Sean  $F, G \in k[X_0, X_1, \dots, X_n]$  dos polinomios homogéneos de grado  $d$  y  $e$ , respectivamente.

Si  $R = R_{X_0}(X_1, \dots, X_n)$  es la resultante de  $F$  y  $G$  con respecto de  $X_0$ , entonces  $R$  es un elemento de  $k[X_1, \dots, X_n]$  homogéneo de grado  $de$ .

**24.** Si  $f, g \in k[X]$  son polinomios mónicos con coeficientes en un cuerpo  $k$ , con factorizaciones  $f = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$  y  $g = \prod_{j=1}^m (x - \beta_j)$  en  $k[X]$ , entonces

$$R(f, g) = u \prod_{1 \leq i, j \leq n} (\alpha_i - \beta_j)$$

para algún  $u \in k^\times$  que depende solamente de  $n$  y de  $m$ .

**25.** Sea  $A$  un dominio de integridad y sean  $f, g \in A[X]$  dos polinomios mónicos. Sea  $\varphi : A[X]/(g) \rightarrow A[X]/(g)$  el homomorfismo de  $A$ -módulos tal que  $\varphi(\bar{h}) = \overline{fh}$  para todo  $h \in A[X]$ . Muestre que  $\det(\varphi) = R(f, g)$ ; observe que como el  $A$ -módulo  $A[X]/(g)$  es libre, esto tiene sentido.

**26.** Sea  $f \in k[X, Y]$  un polinomio de grado  $d$  y sea  $C = C(f)$  la curva afín plana que determina. Si  $L$  es una recta en  $k^2$  que no está contenida en  $C$ , entonces el conjunto  $L \cap C$  es finito y tiene a lo sumo  $d$  puntos.

**27.** Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado y sea  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  un polinomio no constante. El conjunto  $k^n \setminus C(f)$  es infinito si  $n \geq 1$  y  $C(f)$  es infinito si  $n \geq 2$ .

- 28.** (a) Una curva plana irreducible posee un número finito de puntos singulares.  
(b) ¿Es esto cierto para hipersuperficies en  $k^n$ ,  $n \geq 3$ ?



James Joseph Sylvester  
1814–1897, Inglaterra

Sylvester introdujo la matriz descrita arriba para calcular la resultante de dos polinomios.