

---

# GEOMETRÍA PROYECTIVA

## Segundo Cuatrimestre — 2011

### Práctica 1: Curvas planas

---

1. La *lemniscata*. Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función

$$\alpha(t) = \left( t \frac{1+t^2}{1+t^4}, t \frac{1-t^2}{1+t^4} \right).$$

- (a) La curva  $\alpha$  es diferenciable, regular y simple.
  - (b) Determine  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t)$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t)$  y concluya que  $\alpha$  no es un homeomorfismo entre  $\mathbb{R}$  y su traza.
2. Un disco circular de radio 1 rueda en el plano  $xy$  sin resbalar sobre el eje  $x$ . La figura descrita por un punto fijo sobre la circunferencia del disco se llama *cicloide*.
- (a) Obtenga una parametrización del cicloide y determine sus puntos singulares.
  - (b) Calcule la longitud de arco del cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

3. Sea  $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(\theta) = (\sin(\theta), \cos(\theta) + \log(\tan(\frac{\theta}{2}))).$$

La traza de  $\alpha$  es llamada *tractriz*.

- (a) La curva  $\alpha$  es diferenciable pero no regular.
- (b) La longitud del segmento de la tangente de la tractriz entre el punto de tangencia y la intersección con el eje  $y$  es siempre 1.

4. Sea  $\alpha : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = \left( \frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right).$$

- (a)  $\alpha$  es tangente al eje  $x$  en  $t = 0$ .
- (b) Se tiene que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = (0, 0)$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha'(t) = (0, 0)$ .
- (c) Cuando  $t \rightarrow -1$  esta curva y su tangente se aproximan a la recta  $x + y + a = 0$ .

La figura que se obtiene completando la curva con su simétrica respecto de la recta  $y = x$  se llama *folio de Descartes*.

5. Sean  $a > 0$  y  $b < 0$ , y consideremos la curva  $\alpha(t) = (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t))$ . Esta curva se llama *espiral logarítmica*.

- (a) Es  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = (0, 0)$ , y cuando  $t \rightarrow +\infty$  la curva sigue una trayectoria que envuelve al origen infinitas veces.
- (b) Por otro lado,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha'(t) = (0, 0)$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$  es finito. Por lo tanto,  $\alpha$  tiene longitud de arco finita en  $[t_0, +\infty)$ .

6. Sea  $\alpha$  una curva que no pasa por el origen. Si  $\alpha(t_0)$  es el punto de su traza más próximo al origen y  $\alpha'(t_0) \neq 0$ , entonces  $\alpha(t_0)$  y  $\alpha'(t_0)$  son vectores ortogonales.
7. Si todas las normales a una curva parametrizada por longitud de arco pasan por un punto fijo entonces la traza de la curva está contenida en un círculo.
8. Sea  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$  una curva parametrizada por longitud de arco. Sea  $\mathbf{t} = \alpha'$  la *tangente* de  $\alpha$  y sea  $\mathbf{n}$ , la *normal* de  $\alpha$ , el único vector unitario tal que  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$  es una base ortonormal orientada de  $\mathbb{R}^2$ . La *curvatura* de  $\alpha$  es el único escalar  $\kappa$  tal que

$$\mathbf{t}' = \kappa \cdot \mathbf{n}. \quad (1)$$

- (a) La curvatura de  $\alpha$  es el área (con signo) del rectángulo definido por el par ordenado de vectores  $\{\mathbf{t}, \mathbf{t}'\}$ . Encuentre una expresión explícita para  $\kappa$  en función de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y sus derivadas.
- (b) Los vectores  $\mathbf{t}'$  y  $\mathbf{n}'$  son ortogonales.
- (c) La función  $|\kappa|$  es constante e igual a  $1/r$  si y sólo si la curva  $\alpha$  está contenida en una circunferencia de radio  $r$ .

Notemos que tomando módulos en (1) se deduce la expresión conocida

$$|\kappa| = |\mathbf{t}'| = |\alpha''|.$$

9. De la expresión  $\kappa_\alpha = \alpha'_1 \alpha''_2 - \alpha'_2 \alpha''_1$  para la curvatura  $\kappa_\alpha$  de una curva  $\alpha$  parametrizada por longitud de arco obtenida en el ejercicio anterior, deduzca —utilizando la regla de la cadena— la siguiente expresión para la curvatura  $\kappa_c$  de una curva  $c$  regular no necesariamente parametrizada por longitud de arco:

$$\kappa_c = \frac{c'_1 c''_2 - c'_2 c''_1}{[(c'_1)^2 + (c'_2)^2]^{3/2}}.$$

10. Sea  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida sobre un intervalo abierto  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Fijemos  $s_0 \in I$  y definamos una nueva función  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  poniendo  $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(s) ds$  para cada  $s \in I$ . Entonces la curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(s) = \left( \int_{s_0}^s \cos \theta(s) ds, \int_{s_0}^s \sin \theta(s) ds \right)$$

para cada  $s \in I$ , tiene curvatura  $k$  y que está determinada unívocamente a menos de un movimiento rígido del plano.

11. Fijemos una curva, dada en coordenadas polares por la ecuación  $\rho = \rho(\theta)$ , con  $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función suficientemente diferenciable. Entonces la longitud de la curva es

$$\int_a^b \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$$

y su curvatura, como función de  $\theta$ , es

$$k = \frac{2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

**12.** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrizada por longitud de arco cuya curvatura no se anula. Si  $s_0 \in (a, b)$ , se llama *centro de curvatura de  $\alpha$  en  $s_0$*  al punto

$$x(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} n(s_0)$$

y se llama *círculo osculador a  $\alpha$  en  $s_0$*  al círculo centrado en  $x(s_0)$  cuyo radio es  $\rho(s_0) = |\kappa(s_0)|^{-1}$ . Muestre que la curva  $\alpha$  y el círculo osculador a  $\alpha$  en  $s_0$  tienen contacto de segundo orden en  $\alpha(s_0)$  y que, en particular, ambos tienen la misma tangente.

**13.** Determine los centros de curvatura y los círculos osculadores de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**14.** La tangente a un punto del lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva  $\alpha$  tiene la dirección de la normal a  $\alpha$  en su punto correspondiente. La longitud del arco subtendido por dos puntos de aquél es igual a la diferencia de los radios de curvatura de los puntos correspondientes de  $\alpha$ .



Isaac Newton  
1643–1727, Inglaterra

Newton introdujo, en 1671, el círculo de curvatura de manera precisa—la idea venía de Kepler, una generación antes— y dio la fórmula usual para la curvatura en su libro *De Methodis Serierum et Fluxionum*.