

GEOMETRÍA PROYECTIVA
Segundo Cuatrimestre — 2011
Segundo Parcial

APELLIDO Y NOMBRE:
L.U.: HOJAS:

1. Dos polinomios $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ tienen un factor común no constante si y solamente si $Z(f, g) \subseteq \mathbb{C}^2$ es un conjunto infinito.

Sugerencia. Para probar la suficiencia, considere las resultantes $R_X(f, g)$ y $R_Y(f, g)$.

2. (a) La curva proyectiva N de ecuación $X^3 + Y^3 + XYZ = 0$ es irreducible y tiene exactamente un punto singular, que es un nodo. Toda cúbica irreducible de \mathbb{P}^2 con un nodo es proyectivamente equivalente a N .
(b) La curva proyectiva C de ecuación $X^3 + Y^2Z = 0$ es irreducible y tiene exactamente un punto singular, que es una cúspide. Toda cúbica irreducible de \mathbb{P}^2 con un punto cúspide es proyectivamente equivalente a C .

3. Determine los puntos de intersección de las curvas proyectivas

$$(X^2 + Y^2)Z + X^3 + Y^3 = 0, \quad X^3 + Y^3 - 2XYZ = 0,$$

y calcule la multiplicidad de la intersección en cada uno de ellos.

4. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y sea $p \in M$.

- (a) Si la curvatura Gaussiana en p es positiva, entonces hay un entorno V de p en M tal que V está totalmente contenido en uno de los dos semiespacios cerrados determinados por el plano tangente $T_p M$ y solo interseca ese plano en p .
(b) Si hay un entorno V de p en M tal que V está totalmente contenido en uno de los dos semiespacios cerrados determinados por $T_p M$, entonces la curvatura Gaussiana en p es no negativa.

5. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco y sea $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función tal que $\|\nu(s)\| = 1$ y $\nu'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Consideremos la *superficie reglada* parametrizada por

$$\phi : (s, t) \in I \times \mathbb{R} \longmapsto \alpha(s) + t\nu(s) \in \mathbb{R}^3.$$

- (a) Existe una única función $r : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que si definimos $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ poniendo $\beta(s) = \alpha(s) + r(s)\nu(s)$, se tiene que

$$\langle \beta'(s), \nu'(s) \rangle = 0, \quad \forall s \in I.$$

Llamamos a la curva β , contenida en la superficie, la *línea de estricción*.

- (b) La superficie es regular salvo, a lo sumo, a lo largo de la curva de estricción.
(c) La curvatura Gaussiana de la superficie es no positiva. La curvatura es idénticamente nula si $\langle \nu', \alpha' \wedge \nu \rangle = 0$, y en este caso decimos que la superficie es *desarrollable*.