

GEOMETRÍA PROYECTIVA
Segundo Cuatrimestre — 2011
Segundo Parcial

APPELLIDO Y NOMBRE:
L.U.: HOJAS:

1. Dos polinomios $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ tienen un factor común no constante si y solamente si $Z(f, g) \subseteq \mathbb{C}^2$ es un conjunto infinito.

Sugerencia. Para probar la suficiencia, considere las resultantes $R_X(f, g)$ y $R_Y(f, g)$.

Solución. Supongamos primero que $h \in \mathbb{C}[X, Y]$ es un factor común no constante de f y g . Es claro que $Z(h) \subseteq Z(f, g)$, así que bastará probar que $Z(h)$ es infinito. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que h tiene grado $n > 0$ en Y , y escribamos $h = \sum_{i=0}^n h_i(X)Y^i$ con $h_0, \dots, h_n \in \mathbb{C}[X]$. Si $a \in \mathbb{C}$ es tal que $h_n(a) \neq 0$, entonces el polinomio $\sum_{i=0}^n h_i(a)Y^i \in \mathbb{C}[Y]$ tiene grado positivo, así que existe $b \in \mathbb{C}$ tal que $h(a, b) = \sum_{i=0}^n h_i(a)b^i = 0$. Esto nos dice que la imagen de $Z(h)$ por la primera proyección $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ contiene al conjunto $\{a \in \mathbb{C} : f_n(a) \neq 0\}$, que es infinito y prueba que $Z(h)$ mismo es infinito.

Recíprocamente, supongamos que $Z(f, g)$ es infinito. La imagen de $Z(f, g)$ bajo alguna de las dos proyecciones $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ debe ser infinita; sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es la primera proyección. Existen entonces infinitos valores de $a \in \mathbb{C}$ tal que existe $b \in \mathbb{C}$ con $f(a, b) = g(a, b) = 0$ y para ellos se tiene $R_Y(f, g)(a) = 0$. El polinomio $R_Y(f, g) \in \mathbb{C}[X]$ tiene infinitas raíces, así que debe ser nulo. Sabemos que esto implica que f y g comparten un factor no constante en $\mathbb{C}[X, Y]$. \square

2. (a) La curva proyectiva N de ecuación $X^3 + Y^3 + XYZ = 0$ es irreducible y tiene exactamente un punto singular, que es un nodo. Toda cúbica irreducible de \mathbb{P}^2 con un nodo es proyectivamente equivalente a N .
(b) La curva proyectiva C de ecuación $X^3 + Y^2Z = 0$ es irreducible y tiene exactamente un punto singular, que es una cúspide. Toda cúbica irreducible de \mathbb{P}^2 con un punto cúspide es proyectivamente equivalente a C .

Solución. (a) Sea $F = X^3 + Y^3 + XYZ$. Como Y no divide a F , para ver que F es irreducible basta probar que $F(X, 1, Z)$ es irreducible en $\mathbb{C}[X, Z]$. Si no lo fuese, y considerando el grado con respecto a Z , habría una factorización de la forma $X^3 + 1 + XZ = f(X)g(X, Z)$ con $f \in \mathbb{C}[X]$ no constante. Si $a \in \mathbb{C}$ es una raíz de f , entonces para todo $b \in \mathbb{C}$ es $a^3 + ab = 0$: esto es absurdo, salvo que $a = 0$. Así, debe ser $f(X) = X^m$ para algún $m \geq 1$, pero esto es imposible, porque $F(X, 1, Z)$ no es divisible por X .

Los puntos singulares de la curva son las soluciones no nulas del sistema

$$X^3 + Y^3 + XYZ = 3X^2 + YZ = 3Y^2 + ZX = XY = 0.$$

Es inmediato verificar que el único es $(0 : 0 : 1)$. Afinizando en el complemento de $Z = 0$, la ecuación queda $X^3 + Y^3 + XY = 0$ y el punto es $(0, 0)$. Es evidente, entonces, que el punto es doble con tangentes distintas.

Sea $G = 0$ la ecuación de una cúbica irreducible en \mathbb{P}^2 con un nodo. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el nodo es $(0 : 0 : 1)$ y que las rectas tangentes allí tienen ecuaciones $X = 0$ e $Y = 0$. Esto implica que la ecuación de la curva es de la forma

$$\alpha X^3 + \beta X^2 Y + \gamma X Y^2 + \delta Y^3 + \varepsilon X Y Z = 0.$$

con $\varepsilon \neq 0$. Como la curva es irreducible, G no es divisible ni por X ni por Y , y entonces $\alpha \neq 0$ y $\delta \neq 0$. Haciendo cambios de variables de manera que $X \rightsquigarrow \sqrt[3]{\alpha} X$ e $Y \rightsquigarrow \sqrt[3]{\delta} Y$, la ecuación queda en la forma

$$X^3 + \beta X^2 Y + \gamma X Y^2 + Y^3 + \varepsilon X Y Z = 0$$

con otras constantes y $\varepsilon \neq 0$ como antes. Haciendo ahora $Z \rightsquigarrow \varepsilon Z + \beta X + \gamma Y$, la ecuación se transforma en

$$X^3 + Y^3 + X Y Z = 0,$$

como queríamos.

(b) Sea $F = X^3 + Y^2 Z$. Como Y no divide a F , para ver que F es irreducible basta mostrar que $F(X, 1, Z) = X^3 + Z$ es irreducible en $\mathbb{C}[X, Z]$. Supongamos que $X^3 + Z = f(X, Z)g(X, Z)$; considerando el grado con respecto a Z de estos polinomios, vemos que podemos suponer que $f(X) = f(X, Z)$ no depende de Z . Si f no es constante, existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(a) = 0$ y entonces $1 = F(a, 1, 1 - a^3) = f(a)g(a, 1 - a^3) = 0$. Concluimos así que f es necesariamente constante y, en consecuencia, que F es irreducible.

Los puntos singulares de la curva son las soluciones no nulas del sistema

$$X^3 + Y^2 Z = 3X^2 = 2YZ = Y^2 = 0.$$

Es evidente que el único es $(0 : 0 : 1)$. Afinizando en el complemento de $Z = 1$, el punto es $(0, 0)$ y la ecuación queda $F(X, Y, 1) = X^3 + Y^2 = 0$. Es claro entonces que $(0, 0)$ es un punto doble con una única tangente de multiplicidad 2.

Sea ahora $G = 0$ la ecuación de una cúbica irreducible con un punto cúspide. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ese punto es $(0 : 0 : 1)$ y que la recta tangente doble en ese punto es la de ecuación $Y = 0$. Entonces la ecuación es de la forma

$$\alpha X^3 + \beta X^2 Y + \gamma X Y^2 + \delta Y^3 + \varepsilon Y^2 Z = 0$$

con $\varepsilon \neq 0$. Como la curva es irreducible, es $\alpha \neq 0$ así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha = 1$. Si $X \rightsquigarrow X + \frac{\beta}{3} Y$, la ecuación queda en la forma

$$X^3 + \gamma X Y^2 + \delta Y^3 + \varepsilon Y^2 Z = 0,$$

con nuevas constantes tales que otra vez $\varepsilon \neq 0$. Si ahora $Z \rightsquigarrow \varepsilon Z + \gamma X + \delta Y$, entonces esto queda

$$X^3 + Y^2 Z = 0,$$

que es la ecuación de C . □

3. Determine los puntos de intersección de las curvas proyectivas

$$(X^2 + Y^2)Z + X^3 + Y^3 = 0, \quad X^3 + Y^3 - 2XYZ = 0,$$

y calcule la multiplicidad de la intersección en cada uno de ellos.

Solución. Para encontrar los puntos de intersección, tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned} X^3 + Y^3 + X^2Z + Y^2Z &= 0, \\ X^3 + Y^3 - 2XYZ &= 0, \end{aligned}$$

Si $Z = 0$, entonces es inmediato que tenemos las soluciones $(1 : \lambda : 0)$ con $\lambda^3 = -1$. Supongamos entonces por el contrario que $Z \neq 0$. Restando las ecuaciones, vemos que debe ser $(X + Y)^2Z = 0$, así que $X + Y = 0$. Cuando esto vale, la primera ecuación del sistema se satisface, y la segunda se satisface si $XYZ = 0$, así que la única solución que tenemos en este caso es $(0 : 0 : 1)$. Así, hay 4 puntos de intersección,

$$P_1 = (0 : 0 : 1), \quad P_2 = (1 : -1 : 0), \quad P_3 = (1 : \omega : 0), \quad P_4 = (1 : \omega^{-1} : 0),$$

con ω una raíz sexta primitiva de la unidad. En particular, hay finitos puntos de intersección así que las dos curvas no tienen componentes comunes y el teorema de Bézout nos dice que la multiplicidad total de la intersección es $3 \cdot 3 = 9$.

Ahora bien, afinizando en $Z = 1$ las ecuaciones son $X^3 + Y^3 + X^2 + Y^2 = 0$ y $X^3 + Y^3 - 2XY = 0$. En $\bar{P}_1 = (0, 0)$ las formas iniciales son Y^2 y $2XY$, respectivamente, que son coprimas: esto implica que la multiplicidad de intersección en P_1 es $2 \cdot 2 = 4$.

Afinizando en $X = 1$, el desarrollo de Taylor de las dos ecuaciones en $\bar{P}_2 = (-1, 0)$ es

$$\begin{aligned} 3y - 3y^2 + y^3 + 2z - 2yz &= 0, \\ 3y - 3y^2 + y^3 + 2z - 2yz + y^2z &= 0. \end{aligned}$$

así que en P_2 la intersección es

$$\begin{aligned} (3y - 3y^2 + y^3 + 2z - 2yz, 3y - 3y^2 + y^3 + 2z - 2yz + y^2z) \\ = (3y - 3y^2 + y^3 + 2z - 2yz, y^2z) \\ = 2(3y - 3y^2 + y^3 + 2z - 2yz, y) + (3y - 3y^2 + y^3 + 2z - 2yz, z) \\ = 2(z, y) + (3y - 3y^2 + y^3, z) \\ = 3. \end{aligned}$$

Sabemos que la intersección total es 9, así que en P_3 y P_4 la multiplicidad tiene que ser 1. \square

4. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y sea $p \in M$.

- Si la curvatura Gaussiana en p es positiva, entonces hay un entorno V de p en M tal que V está totalmente contenido en uno de los dos semiespacios cerrados determinados por el plano tangente $T_p M$ y solo interseca ese plano en p .
- Si hay un entorno V de p en M tal que V está totalmente contenido en uno de los dos semiespacios cerrados determinados por $T_p M$, entonces la curvatura Gaussiana en p es no negativa.

Solución. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que p es el origen de \mathbb{R}^3 y que $T_p M$ es el plano xy . En ese caso, sabemos que localmente M es el gráfico de una función, así que existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\phi : (x, y) \in U \mapsto (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ es una parametrización de M cerca del origen, y es $f(0, 0) = 0$ y $\nabla f(0, 0) = 0$.

(a) Usando la parametrización ϕ vemos que

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2},$$

así que si $K > 0$ en p , la Hessiana de f es positiva en el origen y f tiene allí o un máximo local o un mínimo local estricto. Esto significa precisamente que el gráfico se mantiene localmente a un lado del plano xy y que solo lo toca en el origen.

(b) La hipótesis significa que f tiene un mínimo o máximo local en $(0, 0)$, posiblemente no estricto, así que sabemos que la Hessiana o es positiva o es nula. La fórmula anterior, entonces, nos dice que $K(0, 0) \geq 0$. \square

5. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco y sea $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función tal que $\|v(s)\| = 1$ y $v'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Consideremos la *superficie reglada* parametrizada por

$$\phi : (s, t) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \alpha(s) + tv(s) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Existe una única función $r : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que si definimos $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ poniendo $\beta(s) = \alpha(s) + r(s)v(s)$, se tiene que

$$\langle \beta'(s), v'(s) \rangle = 0, \quad \forall s \in I.$$

Llamamos a la curva β , contenida en la superficie, la *línea de estricción*.

- (b) La superficie es regular salvo, a lo sumo, a lo largo de la curva de estricción.
 (c) La curvatura Gaussiana de la superficie es no positiva. La curvatura es idénticamente nula si $\langle v', \alpha' \wedge v \rangle = 0$, y en este caso decimos que la superficie es *desarrollable*.

Solución. (a) Es $\beta' = \alpha' + r'v + rv'$, así que

$$\langle \beta', v' \rangle = \langle \alpha', v' \rangle + r' \langle v, v' \rangle + r \langle v', v' \rangle.$$

Como $\|v\| \equiv 1$, para que sea $\langle \beta', v' \rangle \equiv 0$, bastará que elijamos

$$r = -\frac{\langle \alpha', v' \rangle}{\langle v', v' \rangle}.$$

Notemos que la función

$$\psi : (s, t) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \beta(s) + tv(s) \in \mathbb{R}^3$$

parametriza la misma superficie.

(b) Es $\psi_s = \beta' + tv'$ y $\psi_t = v$. En un punto donde estos dos vectores son linealmente dependientes es ψ_s un múltiplo escalar de v , así que $0 = \langle \psi_s, v' \rangle = t \langle v', v' \rangle$: esto implica que debe ser $t = 0$, esto es, el punto está sobre la línea de estricción.

(c) Calculamos la curvatura usando la parametrización ψ . Es $\psi = \beta + tv$, así que $\psi_{tt} = 0$ y en consecuencia $g = 0$ y $K = (eg - f^2)/(EG - F^2) = -f^2/(EG - F^2) \leq 0$. Es claro que $K = 0$ si $f = 0$ si $\langle \psi_{st}, \psi_s \wedge \psi_t \rangle = 0$, y es inmediato que este último producto interno es igual a $\langle v', \beta' \wedge v \rangle$. \square