

GEOMETRÍA PROYECTIVA  
Segundo Cuatrimestre — 2011  
Primer Parcial

---

APELLIDO Y NOMBRE: .....  
L.U.: ..... HOJAS: .....

---

1. Sean  $\alpha$  una curva regular en  $\mathbb{R}^2$  cuya curvatura no se anula en ningún intervalo y sea  $P \in \mathbb{R}^2$ . Si todas las rectas tangentes a  $\alpha$  están a la misma distancia de  $P$ , entonces  $\alpha$  es un arco de circunferencia.

*Solución.* Podemos suponer que la curva está parametrizada por longitud de arco y que el punto  $P$  es el origen. Sea  $I$  el intervalo de  $\mathbb{R}$  donde  $\alpha$  está definida.

Si  $t \in I$ , la recta tangente a  $\alpha$  en  $\alpha(t)$  tiene ecuación

$$\langle N(t), x \rangle = \langle N(t), \alpha(t) \rangle,$$

Como  $N(t)$  es un vector unitario, la distancia de esta recta al origen es  $|\langle N(t), \alpha(t) \rangle|$  y, por hipótesis, es igual a una constante  $c$ . Como  $\langle N, \alpha \rangle$  es una función continua, esto implica que es ella misma constante y derivándola vemos que

$$0 = \frac{d}{dt} \langle N, \alpha \rangle = \langle -\kappa T, \alpha \rangle + \langle N, T \rangle = -\kappa \langle T, \alpha \rangle.$$

Como  $\kappa$  no se anula en ningún intervalo y  $\langle T, \alpha \rangle$  es una función continua, esto implica que  $\langle T, \alpha \rangle = 0$  idénticamente. Pero entonces

$$\frac{d}{dt} \|\alpha\|^2 = 2\langle T, \alpha \rangle = 0,$$

así que  $\|\alpha\|$  es constante, esto es, la imagen de  $\alpha$  está contenida en una circunferencia centrada en el origen.  $\square$

2. Una curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada por longitud de arco cuya imagen está contenida en  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq r\}$  y tal que su curvatura es  $|\kappa(t)| \leq 1/r$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , es una circunferencia de radio  $r$ .

*Sugerencia.* Muestre que una función diferenciable  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  acotada superiormente y con derivada segunda no negativa es constante y considere entonces la función  $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \|\alpha(t)\|^2 \in \mathbb{R}$ .

*Solución.* La función  $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2} \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle \in \mathbb{R}$  es claramente diferenciable, y es  $f' = \langle T, \alpha \rangle$  y  $f'' = \kappa \langle N, \alpha \rangle + 1$ . Como  $|\kappa| \leq 1/r$  y  $|\langle N, \alpha \rangle| \leq \|N\| \|\alpha\| \leq r$ , es  $\kappa \langle N, \alpha \rangle \geq -1$  y entonces  $f'' \geq 0$ . Para terminar, bastará probar que

una función diferenciable  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  acotada superiormente y con derivada  
segunda no negativa es constante. (1)

En efecto, sabiendo esto podremos concluir que  $f$  es constante, esto es, que  $\alpha$  tiene imagen contenida en una circunferencia centrada en el origen. Si  $r'$  es su radio, entonces  $r' \leq r$ ,

porque la imagen de  $\alpha$  está contenida en el disco de radio  $r$  y, por otro lado, la curvatura de  $\alpha$  es  $1/r'$  no supera a  $1/r$ , así que  $r' \geq r$ . En definitiva,  $r' = r$ .

Sea  $\phi$  una función como en (1) y sea  $M$  una cota superior para  $\phi$ . La hipótesis implica que  $\phi'$  es no decreciente.

- Supongamos que existe  $A \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi'(A) > 0$ . En ese caso  $\phi'(t) \geq \phi'(A)$  para todo  $t \geq A$  y el teorema del valor medio implica que para cada  $u \geq 0$  existe  $\xi_u \in [A, A+u]$  tal que

$$M - \phi(A) \geq \phi(A+u) - \phi(A) = u\phi'(\xi_u) \geq u\phi'(A).$$

Esto es absurdo, y entonces  $\phi'$  es no positiva.

- La función  $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto \phi(-t) \in \mathbb{R}$  es acotada superiormente y tiene derivada segunda no negativa, así que, de acuerdo a lo ya hecho, su derivada es no positiva. Esto nos dice, precisamente, que la derivada de  $\phi$  es no negativa.

Concluimos así que  $\phi'$  es idénticamente nula y, en consecuencia, que  $\phi$  es constante.  $\square$

**3.** Determine las formas normales general afín real, general afín compleja y ortogonal de la cuádrica

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 6x - 6z + 5 = 0.$$

*Solución.* Llamemos  $F$  al polinomio que define la cuádrica. El sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 4x + 2y + 2z + 6 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 4y + 2z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2x + 2y + 4z - 6 = 0 \end{cases}$$

tiene a  $P = (-3, 0, 3)$  como única solución. Ese punto es el único centro de la cuádrica, y el valor de  $F$  en  $P$  es  $-13$ . La matriz de coeficientes de la parte cuadrática de  $F$  es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

que tiene polinomio característico  $\chi = t^3 - 6t^2 + 9t - 4$ , con raíces 1, 1 y 4. Esto implica que  $F$  es ortogonalmente equivalente a

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 13 = 0,$$

así que su forma normal ortogonal es

$$\frac{1}{13}x^2 + \frac{1}{13}y^2 + \frac{4}{13}z^2 - 1 = 0.$$

Como los coeficientes que aparecem aquí son positivos, sabemos que la forma normal general afín real de  $F$  es

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

y que ésta coincide con la forma normal general afín compleja.  $\square$

**4.** Sean  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo abierto, sea  $t_0 \in I$  y sea  $a \in \mathbb{R}$  un escalar no nulo.

- (a) Si  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una función diferenciable tal que  $\|g\| = 1$  y  $\det(g, g', g'') \neq 0$ , y definimos  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de manera que

$$\alpha(t) = a \int_{t_0}^t g(\xi) \wedge g'(\xi) d\xi \quad (2)$$

para todo  $t \in I$ , entonces  $\alpha$  es una curva regular con curvatura nunca nula y torsión constante  $\tau = 1/a$ .

- (b) Recíprocamente, si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva parametrizada por longitud de arco con curvatura nunca nula y torsión constante  $\tau = 1/a$  y que pasa por el origen, existe una función  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\|g\| = 1$  y  $\det(g, g', g'') \neq 0$ , y para la cual vale la relación (2) para todo  $t \in I$ .

*Sugerencia.* Recuerde que si  $u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$ , entonces  $(u \wedge v) \wedge (x \wedge y) = \det(u, v, y)x - \det(u, v, x)y$ .

*Solución.* Recordemos de la práctica 2 que si  $\beta$  es una curva regular no necesariamente parametrizada por longitud de arco, su curvatura y su torsión están dadas por las fórmulas

$$\kappa = \frac{\|\beta' \wedge \beta''\|}{\|\beta'\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\beta', \beta'', \beta''')}{\|\beta' \wedge \beta''\|^2}.$$

(a) Es

$$\begin{aligned} \alpha' &= ag \wedge g', \\ \alpha'' &= ag' \wedge g' + ag \wedge g'' = ag \wedge g'', \\ \alpha''' &= ag' \wedge g'' + ag \wedge g'''. \end{aligned}$$

Como  $\|g\| = 1$ ,  $g$  y  $g'$  son siempre ortogonales; como  $\det(g, g', g'') \neq 0$ ,  $g' \neq 0$ . Usando esto, vemos que

$$\|\alpha'\| = |a| \|g \wedge g'\| = |a| \|g\| \|g'\| = |a| \|g'\|$$

no se anula nunca, así que  $\alpha$  es una curva regular. Es

$$\begin{aligned} \alpha' \wedge \alpha'' &= (ag \wedge g') \wedge ag \wedge g'' \\ &= a^2 (\det(g, g', g'')g - \det(g, g', g)g'') \\ &= a^2 \det(g, g', g'')g, \end{aligned}$$

así que

$$\|\alpha' \wedge \alpha''\| = a^2 |\det(g, g', g'')|$$

y

$$\kappa = \frac{a^2 |\det(g, g', g'')|}{|a|^3 \|g'\|^3} \neq 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \det(\alpha', \alpha'', \alpha''') &= \langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle \\ &= \langle (ag \wedge g') \wedge (ag \wedge g''), ag' \wedge g'' + ag \wedge g''' \rangle \\ &= a^3 \langle (g \wedge g') \wedge (g \wedge g''), g' \wedge g'' + g \wedge g''' \rangle \\ &= a^3 \langle \det(g, g', g'')g - \det(g, g', g)g'', g' \wedge g'' + g \wedge g''' \rangle \\ &= a^3 \langle \det(g, g', g'')g, g' \wedge g'' + g \wedge g''' \rangle \\ &= a^3 \langle \det(g, g', g'')g, g' \wedge g'' \rangle \\ &= a^3 \det(g, g', g'')^2, \end{aligned}$$

de manera que

$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} = \frac{a^3 \det(g, g', g'')^2}{a^4 |\det(g, g', g'')|^2} = \frac{1}{a}.$$

(b) Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco con curvatura nunca nula y torsión constante  $\tau = 1/a$ , y sea  $t_0 \in I$  tal que  $\alpha(t_0) = 0$ . Sea  $g = B : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  el campo de vectores binomiales a  $\alpha$  y sea  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva tal que

$$\beta(t) = a \int_{t_0}^t B(\xi) \wedge B'(\xi) d\xi.$$

Entonces

$$\beta' = aB \wedge B' = aB \wedge (-\tau N) = -a\tau B \wedge N = T = \alpha',$$

así que la diferencia  $\beta - \alpha$  es constante. Como esta diferencia se anula en  $t_0$ , vemos que, de hecho,  $\beta = \alpha$ .

**5.** Sea  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  una subvariedad de dimensión  $k$  y sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Llamemos  $g = f|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$  a la restricción de  $f$  a  $M$ . Si en  $p \in M$  la función  $g$  tiene un máximo local relativo, de manera que existe  $r > 0$  tal que

$$x \in M \cap B_r(p) \implies g(x) \leq g(p),$$

entonces la aplicación diferencial  $g'(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  es nula.

*Solución.* Sea  $v \in T_p M$ . Existen  $\varepsilon > 0$  y una curva diferenciable  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya imagen está contenida en  $M$  y tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$ . Como  $\alpha$  es continua y  $B_r(p)$  es un entorno de  $p$ , existe  $\eta$  tal que  $0 < \eta < \varepsilon$  y  $\alpha(t) \in B_r(p)$  para todo  $t \in (-\eta, \eta)$ . Esto implica que la función  $g \circ \alpha : (-\eta, \eta) \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un máximo local en 0 y, como es diferenciable, que en consecuencia  $(g \circ \alpha)'(0) = 0$ . Pero entonces

$$g'(p)(v) = \left. \frac{d(g \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Como esto es así cualquiera sea  $v \in T_p M$ , concluimos que  $g'(p) = 0$ . □