

Geometría Proyectiva

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2007

Práctica 2 - Ejercicios adicionales

1. Sea $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva paramétrica en \mathbb{R}^n . Para $j = 0, \dots, n$ denotamos con x^j la j -ésima derivada de x .

Si $t \in I$ y $k = 0, \dots, n$, definimos $[x]^k(t)$ como el subespacio vectorial generado por los vectores $x^1(t), x^2(t), \dots, x^k(t)$.

Decimos que x es **k -regular en t** si $[x]^k(t)$ tiene dimensión k , o sea, si $x^1(t), x^2(t), \dots, x^k(t)$ son linealmente independientes, o equivalentemente, si la matriz $(x^1(t), x^2(t), \dots, x^k(t))$ tiene rango k .

Si x es k -regular, el espacio $[x]^k(t)$ se denomina **k -espacio osculador de x en t** .

Supongamos que x es n -regular (en particular, k -regular para todo $k \leq n$) en todo $t \in I$. Notar que se tienen inclusiones

$$[x]^1(t) \subset [x]^2(t) \subset \dots \subset [x]^n(t) = \mathbb{R}^n$$

Demostrar:

- Los espacios osculadores no dependen de la parametrización. Más precisamente, si $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva tal que $y = x \circ \sigma$ para un cambio de parámetro $\sigma : J \rightarrow I$ entonces $[y]^k(t) = [x]^k(\sigma(t))$ para todo $t \in J$ y todo k .
- Definir, similarmente a lo hecho en el caso $n = 3$, la base de Frenet $T_1(t), \dots, T_n(t)$ asociada a la curva x .
Sugerencia: ortonormalizar la base ordenada $x^1(t), \dots, x^n(t)$.
- Definir las curvaturas $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ de x y generalizar las fórmulas de Frenet que permiten escribir la derivada de cada T_j como combinación lineal de los T_i .
- Enunciar y demostrar el **Teorema de Clasificación Ortogonal** para curvas en \mathbb{R}^n .

En caso de ser necesario se puede consultar Spivak, vol. 2.

2. Sea $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva paramétrica en \mathbb{R}^n , donde I es un entorno pequeño del origen. Escribamos $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ y supongamos que las funciones x_i son analíticas (o sea, coinciden en un entorno del origen con su desarrollo de Taylor en el origen). Asumamos para simplificar que $x(0) = 0$, y supongamos que la imagen de x no está contenida en ningún hiperplano.

Demostrar:

- a) x es afinmente equivalente a una curva $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que
- 1) $y_i(t) = t^{d_i} u_i(t)$ donde d_i es un número natural, u_i es analítica y $u_i(0) \neq 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.
 - 2) $d_i < d_{i+1}$ para todo $i < n$.
- b) Para cada hiperplano $0 \in H \subset \mathbb{R}^n$ denotemos $x.H$ el orden de contacto de H con x en 0 . Consideremos el conjunto $[x]$ de todos los números naturales de la forma $x.H$ para algún hiperplano $0 \in H$. Demostrar, con la notación del inciso anterior, que
- $$[x] = \{d_1, \dots, d_n\}$$
- c) Deducir del inciso anterior que los exponentes d_i del primer inciso son únicos. (Los d_i se llaman **exponentes de Puiseux** de x).
- d) Demostrar que mediante un cambio de parámetro se puede suponer en el primer inciso que $u_1 = 1$ o que $u_1 = -1$.
- Sugerencia: Si u es función analítica tal que $u(0) \neq 0$ y $u(0)$ tiene raíz d -ésima entonces u tiene raíz d -ésima.*