

GEOMETRIA PROYECTIVA

PRIMER CUATRIMESTRE 1997

1) Geometría diferencial de curvas y superficies.

- a) Aplicaciones diferenciables $U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto conexo. Curvas paramétricas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Ejemplos. Longitud de arco, curvatura, torsión, ecuaciones de Frenet, teorema de clasificación ortogonal.
- b) Curvas y superficies en \mathbb{R}^n dadas en forma implícita. Puntos regulares y singulares. Espacio tangente. Contacto; rectas, planos y esferas osculadores. Parametrización local.
- c) Clasificación ortogonal y afín de cuádricas en \mathbb{R}^n .
- d) Superficies en \mathbb{R}^3 . Ejemplos: superficies de revolución, superficies regladas. Primera forma fundamental. Aplicación de Gauss, segunda forma fundamental, curvatura media y Gaussiana. Direcciones principales. Puntos elípticos, hiperbólicos y parabólicos. Ecuaciones de compatibilidad, teorema de clasificación ortogonal de superficies. Geodésicas. Enunciado y discusión de los axiomas de plano Euclídeo según Hilbert. Superficies de revolución de curvatura constante y modelos de geometrías no Euclidianas. Enunciado del teorema de Gauss-Bonnet.

Referencias: [DC], [St].

2) Geometría Proyectiva.

- a) Definición axiomática de plano afín y proyectivo. Ejemplo: el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(K)$ asociado a un cuerpo K . Discusión de los casos $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$ y $K = \mathbb{Z}_p$. Propiedades de Pappus y de Desargues, caracterización de $\mathbb{P}^2(K)$.
- b) Curvas algebraicas en K^2 . Puntos singulares, multiplicidad, cono tangente. Multiplicidad de intersección, discusión de varias definiciones. Curvas algebraicas en $\mathbb{P}^2(K)$. Coordenadas

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

homogeneas y coordenadas afines. Homogeneización y dehomogeneización. Teorema de Bezout; idea de demostración mediante el principio de conservación de números. Aplicaciones. Polaridad. Puntos de inflexión y la Hessiana.

c) Problemas de clasificación proyectiva: Clasificación de cuádricas en $\mathbb{P}^n(K)$. Clasificación de cuatro puntos ordenados (resp. no ordenados) en $\mathbb{P}^1(K)$ y la razón doble (resp. el invariante j). Cúbicas en $\mathbb{P}^2(K)$: estructura de grupo, forma de Weierstrass, clasificación proyectiva. Parametrización mediante funciones elípticas.

d) Género de una curva. Existencia de parametrizaciones racionales; utilización para la resolución de problemas diofantinos y para el cálculo de ciertas integrales abelianas. Curva dual, fórmulas de Plucker.

e) Relación entre geometrías no euclidianas y geometría proyectiva, según Felix Klein. [E]

Referencias: [W], [F].

Nota: El énfasis estará puesto en los cálculos con coordenadas homogéneas en espacios $\mathbb{P}^n(K)$. El interesante punto de vista sintético-axiomático mencionado en a) será tratado superficialmente, por falta de tiempo. Ver [H], [Bl], [Sa].

3) Breve introducción a las Variedades Diferenciales.

Definición y ejemplos. Vectores tangentes. Subvariedades, inmersiones, submersiones. Valores críticos de aplicaciones diferenciables. Más ejemplos.

Referencia: [Wa] Se planea cubrir este capítulo corto en la Práctica, una vez que el alumno ha adquirido cierto manejo de los conceptos del punto 1) b).

REFERENCES

[[St]] J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover Publications, 31 East 2nd. Street, Mineola, N.Y. 11501, USA (Precio: 8.95).

[[DC]] A.fredo Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall.

- [[W~~a~~]] Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company.
- [[W~~v~~]] W~~v~~ker, *Algebraic Curves*, Springer-Verlag.
- [[F]] V Fulton, *Algebraic Curves*, ?.
- [[S]] C Salmon, *Analytic geometry of 3 dimensions*, Chelsea, 1914.
- [[E-Ch]] Enriques - O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, 3 vols., Zanichelli, Bologna, 1924.
- [[B]] H F. Baker, *Principles of Geometry*, 6 vols., Cambridge University Press, 1933.
- [[Sa]] A. Santaló, *Geometria Proyectiva*, EUDEBA.
- [[E]] N Efimov, *Geometrie Superieure*, MIR.
- [[H]] R Hartshorne, *Foundations of Projective Geometry*, ?.
- [[Bl]] Blumenthal, *A modern view of Geometry*, Dover.