GEOMETRIA PROYECTIVA
PRIMER CUATRIMESTRE 1996

1) Geometria diferencial de curvas y superficies.

a) Aplicaciones diferenciables $U \to \mathbb{R}^n$ con $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto conexo. Curvas parametricas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Ejemplos. Longitud de arco, curvatura, torsion, ecuaciones de Frenet, teorema de clasificacion ortogonal.
b) Curvas y superficies en $\mathbb{R}^n$ dadas en forma implicita. Puntos regulares y singulares. Espacio tangente. Contacto; rectas, planos y esferas osculadores. Parametrizacion local.
c) Clasificacion ortogonal y afin de cuadricas en $\mathbb{R}^n$.
d) Superficies en $\mathbb{R}^3$. Ejemplos: superficies de revolucion, superficies regladas. Primera forma fundamental. Aplicacion de Gauss, segunda forma fundamental, curvatura media y Gaussiana. Direcciones principales. Puntos elipticos, hiperbolicos y parabolicos. Ecuaciones de compatibilidad, teorema de clasificacion ortogonal de superficies. Geodesicas. Enunciado y discusion de los axiomas de plano Euclideo segun Hilbert. Superficies de revolucion de curvatura constante y modelos de geometrias no Euclideanas. Enunciado del teorema de Gauss-Bonnet.

Referencias:
Struik, "Geometra diferencial clasica". Ed. Aguilar. (edicion inglesa: Dover Publ. Co.)
Do Carmo, "Differential geometry of curves and surfaces", Prentice Hall.

2) Geometria Proyectiva.

a) Definicion axiomatica de plano afin y proyectivo. Ejemplo: el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(K)$ asociado a un cuerpo K. Discusion de los casos $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$ y $K = \mathbb{Z}_p$. Propiedades de Pappus y de Desargues, caracterizacion de $\mathbb{P}^2(K)$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

b) Curvas algebraicas en K^2. Puntos singulares, multiplicidad, cono tangente. Multiplicidad de interseccion, discusion de varias definiciones. Curvas algebraicas en $\mathbb{P}^2(K)$. Coordenadas homogeneas y coordenadas afines. Homogeneizacion y dehomogeneizacion. Teorema de Bezout; idea de demostracion mediante el principio de conservacion de numeros. Aplicaciones. Polaridad. Puntos de inflexion. Bitangentes.
c) Problemas de clasificacion proyectiva: Clasificacion de cuadricas en $\mathbb{P}^n(K)$. Clasificacion de cuatro puntos ordenados (resp. no ordenados) en $\mathbb{P}^1(K)$ y la razon doble (resp. el invariante j). Cubicas en $\mathbb{P}^2(K)$: estructura de grupo, forma de Weierstrass, clasificacion proyectiva.

d) Genero de una curva. Existencia de parametrizaciones racionales; utilizacion para la resolucion de problemas diofantinos y para el calculo de ciertas integrales abelianas. Curva dual, formulas de Plucker.
e) Relacion entre geometrias no euclideanas y geometria proyectiva, segun Felix Klein.

Referencia: Walker, "Algebraic Curves".
Otros libros: Baker, Enriques-Chisini, Hodge-Pedoe, Salmon, Semple-Roth.

Nota: El enfasis estara puesto en los calculos con coordenadas homogeneas en espacios $\mathbb{P}^n(K)$. El interesante punto de vista sintetico-axiomatico mencionado en a) sera tratado superficialmente, por falta de tiempo.

3) Variedades diferenciales.

a) Definicion y ejemplos. Vectores tangentes. Subvariedades, inmersiones, submersiones. Valores criticos de aplicaciones diferenciables. Otros ejemplos (pegado de variedades, espacios homogeneos).
b) Algebra multilineal, tensores, formas diferenciales. Operaciones tensoriales.
c) Integracion de formas diferenciales. Teorema de Stokes.

Nota: Se planea cubrir a) en la Practica, comenzando durante la cuarta semana del curso.

Referencia:
Warner, "Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups", Scott-Foresman.

Fernando Cukierman