

**Geometría Diferencial - Práctica V**

1. Sea  $C$  el cilindro  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  y sea  $F$  el campo vectorial definido por  $V(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, x_3)$  (con el abuso de notación explicado en clase). Encontrar las coordenadas locales de  $F$  respecto a una carta  $(U, \varphi)$  que verifica  $\varphi^{-1}(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$ .
2. Probar que  $\Gamma(TX)$  es un módulo sobre el anillo de funciones diferenciables  $C^\infty(X)$ .
3. Sean  $F, G, H \in \Gamma(TX)$  tres campos diferenciables. Definamos para cada  $x \in X$  una función  $[F, G]_x : D(x) \rightarrow \mathbb{R}$  por  $[F, G]_x(f) = F_x(G(f)) - G_x(F(f))$  (para un germe  $(U, f)$ ,  $F(f)$  es la función diferenciable  $F(f)(y) = F_y(f)$ , con  $F_y$  el valor del campo en  $y$ ).

Probar que

- (a)  $[F, G]_x$  es una derivación, por lo que  $[F, G]$  es un campo de vectores tangentes.
- (b)  $[F, G]$  es un campo diferenciable.
- (c)  $[F, G] = -[G, F]$
- (d)  $[[F, G], H] + [[G, H], F] + [[H, F], G] = 0$

4. Sea  $X$  una variedad y  $(U, \varphi)$  una carta. Probar que

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right] = 0$$

5. Sean  $F, G$  dos campos diferenciables, y sea  $(U, \varphi)$  una carta. Si en  $U$  se tiene

$$F = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \quad \text{y} \quad G = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i},$$

entonces para  $[F, G]$  se tiene

$$[F, G] = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \left( a_i \frac{\partial b_j}{\partial \varphi_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial \varphi_i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_j}$$