

Geometría Diferencial - Práctica IV

- Probar que $T(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))(\bar{x}) \cong \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}.x$ (donde $x = (x_0, \dots, x_n)$ y $\bar{x} = (x_0 : \dots : x_n)$).
Sugerencia: Considerar $d\pi(x)$ donde $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
 - Enunciar y probar el mismo resultado para $T(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))(\bar{z})$.
- Sea $\mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_d$ ($\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$) el espacio de polinomios homogéneos de grado d en las variables x_0, \dots, x_n , con coeficientes reales (respectivamente complejos). Sea $F \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_d$ (respectivamente $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$). Decimos que F es no singular si

$$\bigcap_{i=0}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \right) = \emptyset \text{ en } \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \text{ (resp. en } \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \text{)}.$$

Probar

- Si $F \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_d$ es no singular entonces $X = (F = 0) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es una subvariedad de dimensión $n - 1$.
 - Si $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$ es no singular entonces $X = (F = 0) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es una subvariedad holomorfa de dimensión compleja $n - 1$.
- Sea $\mathbb{R}_r^{m \times n} = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \text{rg}(A) = r\}$. Probar que $\mathbb{R}_r^{m \times n}$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^{m \times n}$ de dimensión $mn - (m - r)(n - r) = r(m + n - r)$.

Sugerencia: Si $A \in \mathbb{R}_r^{m \times n}$, permutando sus filas la podemos escribir

$$\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$$

con $M \in GL(r, \mathbb{R})$. Si consideramos la matriz (invertible)

$$B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -PM^{-1} & I_{m-r} \end{pmatrix}$$

y multiplicando por A tenemos

$$BA = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & Q - PM^{-1}N \end{pmatrix}.$$

¿Qué tiene que pasar para que BA tenga rango r ?

- Sean $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2$ y $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_1$ no singulares. Definir un difeomorfismo entre

$$(F = 0) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

y

$$(G = 0) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

Sugerencia: Usar la proyección estereográfica.

- Calcular $TX(A)$ para
 - $X = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : AA^t = I\} = O(n, \mathbb{R})$.
 - $X = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) = 1\} = SL(n, \mathbb{R})$.
 - $X = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : AA^t = I\} = O(n, \mathbb{C})$.

(d) $X = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : \det(A) = 1\} = SL(n, \mathbb{C})$.

6. Sea $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3).$$

Demostrar que f induce una aplicación $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que (\mathbb{P}^2, F) es una subvariedad paramétrica de \mathbb{R}^4 .

7. **Grassmanniana de k -planos en \mathbb{R}^n .**

Consideremos la variedad $X = \mathbb{R}_k^{k \times n}$ de matrices de $k \times n$ de rango k . Verificar que es un abierto de $\mathbb{R}^{k \times n}$.

Consideremos en X la relación de equivalencia dada por $A \sim B$ si y sólo si existe $G \in GL(k, \mathbb{R})$ tal que $A = GB$. Probar que dos matrices están relacionadas si y sólo sus filas generan el mismo subespacio de dimensión k de \mathbb{R}^n .

Al conjunto cociente X/\sim lo llamamos Grassmanniana de k -planos en \mathbb{R}^n y lo notamos $G(k, \mathbb{R}^n)$. El párrafo anterior muestra que es el espacio de subespacios vectoriales de dimensión k de \mathbb{R}^n . Si S es un subespacio de dimensión k de \mathbb{R}^n , lo vemos como un punto en X/\sim usando cualquier matriz cuyas filas sean una base de S .

Vamos a ver que $G(k, \mathbb{R}^n)$ es una variedad diferenciable de dimensión $k(n-k)$.

Consideremos para cada $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ el siguiente subconjunto

$$U_I = \pi(\{A : \det A_I \neq 0\}) = \{\bar{A} : \det A_I \neq 0\}$$

donde A_I es el menor de $k \times k$ de A cuyas columnas son i_1, \dots, i_k , $\pi : \mathbb{R}_k^{k \times n} \rightarrow G(k, \mathbb{R}^n)$ es la proyección al cociente y $\bar{A} = \pi(A)$. Probar que $U_I = \{S \in G(k, \mathbb{R}^n) : S \cap V_{I^c} = 0\}$ donde V_{I^c} es el subespacio de dimensión $n-k$ de \mathbb{R}^n generado por $\{e_j\}_{j \notin I}$.

Vamos a definir ahora una carta en U_I . Lo hacemos para $I = \{1, \dots, k\}$ para facilitar la notación. Dada $\bar{A} \in U_I$, consideramos la matriz

$$A_I^{-1}A = \begin{pmatrix} I_k & | & B \end{pmatrix}$$

donde I_k es la identidad de $k \times k$. Definimos entonces $\varphi : U_I \rightarrow \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$ como

$$\varphi(\bar{A}) = B$$

B como arriba. Probar que esta asignación está bien definida.

Probar que $\{(U_I, \varphi_I)\}$ definen una atlas en $G(k, \mathbb{R}^n)$. (Sugerencia: Hacer primero el caso $G(2, \mathbb{R}^4)$ para entender la construcción.)

Consideremos ahora la aplicación $p : \mathbb{R}_k^{k \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ dada por

$$p(A) = (\det A_I)_I$$

donde I recorre todos los subconjuntos de k elementos de $\{1, \dots, n\}$ (ordenados de alguna manera). Probar que f induce una aplicación diferenciable

$$P : G(k, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{R})$$

donde $N = \binom{n}{k} - 1$.

Probar que P es una inmersión.

Si $S \in G(k, \mathbb{R}^n)$ es un subespacio de dimensión k de \mathbb{R}^n , al punto $P(S)$ lo llamamos las coordenadas de Plücker de S .

8. Sean V un espacio vectorial y S_1 y S_2 dos subespacios de V . Decimos que S_1 es transversal a S_2 , y lo notamos también $S_1 \pitchfork S_2$ si se verifica alguna de las siguientes condiciones

- (a) $\dim S_1 + \dim S_2 > \dim V$ y $S_1 + S_2 = V$
- (b) $\dim S_1 + \dim S_2 \leq \dim V$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$

Observar que la segunda condición es equivalente a

$$(b') \quad S_1 + S_2 = S_1 \oplus S_2.$$

Sea $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal y $S \subset W$ un subespacio vectorial. Decimos que f es transversal a S , y lo notamos $f \pitchfork S$, si $\text{im}(f) \pitchfork S$.

Probar que $S_1 \pitchfork S_2$ si y sólo si $\Delta \pitchfork S_1 \times S_2$ donde $\Delta : V \rightarrow V \times V$ es la aplicación diagonal, $\Delta(v) = (v, v)$.

Generalizar la definición de transversalidad para un número mayor de subespacios.

9. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función diferenciable, y Z es una subvariedad de Y , decimos que f es transversal a Z si para todo $x \in f^{-1}(Z)$, $df(x)$ es transversal a $TZ(f(x))$.

Probar que si f es transversal a Z entonces $f^{-1}(Z)$ es una subvariedad de X de dimensión $\dim X - \dim Y + \dim Z$.

10. Definir transversalidad para subvariedades X_1, \dots, X_r de una variedad Y .

Probar que si X_1, \dots, X_r son subvariedades transversales de Y entonces la intersección es una subvariedad cuya codimensión es

- $\sum_{i=1}^r \text{codim}(X_i)$ si $\sum_{i=1}^r \dim(X_i) > \dim Y$
- $\dim Y$ (y por lo tanto un conjunto discreto) si $\sum_{i=1}^r \dim(X_i) \leq \dim Y$.