EJERCICIOS SOBRE GEOMETRIA DEL ESPACIO DE MATRICES GEOMETRIA ALGEBRAICA 2008

Fernando Cukierman

Sea K un cuerpo (supuesto algebraicamente cerrado cuando sea necesario). Consideremos el espacio vectorial $K^{m\times n}$ de todas las matrices $m\times n$ con coeficientes en K. Denotamos $\mathcal{A}=K_{m\times n}=K[x_{ij}, 1\le i\le m,\ 1\le j\le n]$ el anillo de polinomios en las mn variables x_{ij}.

La matriz $X=(x_{ij})\in\mathcal{A}^{m\times n}$ se denomina matriz generica de $m\times n$.

1) a) Sea $m=n$ y consideremos el determinante de la matriz generica $\det(X)\in\mathcal{A}$. Es un polinomio homogeneo de grado n en las n^2 variables x_{ij}. Demostrar que es un polinomio irreducible.
b) Sea $\Delta=\Delta(n,K)=\{a\in K^{n\times n},\ \det(a)=0\}$. Demostrar que Δ es una hipersuperficie irreducible y que su conjunto de puntos singulares $S(\Delta)$ consiste de las matrices de rango $\le n-2$.

2) a) Sea $U\subset K^{n\times n}$ el conjunto de las matrices con autovalores distintos. Demostrar que U es un abierto Zariski denso en $K^{n\times n}$.
(Sug.: considerar el discriminante del polinomio caracteristico de la matriz generica)
b) Deducir el teorema de Cayley-Hamilton
(Sug.: Basta con demostrar el teorema para matrices que pertenecen a cualquier abierto Zariski, lo cual a veces se llama principio de permanencia de identidades algebraicas. Por a), basta con demostrarlo para matrices con autovalores distintos. Reducir al caso de matrices diagonales, donde es claro).

3) Sea G un grupo algebraico (o sea, G es una variedad algebraica y tambien es un grupo tal que la aplicacion de multiplicacion y la aplicacion de inversa son regulares). Sea X una

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

variedad algebraica y $\alpha : G \times X \to X$ una accion regular (o sea, α es una accion del grupo G en el conjunto X y es una aplicacion regular de variedades).
a) Demostrar que si G es irreducible entonces cada orbita $G.x \subset X$ es irreducible.
(Sug.: la imagen de un irreducible es irreducible)
b) Para $x \in X$ denotemos $G_x = \{g \in G,\ g.x = x\}$ el estabilizador de x. Demostrar que $\dim(G.x) = \dim(G) - \dim(G_x)$.
c) Demostrar que el grupo $\mathrm{GL}(n, K)$ es irreducible.

4) Para subconjuntos $A \subset \{1, \ldots, m\}$, $B \subset \{1, \ldots, n\}$ sea $X_{AB} = (x_{ij})_{i\in A, j\in B}$ la matriz generica con filas en A y columnas en B. Si $|A| = |B|$ denotamos

$$\delta_{AB} = \det(X_{AB}) \in \mathcal{A}$$

Para $r \leq \min\{m, n\}$ sea $J_r \subset \mathcal{A}$ el ideal generado por todos los polinomios δ_{AB} con $|A| = |B| = r + 1$. Demostrar:
a) El conjunto de ceros de J_r es el conjunto $\Delta_r \subset K^{m\times n}$ de las matrices de rango $\leq r$.
b) El conjunto cuasi-afin $\Delta(r) = \Delta_r - \Delta_{r-1}$ de las matrices de rango igual a r es irreducible.
(Sug.: $\Delta(r)$ es una orbita de $G = \mathrm{GL}(m, K) \times \mathrm{GL}(n, K)$ actuando en $K^{m\times n}$ via $(g, h).a = gah^{-1}$).
c) Δ_r es la clausura Zariski de $\Delta(r)$. Por lo tanto, es un conjunto algebraico afin irreducible.
d) La dimension de Δ_r es $r(m + n - r)$.
(Sug.: correspondencia de incidencia).
e)* $\mathcal{I}(\Delta_r) = J_r$.
Comentario: Por el teorema de los ceros de Hilbert, esto equivale a decir que J_r es un ideal radical. En virtud de c), tambien equivale a que J_r es un ideal primo. La * significa que esta parte del ejercicio es posiblemente dificil.
f) El conjunto de puntos singulares $S(\Delta_r)$ es Δ_{r-1}.
(Sug.: aceptar e) y calcular las derivadas parciales de los δ_{AB}).

5) Sea $N \subset K^{n\times n}$ el conjunto de las matrices nilpotentes. Es un conjunto algebraico afin definido por la ecuacion matricial $X^n = 0$. Determinar: ideal, dimension, componentes irreducibles, singularidades. Similarmente y mas en general para $N_k = \{a \in K^{n\times n}, a^k = 0\}$ para cada $k \leq n$.

6) Sea $X = \{(a, b) \in K^{n\times n} \times K^{n\times n} / ab = ba\}$. Demostrar que X es una variedad algebraica irreducible. Calcular su dimension.

7) Sea $S_n \subset K^{n\times n}$ el conjunto de matrices simetricas. El grupo $\mathrm{GL}(n,K)$ actua en S_n via $g.a = gag^t$, donde g^t es la matriz traspuesta de g. Para $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$ dar una lista de las orbitas de esta accion (clasificacion de formas cuadraticas). Calcular la dimension de la clausura Zariski de las orbitas. Para cada orbita determinar cuales son las orbitas contenidas en su clausura.

8) Sea $\alpha \in K^{n\times n}$ una matriz de Jordan (α es una matriz diagonal en bloques, cada bloque es un bloque de Jordan). Denotemos J el conjunto de todas las matrices de Jordan. Para cada $\alpha \in J$ sea $[\alpha] \subset K^{n\times n}$ el conjunto de las matrices semejantes a α. El grupo $G = \mathrm{GL}(n,K)$ actua en $K^{n\times n}$ via $g.a = gag^{-1}$ y $[\alpha]$ es justamente la orbita de α. La teoria de la forma de Jordan dice que $K^{n\times n}$ es la union disjunta de los $[\alpha]$ para $\alpha \in J$.
a) Denotemos $|\alpha|$ la clausura Zariski de $[\alpha]$. Demostrar que $|\alpha|$ es un conjunto algebraico afin irreducible.
b) Determinar la dimension de $|\alpha|$ para cada $\alpha \in J$.
c) Demostrar que $|\alpha|$ es una union disjunta de conjuntos $[\beta]$ para ciertos $\beta \in J$. Cuales β aparecen ? (o sea, cuales formas de Jordan son caso limite de una forma de Jordan dada ?) La relacion $\beta \leq \alpha$ si $[\beta] \subset |\alpha|$ es una relacion de orden en el conjunto J; explicitarla.