CUÁDRICAS Y CÚBICAS

Fernando Cukierman

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Introducción

En esta monografía presentamos una introducción al estudio de las hipersuperficies algebraicas afines y proyectivas.

En las dos primeras secciones tratamos la clasificación de cuádricas reales y complejas bajo el grupo afín. Los invariantes utilizados para realizar la clasificación son la signatura, la dimensión del centro y la existencia de singularidades. En el §3 consideramos similarmente la clasificación ortogonal.

En el §4 damos algunas definiciones generales referentes a acciones de grupo y funciones invariantes, indicando su relación con problemas de clasificación, de acuerdo con Félix Klein. Estos conceptos permiten unificar ideas y su aplicación no se limita a los temas considerados en estas notas. En efecto, las cuestiones de clasificación de diversos objetos surgen frecuentemente, dentro y fuera de la Matemática, y son de interés central.

Algunas de las definiciones y consideraciones anteriores sobre polinomios de grado dos se pueden extender a polinomios de grado $d \geq 2$; esto se hace en el §5. Ponemos énfasis en el caso de polinomios en dos variables, correspondiente a las curvas algebraicas afines planas. Allí ofrecemos algunos comentarios y enunciados sin demostración referentes a la multiplicidad de intersección, que son utilizados en parágrafos posteriores. Esto significa en particular que estas notas no son autocontenidas. Nuestra intención es solamente dar un complemento a los textos mencionados en la bibliografía; nos sentiremos satisfechos si algunos detalles de nuestra presentación ayudan al lector en el estudio de las obras principales.

En el §6 definimos el espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial sobre un cuerpo. Tratamos solamente algunas nociones básicas como subespacios lineales, transformaciones proyectivas y cubrimiento afín, necesarias en los parágrafos posteriores. Destacamos la ausencia del interesante tópico de la Geometría Proyectiva Sintética, para el cual referimos a la bibliografía.

Otro objetivo en estas notas es explicar la clasificación de cúbicas en el plano proyectivo complejo mediante el invariante $\jmath$.

Comenzamos en (7.1) con algunas generalidades sobre hipersuperficies en espacios proyectivos, similares a las de §5 en el caso afín. Relacionando ambas situaciones, incluímos aquí los procesos de homogeneización y deshomogeneización de polinomios y los correspondientes de clausura proyectiva y afinización de hipersuperficies.

El parágrafo (7.2) se ocupa de las cuádricas proyectivas, cuya clasificación se obtiene fácilmente a partir de lo hecho en el caso afín.

Como otro caso de clasificación de hipersuperficies y por su relevancia en el estudio de cúbicas, en (7.3) tratamos con cierto detalle la clasificación de finitos puntos en la recta proyectiva. El resultado principal es que cuatro puntos ordenados son clasificados por la razón doble, mientras que cuatro puntos no ordenados lo son por el invariante $\jmath$.

En (7.4) consideramos curvas en el plano proyectivo. Aquí enunciamos el Teorema de Bèzout, contentándonos con dar referencias para varias demostraciones. Sin embargo, demostramos la equivalencia entre este teorema y el "principio de conservación del número de intersecciones", poniendo de manifiesto la conexión que existe entre algunas ideas clásicas y otras más modernas como homotopía y anillo de Chow. En este mismo parágrafo tratamos la relación entre puntos de inflexión y Hessiano; asimismo consideramos los puntos de tangencia de un haz de rectas y la curva polar. Estos son los ingredientes necesarios para realizar en (7.5) la clasificación de cúbicas: Toda cúbica no singular en el plano proyectivo complejo posee exactamente nueve puntos de inflexión. Por cada uno de ellos pasan exactamente cuatro rectas tangentes no inflexionarias. El invariante $\jmath$ de cualquiera de estas nueve cuaternas determina la cúbica salvo transformaciones proyectivas. La función $\jmath$ establece entonces una biyección entre clases de equivalencia de cúbicas no singulares bajo el grupo proyectivo y los números complejos.

Una primera versión de estas notas fué redactada a partir del dictado de la materia Geometría Proyectiva durante los primeros cuatrimestres de 1996, 1997 y 1998 en el Departamento de Matemática de la FCEyN, Universidad de Buenos Aires. La redacción presente fue llevada a cabo a raíz de un curso dictado en el IMCA durante Julio de 2000. Agradezco a los participantes de dichos cursos por su entusiasmo, atención paciente y comentarios constructivos.

Es un placer agradecer también a mis colegas peruanos particularmente a Renato Benazic, César Carranza, Félix Escalante y Roger Metzger por su amigable hospitalidad, a Elon Lima por varias conversaciones enriquecedoras y especialmente a César Camacho quien hizo posible la realización del programa de actividades del cual formó parte nuestra visita.

Fernando Cukierman
Buenos Aires, Agosto 2000

Tabla de Contenidos

§1. **Polinomios de grado dos y cuádricas**

(1.1) Sea K un cuerpo. Por ejemplo, K podria ser el cuerpo de los números racionales, reales o complejos, o un cuerpo finito.

Fijamos un número natural $n \in \mathbb{N}$.

Sea F un polinomio en n variables $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes en K, de grado dos. Vale decir, F es una expresión de la forma

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j \ + \ \sum_{1 \leq i \leq n} b_i x_i \ + \ c$$

donde $a_{ij}, b_i, c \in K$. Suponemos que algun a_{ij} es no nulo, de manera que el grado de F es realmente dos.

También se puede escribir F en notación matricial

$$F(x) = x^t a x + b x + c$$

donde $a = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$, $b = (b_i) \in K^{1 \times n}$ es un vector fila, y
$x = (x_i) \in K^{n \times 1}$ es un vector columna $((\ )^t$ denota matriz traspuesta).

(1.2) **Observación:** La matriz a utilizada en la escritura de F no es única, debido a que $x_i x_j = x_j x_i$ implica $x^t a x = x^t a^t x$. De esta igualdad se deduce que $x^t a x = x^t a' x$ donde $a' = (a + a^t)/2$ (si $2 \in K$ es no nulo). Vale decir, reemplazando a por a', se puede suponer que a es simétrica. Bajo esta suposicion, la escritura de F resulta única, como es fácil de verificar.

(1.3) **Definición:** La cuádrica definida por F es el subconjunto de K^n definido como

$$\mathcal{C}(F) = \{x \in K^n / \ F(x) = 0\}$$

(1.4) **Definición:** Decimos que un subconjunto $C \subset K^n$ es una cuádrica si existe un polinomio $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ de grado dos tal que $C = \mathcal{C}(F)$. En tal caso, diremos que el polinomio F es una ecuación de C.

(1.5) **Observación:** Una cuádrica C puede tener varias ecuaciones diferentes. En primer lugar, para todo $k \in K - \{0\}$, $\mathcal{C}(kF) = \mathcal{C}(F)$. Pero la falta de unicidad puede ocurrir también por motivos más sutiles. Por ejemplo,

si K es el cuerpo de los números reales, sea $F = x^2 + y^2$ y $G = x^2 + 5y^2$. Entonces $\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}(G) = \{(0, 0)\}$, pero F y G no son proporcionales.
En otras palabras, la implicación

$$\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}(G) \Longrightarrow G = kF \quad \text{para algun} \quad k \in K - \{0\}$$

es falsa en general. Por otro lado, esta implicación es verdadera bajo ciertas hipótesis (K algebraicamente cerrado, o $K = \mathbb{R}$ y F y G no singulares, ver más adelante). En todo caso, rescatamos aquí la importancia de distinguir entre trabajar con cuádricas o con sus ecuaciones. En lo que sigue, mayormente trabajaremos con polinomios F de grado dos, considerando eventualmente la cuádrica $\mathcal{C}(F)$ correspondiente.

§2. **Clasificación afín de polinomios cuadráticos**

(2.1) Denotamos $\mathrm{GL}(n,K)$ el grupo de matrices $n \times n$ con coeficientes en K que son inversibles. Sean $\sigma \in \mathrm{GL}(n,K)$ y $t \in K^n$. Consideramos la aplicación $f = f_{\sigma,t} : K^n \to K^n$ tal que

$$f(x) = \sigma x + t$$

para $x \in K^n$ (transformación afín con matriz σ y traslación t). El conjunto de estas transformaciones forma un grupo, el grupo afín, que denotamos $A(n,K)$.

(2.2) **Definición:** Sea F un polinomio de grado dos en n variables con coeficientes en K y sea $f_{\sigma,t} \in A(n,K)$ una transformación afín. Definimos un nuevo polinomio $f.F$ de grado dos, reemplazando x en F por $\sigma x + t$:

$$f.F(x) = F(f(x)) = F(\sigma x + t)$$

(2.3) **Definición:** Si F y G son dos polinomios de grado dos en n variables, decimos que F es afínmente equivalente a G (escrito $F \equiv G$) si existen $f \in A(n,K), k \in K - 0$ tales que

$$G = k(f.F)$$

(2.4) **Observación:** Se verifica facilmente que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

(2.5) **Observación:** Con la notación anterior, las cuádricas correspondientes satisfacen

$$f(\mathcal{C}(G)) = \mathcal{C}(F)$$

Escrito de otra manera: $\mathcal{C}(f.F) = f^{-1}(\mathcal{C}(F))$.

(2.6) Calculemos explícitamente $f.F$ en términos de f y de F.

Si $F(x) = x^t a x + bx + c$ entonces

$$\begin{aligned}
F(\sigma x + t) &= (\sigma x + t)^t a(\sigma x + t) + b(\sigma x + t) + c \\
&= x^t(\sigma^t a \sigma)x + x^t \sigma^t a t + t^t a \sigma x + b\sigma x + (t^t a t + bt + c) \\
&= x^t(\sigma^t a \sigma)x + (2t^t a + b)\sigma x + (t^t a t + bt + c)
\end{aligned}$$

(como a es simétrica, tenemos $x^t\sigma^t at = (x^t\sigma^t at)^t = t^t a\sigma x$)

En otras palabras, si escribimos el polinomio transformado $f.F$ en la forma

$$f.F(x) = x^t a' x + b' x + c'$$

entonces los nuevos coeficientes a', b', c' vienen dados por

$$a' = \sigma^t a\sigma, \quad b' = (2t^t a + b)\sigma, \quad c' = (t^t at + bt + c) = F(t)$$

El resultado básico de la teoría es el siguiente.

(2.7) **Teorema:** (clasificación afín de polinomios reales de grado dos) Mantenemos las notaciones anteriores, excepto que ahora K es el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Sea F un polinomio de grado dos en $x_1, \ldots, x_n$. Entonces F es afínmente equivalente a uno y solo uno de los polinomios de grado dos de la siguiente lista

$$A_{r,p} = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2, \quad 0 \leq p \leq r \leq n, \quad r \leq 2p$$
$$B_{r,p} = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2 - 1, \quad 0 \leq p \leq r \leq n$$
$$C_{r,p} = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2 - x_{r+1}, \quad 0 \leq p \leq r < n, \quad r \leq 2p$$

Antes de la demostración, hacemos algunas

(2.8) **Observaciones:**

1. Las desigualdades escritas para p, r son impuestas por la condición de unicidad, como va a ser explicado durante la demostración.

2. Los polinomios $A_{r,p}, B_{r,p}, C_{r,p}$ (denominados "polinomios standard" o "formas canónicas") tienen la misma parte cuadrática, para un cierto (r, p), cuya matriz es diagonal de rango r, con p unos, $r - p$ menos unos y $n - r$ ceros.

3. Para $n = 2$ es costumbre referirse a las cuádricas como "secciones cónicas" o simplemente "cónicass". El motivo es que corresponden a las secciones planas de un cono (ver Ejercicio 1). En este caso la lista del Teorema esta de acuerdo con la clásica clasificación de cónicas, incluyendo las cónicas degeneradas. En efecto, tenemos

$A_{1,1} = x_1^2$ (recta doble)
$A_{2,1} = x_1^2 - x_2^2$ (rectas transversales)
$A_{2,2} = x_1^2 + x_2^2$ (un punto)

$B_{1,0} = -x_1^2 - 1$ (conjunto vacio)
$B_{1,1} = x_1^2 - 1$ (rectas paralelas)
$B_{2,0} = -x_1^2 - x_2^2 - 1$ (conjunto vacio)
$B_{2,1} = x_1^2 - x_2^2 - 1$ (hipérbola)
$B_{2,2} = x_1^2 + x_2^2 - 1$ (elipse)

$C_{1,1} = x_1^2 - x_2$ (parábola)

Escribimos entre parentesis el nombre de la cuádrica correspondiente a cada polinomio de grado dos. Una excepción a esto es la terminología "recta doble", que justificamos de la manera siguiente. Segun nuestra definición, la cuádrica asociada al polinomio x_1^2 es la recta con ecuación $x_1 = 0$. Sin embargo, si consideramos para cada $t \in \mathbb{R}$ la cuádrica con ecuación $x_1^2 - t^2$, dicha cuádrica es, para $t \neq 0$, la unión de dos rectas por el origen (con pendientes t y $-t$), que tienden a confundirse cuando $t \to 0$.

4. Para $n = 3$ tenemos primeramente todos aquellos A, B, C donde no figura la variable x_3. Estos son los polinomios en x_1, x_2 detallados en el caso $n = 2$, pensados como polinomios en tres variables. Las cuádricas correspondientes son cilindros sobre cónicas
(Ejercicio: visualizar cada una).

Los "nuevos" son aquellos con $r = 3$ y los de la familia C con $r = 2$:

$A_{3,2} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ (cono elíptico)
$A_{3,3} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ (un punto)

$B_{3,0} = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1$ (conjunto vacio)
$B_{3,1} = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1$ (hiperboloide de una hoja)
$B_{3,2} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$ (hiperboloide de dos hojas)
$B_{3,3} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ (elipsoide)

$C_{2,1} = x_1^2 - x_2^2 - x_3$ (paraboloide hiperbolico - silla de montar)
$C_{2,2} = x_1^2 + x_2^2 - x_3$ (paraboloide elíptico)

Demostración del Teorema (2.7):
Existencia: Vamos a dar un procedimiento constructivo para reducir, mediante transformaciones afines, un F dado a alguno de la lista. El ingrediente básico del procedimiento es el metodo de "completar cuadrados". Sea dado $F(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j + \sum b_i x_i + c$. Supongamos primero que $a_{nn} \neq 0$ (o sea, x_n^2 realmente aparece en F).

Escribamos F en la forma

$$F(x_1, \ldots, x_n) = a_{nn} x_n^2 + L(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n + Q(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

donde L es de grado uno y Q de grado dos. Completando cuadrados podemos escribir

$$F = \pm(\alpha x_n + L/2\alpha)^2 - L^2/4\alpha^2 + Q$$

donde $\alpha = |a_{nn}|^{1/2}$. Denotemos $F^{(1)} = -L^2/4\alpha^2 + Q$, que es un polinomio de grado menor o igual que dos en $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Via la transformación afín tal que $\alpha x_n + L/2\alpha \;\to\; x_n, \quad x_k \to x_k$ para $k \neq n$ obtenemos

$$F \equiv \pm x_n^2 + F^{(1)}$$

Si fuese $a_{nn} = 0$ pero $a_{ii} \neq 0$ para algun otro indice i entonces completariamos cuadrados de la misma manera, trabajando con la variable x_i en lugar de la x_n. Si $a_{ii} = 0$ para todo i entonces nos reducimos al caso anterior de la manera siguiente: como $a_{ij} \neq 0$ para algun (i, j) (recordar que la matriz a es no nula), aplicamos la transformación lineal tal que

$$x_i \to x_i + x_j, \quad x_j \to x_i - x_j, \quad x_k \to x_k \quad \text{para} \quad k \neq i, j$$

Dado que $x_i x_j$ se transforma en $x_i^2 - x_j^2$, en el polinomio transformado de F aparece x_i^2, como queríamos.

Como $F^{(1)}(x_1, \dots, x_{n-1})$ tiene grado menor o igual que dos, se presentan varias posibilidades. Si tiene grado cero (o sea, es una constante) entonces F es equivalente a una forma canónica de clase A o B, dependiendo de que la constante sea nula o no-nula. Si $F^{(1)}$ tiene grado uno, es una función lineal que se puede transformar afínmente en x_{n-1} y resulta $F \equiv \pm x_n^2 + x_{n-1}$, que es equivalente a una forma canónica de clase C. Si $F^{(1)}$ tiene grado dos, aplicamos a $F^{(1)}$ el procedimiento de completar cuadrados, para obtener $F \equiv \pm x_n^2 + \pm x_{n-1}^2 + F^{(2)}$ con $F^{(2)}$ polinomio en $n-2$ variables, de grado menor o igual que dos.

Es claro que iterando este procedimiento a lo sumo n veces obtenemos la reducción deseada.

Unicidad: Basta con ver que dos formas canónicas distintas no son afínmente equivalentes.

Ante todo nos proponemos justificar las desigualdades que conectan p (número de coeficientes positivos) y r (rango de la matriz de la forma cuadrática). Las desigualdades $0 \leq p \leq r \leq n$ son claramente necesarias, en virtud de las definiciones utilizadas. Las desigualdades $r \leq 2p$ se pueden escribir como $r - p \leq p$, lo cual dice que el número de coeficientes negativos es menor o igual que el número de coeficientes positivos. Via multiplicación por -1 obtenemos la equivalencia $A_{r,r-p} \equiv A_{r,p}$, de manera que para tener unicidad es necesario imponer una condición como $r - p \leq p$. Lo mismo ocurre con el tipo C, pero no con el tipo B.

Veamos ahora que, en efecto, las formas canónicas de la lista no son equivalentes. La estrategia para demostrar esto es exhibir "cantidades invariantes por equivalencia afín" que tomen valores distintos en las distintas formas canónicas. Dichos invariantes van a ser: rango, signatura, dimensión del centro y singularidades. Pasamos a describir estas nociones.

Utilizaremos la notación y resultados de (2.6). Supongamos que $F = x^t a x + bx + c$ y $G = x^t a' x + b' x + c'$ son polinomios de grado dos tales que $F \equiv G$. Segun (2.6), las formas cuadráticas (= polinomios de grado dos homogéneos) $x^t a x$ y $x^t a' x$ son afínmente equivalentes. Equivalentemente, existe $\sigma \in \mathrm{GL}(n, K)$ tal que $a' = \sigma^t a \sigma$. Notar que para formas cuadráticas la equivalencia afín es lo mismo que la equivalencia bajo el grupo lineal

$\mathrm{GL}(n, K)$ (sin traslaciones). Aquí necesitamos la siguiente proposición, para cuya demostración referimos a textos de Algebra Lineal, como por ejemplo [G].

(2.7.1) **Proposición:** (ley de inercia de Sylvester): Sea $F(x) = x^t ax$ una forma cuadrática con coeficientes reales. Entonces F es equivalente a una forma cuadrática $G = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ diagonal. El número p (resp. $\bar{p}$, r) de indices i tales que $\lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$, $\lambda_i \neq 0$) es invariante, vale decir: si F es equivalente a otra G' diagonal (con analogos $p', \bar{p}', r'$) entonces $p = p', \bar{p} = \bar{p}', r = r'$.

(2.7.2) **Observación:** Dado que $r = p + \bar{p} = \mathrm{rango}(a)$, dos de los números $r, p, \bar{p}$ determinan al tercero. Se denomina signatura de F al par ordenado $\mathrm{sg}(F) = (p, \bar{p})$. En estos términos, la Proposición dice que la signatura esta bien definida (independiente de la forma diagonal a la que se pueda llevar F), y que dos formas cuadráticas reales son equivalentes si y solo si tienen la misma signatura.

Demostración:

La posibilidad de reducir a forma diagonal ya la hemos tratado, mediante el metodo de completar cuadrados.

En cuanto a la invariancia de (r, p), la del rango r es un ejercicio elemental. Para ver la invariancia de p, supongamos que $G = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ y $G' = \sum_{i=1}^n \lambda_i' x_i^2$ son equivalentes. Elijamos la numeración de las coordenadas de manera que $\lambda_i > 0$ para $1 \leq i \leq p$, $\lambda_i < 0$ para $p + 1 \leq i \leq r$, similarmente para G'. Supongamos $p > p'$. Consideremos el subespacio lineal $P = (x_{p+1} = \cdots = x_n = 0)$. Claramente $G(x) > 0$ para todo $x \in P - \{0\}$. Bajo la transformación afín que da la equivalencia, P corresponde a un subespacio P' (de dimensión p) tal que $G'(x) > 0$ para todo $x \in P' - \{0\}$. El subespacio $N' = (x_1 = \cdots = x_{p'} = 0)$, de dimensión $n - p'$, es tal que $G'(x) \leq 0$ para todo $x \in N'$. La hipótesis $p > p'$ implica que $P' \cap N' \neq 0$, lo cual da una contradiccion. Por lo tanto, $p = p'$, como queríamos demostrar.

(2.7.3) De la discusión precedente resulta que si dos polinomios de grado dos son afínmente equivalentes entonces sus partes cuadráticas tienen la misma signatura. Aplicando esto a las formas canónicas, obtenemos:

(*) Si dos formas canónicas son equivalentes entonces deben tener el mismo (r, p).

En particular, dentro de cada grupo A, B o C no hay formas equivalentes.

Resta ver que, con un (r, p) fijo, $A_{r,p} \not\equiv B_{r,p}$, $A_{r,p} \not\equiv C_{r,p}$ y $B_{r,p} \not\equiv C_{r,p}$. Esto lo vamos a lograr mediante la consideración de dos nuevos invariantes: el centro y el conjunto singular de un polinomio de grado dos.

(2.7.4) **Definición:** Sea $F = x^t ax + bx + c$ un polinomio de grado dos sobre el cuerpo K. El centro de F es la variedad lineal en K^n definida como

$$\text{centro}(F) = \{y \in K^n : 2y^t a + b = 0\}$$

Definimos también

$$\text{c}(F) = \dim \text{centro}(F)$$

Convenimos en que $\text{c}(F) = -1$ si $\text{centro}(F) = \emptyset$

(2.7.5) **Observaciones:**
1. Se verifica facilmente que las condiciones que definen el centro también se pueden escribir

$$\text{centro}(F) = \{y \in K^n : \frac{\partial F(y)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

2. (significado geometrico del centro) Sea $F = x^t ax + c$ un polinomio de grado dos sin términos lineales. Entonces $F(-x) = F(x)$ para todo $x \in K^n$. En otras palabras, si g es la transformación afín tal que $g(x) = -x$ entonces $(g.F) = F$. En particular, $g(\mathcal{C}(F)) = \mathcal{C}(F)$ (la transformación g preserva la cuádrica $\mathcal{C}(F)$, o también, dicha cuádrica es simétrica respecto al origen de coordenadas). Notar también que el origen $0 \in \text{centro}(F)$. Recíprocamente, si F es ahora cualquier polinomio de grado dos y $t \in \text{centro}(F)$ entonces, segun (2.6) el polinomio transformado $f.F$ no tiene términos lineales (aquí $f(x) = x + t$ es la traslación por t). La simetría $g(x) = -x + 2t$ con centro t preserva $\mathcal{C}(F)$. Podemos decir entonces que los puntos del centro de una cuádrica son sus centros de simetría (aquí se trata de simetría central, respecto a un punto).

(2.7.6) **Proposición:** Si $f \in A(n, K)$ es una transformación afín entonces

$$\text{centro}(f.F) = f^{-1}(\text{centro}(F))$$

Demostración: ejercicio.

(2.7.7) **Corolario:** Con la notación anterior, $\mathrm{c}(f.F) = \mathrm{c}(F)$. Dicho de otro modo, $F \equiv G$ implica $\mathrm{c}(F) = \mathrm{c}(G)$ (c es un invariante afín).

(2.7.8) **Proposición:** El invariante c toma los siguientes valores en las formas canónicas

$$\begin{aligned} \mathrm{c}(A_{r,p}) &= n - r \\ \mathrm{c}(B_{r,p}) &= n - r \\ \mathrm{c}(C_{r,p}) &= -1 \end{aligned}$$

Demostración: Calculemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A_{r,p})}{\partial x_i} &= \pm 2x_i = 0, \quad 1 \leq i \leq r \\ &= 0, \quad r + 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

de manera que $\text{centro}(A_{r,p}) = \{(0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots, x_n)\}$ y por lo tanto $\mathrm{c}(A_{r,p}) = n - r$.

Los casos B y C son similares.

(2.7.9) **Corolario:** Para todo (p, r), $A_{r,p} \not\equiv C_{r,p}$ y $B_{r,p} \not\equiv C_{r,p}$.

Demostración: $n - r \neq -1$

(2.7.10) **Observación:** En otros términos, las cuádricas de tipo A y B tienen centro no vacio, mientras que las de tipo C no lo tienen. Por este motivo, no pueden ser afínmente equivalentes.

Nos falta excluir la posibilidad $A_{r,p} \equiv B_{r,p}$. Esto lo vamos a lograr mediante la consideración de puntos singulares.

(2.7.11) **Definición:** Sea $F = x^t ax + bx + c$ un polinomio de grado dos sobre el cuerpo K. El conjunto de puntos singulares de F es

$$\mathcal{S}(F) = \text{centro}(F) \cap \mathcal{C}(F) \subset K^n$$

En términos de ecuaciones:

$$\mathcal{S}(F) = \{y \in K^n : F(y) = 0, \frac{\partial F(y)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

(2.7.12) **Proposición:** Si $f \in A(n, K)$ es una transformación afín entonces

$$\mathcal{S}(f.F) = f^{-1}(\mathcal{S}(F))$$

Demostración: Resulta de (2.7.6).

(2.7.13) **Corolario:** Supongamos $F \equiv G$. Entonces $\mathcal{S}(F) = \emptyset$ si y solo si $\mathcal{S}(G) = \emptyset$.

(2.7.14) **Proposición:** Para todo (r, p), $A_{r,p} \not\equiv B_{r,p}$.

Demostración: En virtud de (2.7.13), basta con verificar que $\mathcal{S}(A_{r,p}) \neq \emptyset$ y que $\mathcal{S}(B_{r,p}) = \emptyset$. Esto resulta facilmente de (2.7.11) y el cálculo hecho en la demostración de (2.7.8)

El Teorema (2.7) queda demostrado.

(2.8) **Observación:** Si en lugar del cuerpo $\mathbb{R}$ trabajasemos con el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, el enunciado del Teorema (2.7) y su demostración serian validos, utilizando las formas canónicas más sencillas

$$A_r = \sum_{i=1}^{r} x_i^2, \quad 0 \leq r \leq n,$$
$$B_r = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - 1, \quad 0 \leq r \leq n$$
$$C_r = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - x_{r+1}, \quad 0 \leq r < n$$

El punto esencial es que el único invariante de una forma cuadrática compleja es su rango (al completar cuadrados podemos reemplazar $-x_j^2 = (ix_j)^2 \equiv x_j^2$). Más generalmente, si el cuerpo K es cualquiera, las formas canónicas son como antes, con parte cuadrática diagonal $\sum_{i=1}^{r} \epsilon_i x_i^2$ donde los ϵ_i varian en un conjunto de representantes del grupo $K^*/(K^*)^2$ (este grupo es $\{1,-1\}$ si $K=\mathbb{R}$, y es $\{1\}$ si $K=\mathbb{C}$. Para más detalles sobre esto ver Serre, "Cours d'Arithmetique".

(2.9) **Observación:** Resumiendo, hemos visto que las propiedades geometricas esenciales de una cuádrica, independientes de un sistema de coordenadas afín, son su signatura, dimensión del centro y existencia o no de puntos singulares.

(2.10) La clasificación afín de polinomios cuadráticos reales se puede resumir entonces mediante el siguiente cuadro:

	rango	signatura	dim centro	puntos singulares
$A_{r,p}$	r	$2p-r$	$n-r$	$\neq \emptyset$
$B_{r,p}$	r	$2p-r$	$n-r$	$= \emptyset$
$C_{r,p}$	r	$2p-r$	-1	$= \emptyset$

§3. **Clasificación ortogonal de polinomios cuadráticos**

Mantenemos las notaciones del §2. Denotaremos $O(n,\mathbb{R})$ al subgrupo del grupo afín $A(n,\mathbb{R})$ que consiste de las transformaciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas por $f(x) = \sigma x + t$ donde σ es una matriz ortogonal ($\sigma^t = \sigma^{-1}$).

(3.1) **Definición:** Si F y G son polinomios de grado dos en n variables, decimos que F es ortogonalmente equivalente a G (escrito $F \cong G$) si existe $f \in O(n,\mathbb{R})$ tal que $G = f.F$.

Nos proponemos, como antes, hallar formas canónicas para esta relación de equivalencia. Notar que, por conveniencia, en la definición presente hemos escrito $G = f.F$ en lugar de $G = k(f.F)$ como en el caso de la equivalencia afín. Mas abajo volveremos sobre este punto.

(3.2) **Teorema:** (clasificación ortogonal de polinomios reales de grado dos) Sea F un polinomio de grado dos en $x_1, \dots, x_n$. Entonces F es ortogonalmente equivalente a uno y solo uno de los polinomios de grado dos de la siguiente lista

$$\begin{aligned} A_{r,\lambda} &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 \\ B_{r,\lambda,\mu} &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + \mu, \quad \mu \neq 0 \\ C_{r,\lambda,\mu} &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + \mu x_{r+1}, \quad \mu > 0 \end{aligned}$$

donde $0 < r \leq n$, $\lambda_i \in \mathbb{R} - \{0\}$, con $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \forall i$.

Demostración:
Existencia: En este caso ortogonal, el metodo de reducción a forma canónica consiste en, primero, diagonalizar la matriz de la forma cuadrática, y luego completar cuadrados.

(3.2.1) En efecto, supongamos que $F = x^t a x + bx + c$ y $G = x^t a' x + b' x + c'$ son polinomios de grado dos. Si $G = f.F$ con $f = f_{\sigma,t}$ entonces, segun (2.6) tenemos $a' = \sigma^t a \sigma$. Cuando $f \in O(n,\mathbb{R})$ resulta

$$a' = \sigma^{-1} a \sigma$$

o sea, las matrices simétricas a y a' son semejantes. Ahora utilizamos el bien conocido (ver por ejemplo [A], [G])

(3.2.2) **Teorema:** (Teorema Espectral) Si a es una matriz simétrica con coeficientes reales, existe $\sigma \in O(n, \mathbb{R})$ tal que $a' = \sigma^{-1} a \sigma$ es una matriz diagonal $a' = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Equivalentemente, los autovalores de a son reales y existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ que consiste de autovectores de a.

(3.2.3) **Corolario:** Todo F es ortogonalmente equivalente a un G de la forma

$$G = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i' x_i + c'$$

Demostración: Utilizar (2.6).

En consecuencia, para llegar a la forma canónica basta con reducir un G como en el Corolario, lo cual se logra completando cuadrados. En efecto, cambiando eventualmente la numeración de las variables, podemos suponer $\lambda_i \neq 0$ sii $1 \leq i \leq r$. Entonces,

$$G = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i' x_i + c' = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (x_i + b_i'/2\lambda_i)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i' x_i + c''$$

donde $c'' = c' - \sum_{i=1}^{r} b_i'^2/4\lambda_i$. Consideramos los casos:

a) Si $b_i' = 0$ para $r+1 \leq i \leq n$ entonces tenemos una forma canónica de tipo A o B, segun sea $c'' = 0$ o $c'' \neq 0$.

b) Caso contrario, sea $\mu = (\sum_{i=r+1}^{n} b_i'^2)^{1/2}$. Para reducir G a forma C bastaria con poder reemplazar $\sum_{i=r+1}^{n} b_i' x_i + c''$ por μx_{r+1}, x_i por x_i para $1 \leq i \leq r$, via una transformación ortogonal. Para esto, afirmamos que existe una transformación ortogonal $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la forma

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 1/\mu \sum_{i=r+1}^{n} b_i' x_i + c'', \ldots)$$

En efecto, denotemos con e_i los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sea $v = 1/\mu \sum_{i=r+1}^{n} b_i' e_i$. El conjunto de vectores $\{e_1, \ldots, e_r, v\}$ es ortonormal y por lo tanto se puede completar a una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Tomamos como σ la matriz cuyas filas son los vectores de esta base. Es claro que una tal σ reduce G a tipo C.

Unicidad:
Primeramente observemos que, por (3.2.1), si dos formas canónicas son equivalentes entonces tienen el mismo rango r y el mismo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ ya que los λ_i son los autovalores ordenados decrecientemente.

En segundo lugar, como $O(n, \mathbb{R}) \subset A(n, \mathbb{R})$, todo invariante afín es un invariante ortogonal, de manera que no puede haber equivalencia entre formas de distintas familias A, B, C (considerar centro y puntos singulares).

Solamente resta ver que

a) $B_{r,\lambda,\mu} \cong B_{r,\lambda,\mu'}$ implica $\mu = \mu'$.

b) $C_{r,\lambda,\mu} \cong C_{r,\lambda,\mu'}$ implica $\mu = \mu'$.

a) Supongamos que la equivalencia es realizada mediante $f = f_{\sigma,t}$, de manera que $f.B_{r,\lambda,\mu} = B_{r,\lambda,\mu'}$. Segun (2.6) tenemos que $\mu' = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i t_i^2 + \mu$. También, $t \in$ centro$(B_{r,\lambda,\mu})$, y por el cálculo de (2.7.8) resulta $t_i = 0$ para $1 \leq i \leq r$. Obtenemos entonces $\mu' = \mu$.

b) Sea x_0 una nueva variable y denotemos $\tilde{C}_{r,\lambda,\mu} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + \mu x_{r+1} x_0$. Supongamos $C_{r,\lambda,\mu} \cong C_{r,\lambda,\mu'}$. Esto implica que $\tilde{C}_{r,\lambda,\mu} \cong \tilde{C}_{r,\lambda,\mu'}$. Por otra parte, tenemos la equivalencia $\tilde{C}_{r,\lambda,\mu} \cong \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + \frac{\mu}{\sqrt{2}}(x_{r+1}^2 - x_0^2)$. Resulta entonces que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + \frac{\mu}{\sqrt{2}}(x_{r+1}^2 - x_0^2) \cong \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + \frac{\mu'}{\sqrt{2}}(x_{r+1}^2 - x_0^2)$$

De la igualdad del conjunto de autovalores de formas cuadráticas ortogonalmente equivalentes, resulta $\mu' = \pm\mu$. Como $\mu, \mu' > 0$, obtenemos $\mu' = \mu$.

Esto termina la demostración del Teorema.

Para mayores detalles sobre la geometría de cuádricas se puede consultar [A], [H].

§4. **Acciones de grupo y problemas de clasificación**

(4.1) **Definición:** Si G es un grupo y X es un conjunto, una acción a izquierda de G en X es una aplicación

$$\alpha : G \times X \to X$$

tal que, utilizando la notación $\alpha(g, x) = g.x$, se verifica
$e.x = x$ para todo $x \in X$ (e denota el elemento neutro de G).
$(gh).x = g.(h.x)$ para todo $g, h \in G$, $x \in X$.

(4.2) **Observación:** La noción de acción a derecha es similar, se pide $(hg).x = g.(h.x)$. Cambiando la notación $g.x$ por $x.g$, dicha condición se escribe (más agradablemente)

$$x.(gh) = (x.g).h$$

De una acción a izquierda se deduce una a derecha (y viceversa) mediante $g.x = x.g^{-1}$ (ejercicio)

(4.3) Si $\alpha : G \times X \to X$ es una acción y $H \subset G$ es un subgrupo entonces la restricción $\alpha_H : H \times X \to X$ también es una acción. Si un subconjunto $Y \subset X$ es G-estable ($G.Y \subset Y$) entonces $\alpha : G \times Y \to Y$ es una acción. Notar que para todo subconjunto $Y \subset X$ el conjunto $G.Y$ (órbita de Y) es G-estable.

(4.3) Ejemplos:

a) Sea X el conjunto de todos los triangulos en $\mathbb{R}^2$ y sea $G = O(2, \mathbb{R})$ el grupo de transformaciones ortogonales. Tenemos una acción natural de G en X definida por $f.T = f(T)$.

b) Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y un cuerpo K. Sea X el conjunto de los polinomios de grado dos en n variables, con coeficientes en K. Si G es el grupo afín $A(n, K)$ entonces la formula $f.F(x) = F(f(x))$, utilizada anteriormente, define una acción a izquierda de G en X. La misma formula define una acción si G es cualquier subgrupo de $A(n, K)$, como por ejemplo $G = O(n, K)$.

c) Sea $X = \mathbb{K}^{n \times m}$ el conjunto de todas las matrices $n \times m$ con coeficientes en un cuerpo K. Sea $G = \mathrm{GL}(n, K) \times \mathrm{GL}(m, K)$. Entonces G actúa a izquierda en X via $(p,q).a = paq^{-1}$ para $(p,q) \in G$, $a \in X$ (similaridad de matrices)

d) Sea $X = K^{n\times n}$ el conjunto de todas las matrices $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo K. Sea $G = \mathrm{GL}(n, K)$ el grupo de matrices inversibles. Entonces G actúa a izquierda en X via $p.a = pap^{-1}$ para $p \in G$, $a \in X$ (semejanza de matrices)

e) Sea X un conjunto y sea $G = \mathbb{S}(X)$ el grupo de todas las biyecciones $f : X \to X$, donde la operación de grupo es la composición de funciones (grupo simétrico de X). Entonces la formula $f.x = f(x)$ define una acción a izquierda de G en X.

(4.4) **Proposición:** Sea $\alpha : G \times X \to X$ una acción a izquierda del grupo G en el conjunto X. Entonces la relación $\sim$ en X definida por

$$x \sim y \iff \exists g \in G, y = g.x$$

es de equivalencia. Las clases de equivalencia son las órbitas $G.x = \{g.x : g \in G\}$ para $x \in X$. El conjunto cociente se denota $X/\sim\ =\ X/G$.

Demostración: ejercicio.

(4.5) **Problemas de clasificación:** Sea $\alpha : G \times X \to X$ una acción. Un problema general importante es describir el conjunto cociente X/G. A veces es posible seleccionar explícitamente un subconjunto $C \subset X$ tal que la proyección al cociente $\pi : X \to X/G$ induce una biyección $C \to X/G$. Los elementos de C pueden ser llamados "formas canónicas": cada $x \in X$ es equivalente a un único elemento de C.

(4.6) **Definición:** Si A es un conjunto, una función $\varphi : X \to A$ es un invariante si

$$\varphi(g.x) = \varphi(x), \quad \forall g \in G, \forall x \in X$$

Sea I un conjunto de indices. Una familia de invariantes

$$\varphi_i : X \to A_i, \ (i \in I)$$

es *completo* si se verifica

$$x \sim y \quad \text{si y solo si} \quad \varphi_i(x) = \varphi_i(y), \forall i \in I$$

Consideremos estos conceptos a la luz de los ejemplos dados.

a) Dos triangulos son equivalentes sii sus lados tienen igual longitud. Describir el conjunto cociente.

b) Este ejemplo fue tratado en las secciones anteriores (cuando G es el grupo afín y el ortogonal). Allí hemos definido ciertos sistemas completos de invariantes (signatura, dimensión del centro, existencia de puntos singulares). Notar que en el caso del grupo afín, el espacio cociente es finito, ya que hemos dado una lista finita de formas canónicas.

c) Toda matriz es similar a una matriz diagonal de la forma

$$\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$$

El número de unos es el rango de la matriz. El rango constituye un sistema completo de invariantes.

d) Los coeficientes del polinomio característico de una matriz son invariantes por semejanza. Pero no forman un sistema completo de invariantes, ya que existen matrices no semejantes que tienen el mismo polinomo característico (p. ej. las matrices nilpotentes). Si K es algebraicamente cerrado entonces toda matriz es semejante a una matriz en forma de Jordan. Para un análisis más detallado de este ejemplo ver "Introduction to the theory of moduli", Mumford-Suominen, 5th Nordic Summer School in Mathematics, Oslo, 1970.

e) En este caso hay una sola órbita, el espacio cociente es un punto. Los únicos invariantes son las funciones constantes.

Para un tratamiento general del tema de esta sección se puede consultar el libro "Invariant theory, old and new", Dieudonne-Carrell. Otros ejemplos de problemas de clasificación se encuentran en [H].

§5. **Hipersuperficies en espacios afines**

(5.1) Consideramos un polinomio F en n variables $x_1, \dots, x_n$, de grado $\leq d \in \mathbb{N}$, con coeficientes en un cuerpo K. Por definición, F es una combinación lineal de monomios de la forma:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|\mu| \leq d} a_\mu x^\mu$$

donde $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$ es un multi-indice, $|\mu| = \sum_i \mu_i$, $x^\mu = x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}$, $a_\mu \in K$. Denotamos

$$K(n, d)$$

al conjunto de tales polinomios. Notar que $K(n, d)$ es un espacio vectorial sobre K, de dimensión igual al número de multi-indices μ tales que $|\mu| \leq d$. Dicha dimensión es igual al número combinatorio $\binom{n+d}{n}$ (ejercicio).

(5.2)) **Definición:** Si $F \in K(n, d) - \{0\}$, la hipersuperficie definida por F es

$$\mathcal{C}(F) = \{x \in K^n : \ F(x) = 0\}$$

(5.3) **Observaciones:**
1. Si $d = 2$, $\mathcal{C}(F) \subset K^n$ es una cuádrica.
2. Cuando $n = 1$, $\mathcal{C}(F) \subset K$ es un conjunto finito con $\leq d$ elementos.
3. Si $n = 2$, $\mathcal{C}(F) \subset K^2$ se denomina "curva algebraica afín plana" de grado $\leq d$, objeto que estudiaremos más adelante, especialmente en el caso $d = 3$.
4. Si $F = G.H$ es un producto de polinomios G, H entonces $\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}(G) \cup \mathcal{C}(H)$.
5. Es posible que $\mathcal{C}(F) = \emptyset$; la existencia de soluciones de la ecuación $F = 0$ es un problema no-trivial. Por ejemplo, si K fuera el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales estariamos considerando una ecuación diofantina, como la ecuación de Fermat $x^n + y^n = 1$.

(5.4) El grupo afín $A(n, K)$ actúa a izquierda en $K(n, d)$. La definición de la acción es como en el caso $d = 2$:

$$f.F(x) = F(f(x))$$

para $f \in A(n, K)$, $F \in K(n, d)$. Dicho de otra manera, si $f(x) = \sigma.x + t$, se reemplaza en F cada x_i por $\sum_j \sigma_{ij} x_j + t_i$.

(5.5) El correspondiente problema de clasificación (como en (3.5)) es clásico y difícil en general. Como en el caso de cuádricas, en el estudio geometrico de hipersuperficies es importante la consideración de invariantes de polinomios bajo la acción del grupo afín. Vamos a encarar algunos casos particulares en las secciones siguientes.

(5.6) **Definición:** Sea $F \in K(n,d)$ y sea $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{C}(F)$ (o sea, $F(p) = 0$). El espacio tangente de F en p es el subespacio afín de K^n definido por

$$T_F(p) = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(p)}{\partial x_i}(y_i - p_i) = 0\}$$

El espacio vectorial paralelo a $T_F(p)$ es el núcleo de la funcional lineal $dF(p)$ definida como

$$dF(p)(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(p)}{\partial x_i} y_i$$

En lo sucesivo, también utilizaremos la notación $\frac{\partial F(p)}{\partial x_i} = F_i(p)$.

(5.7) **Definición:** Con la notación anterior, p es un punto singular de F si $F(p) = 0$ y $F_i(p) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Equivalentemente, $T_F(p) = K^n$. Cuando p es punto no singular de F, el espacio tangente $T_F(p)$ es un hiperplano.

(5.8) **Definición:** La multiplicidad de F en p es el número natural $\mu_F(p)$ definido por

$$\partial^\alpha F(p) = 0 \Longleftrightarrow |\alpha| < \mu_F(p)$$

donde denotamos $\partial^\alpha F = \frac{\partial^{\alpha_1}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{(\partial x_n)^{\alpha_n}}(F)$. En otras palabras, el desarollo de Taylor de F en p comienza con términos de grado $\mu_F(p)$. Resulta de la definición que $\mu_F(p) = 0$ sii $p \notin \mathcal{C}(F)$; $\mu_F(p) = 1$ sii $p \in \mathcal{C}(F)$ es punto no singular de F; $\mu_F(p) \geq 2$ sii p es punto singular de F.

La estructura local de $\mathcal{C}(F)$ alrededor de un punto no singular es sencilla: el hiperplano tangente es una buena aproximacion. Más precisamente:

(5.9) **Proposición:** Supongamos $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$. Sea $p \in \mathcal{C}(F)$ un punto no-singular. Entonces existen abiertos no vacios $0 \in U \subset K^{n-1}$, $p \in V \subset K^n$ y una aplicación K-analítica $\varphi : U \to V$ tales que $\varphi : U \to \mathcal{C}(F) \cap V$ es una biyección. Además, la diferencial $d\varphi(0)$ es inyectiva.

Demostración: es una aplicación directa del teorema de la función implícita analítico (ver [C]).

(5.10) **Definición:** Un polinomio $F \in K(n,d)$ es *homogéneo* de grado d si en la expresión de (5.1) como suma de monomios, aparecen solamente monomios de grado exactamente d:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{|\mu|=d} a_\mu x^\mu$$

Se verifica entonces que $F(\lambda x) = \lambda^d F(x)$ para todo $\lambda \in K$.
Recíprocamente, esta condicion implica homogeneidad, si K es infinito (ejercicio).

(5.11) Si $F \in K(n,d)$ es homogéneo de grado d entonces $\mathcal{C}(F)$ es estable por multiplicación por cualquier $\lambda \in K$ ($\lambda.\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}(F)$). En lenguaje más geometrico, $\mathcal{C}(F)$ es un cono.

(5.12) Todo $F \in K(n,d)$ se escribe de manera única en la forma

$$F = \sum_{j=0}^{d} F_j$$

donde F_j es homogéneo de grado j. El polinomio F_j se llama "componente homogénea de F de grado j".

(5.13) **Observación:** La expresión de F como suma de polinomios homogéneos se puede escribir, más precisamente,

$$F = \sum_{j=r}^{d} F_j$$

con $F_r \neq 0$ y $F_d \neq 0$, de manera que $r = \mu_F(0)$ como en (5.8) y $d = \text{grado}(F)$.

(5.14) Manteniendo la notación anterior, la *forma inicial* de F es el polinomio homogéneo F_r con $r = \mu_F(0)$. El *cono tangente* de F en 0 es definido por

$$\text{cono}(F) = \mathcal{C}(F_r)$$

Cuando $r = 1$, el cono tangente es el hiperplano tangente definido en (5.6)

(5.15) Si $p \in K^n$ es cualquier punto, la forma inicial de F en p se define similarmente, aplicando una traslación a p. Más precisamente, la forma inicial de F en p se define como la forma inicial de $G(x) = F(x+p)$. El cono tangente de F en p, denotado $\text{cono}_p(F)$, es el conjunto de ceros de la forma inicial de F en p.

(5.16) Ejemplo:
a) Sea $F(x,y) = x^2 - y^2 + x^3$ (curva "alpha"). La forma inicial es $x^2 - y^2$, de manera que el cono tangente en $(0,0)$ es la unión de dos rectas.
b) Sea $F(x,y) = y^2 - x^3$ (curva cuspidal). La forma inicial es y^2, el cono tangente en $(0,0)$ es una recta (recta doble, ver (2.8)).

(5.17) En general, si F tiene multiplicidad dos en el origen, la forma inicial $F_2(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Si K es algebraicamente cerrado, hay dos posibilidades:
i) $b^2 - 4ac \neq 0$: aquí la forma inicial se factoriza como producto de dos formas lineales distintas, de manera que el cono tangente es la unión de dos rectas distintas. Un punto singular de multiplicidad dos con cono tangente consistente de dos rectas se denomina un "nodo".
ii) $b^2 - 4ac = 0$: el cono tangente es una recta doble. Este tipo de punto singular es llamado una "cúspide".

(5.18) Sea $F = F(x,y)$ un polinomio de grado $\leq d$ en dos variables x, y, con coeficientes en el cuerpo K. La hipersuperficie $\mathcal{C}(F) \subset K^2$ se llama también "curva algebraica afín" definida por F. Se aplican en este caso las consideraciones anteriores referentes a hipersuperficies en K^n. Una particularidad del caso $n = 2$ es que el cono tangente es una unión de rectas, como se deduce de la siguiente

(5.19) **Proposición:** Sea $F = F(x,y) \in K[x,y]$ un polinomio homogéneo de grado r con coeficientes en un cuerpo K algebraicamente cerrado. Entonces F se factoriza como producto de formas lineales

$$F = \prod_i L_i^{r_i}$$

donde $L_i(x, y) = a_i x + b_i y$, $r_i \in \mathbb{N}$, $\sum_i r_i = r$.

Demostración: nuestro polinomio se escribe $F(x, y) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i x^i y^{r-i}$. Si y^s es la maxima potencia de y que divide a F, podemos escribir $F = y^s \sum_{i=0}^{r-s} \alpha_i x^i y^{r-s-i}$, con $\alpha_{r-s} \neq 0$. Consideramos el polinomio en una variable $f(x) = F(x, 1) = \sum_{i=0}^{r-s} \alpha_i x^i$. Como K es algebraicamente cerrado, existe una factorización $f(x) = \alpha_{r-s} \prod_{i=0}^{r-s} (x + b_i)^{r_i}$. Sigue facilmente que $F(x, y) = \alpha_{r-s} y^s \prod_{i=0}^{r-s} (x + b_i y)^{r_i}$, como queríamos demostrar.

(5.20) **Definición:** Sea $p \in K^2$ un punto singular de F. Decimos que p es punto singular ordinario si la forma inicial de F en p es producto de factores lineales distintos (i.e. con la notación de (5.19), $r_i = 1$ para todo i). Se considera que este tipo de punto singular es particularmente sencillo. El lector puede constatar experimentalmente en ejemplos que el dibujo de $\mathcal{C}(F)$ cerca de un punto singular p ordinario de multiplicidad r es aproximadamente la unión de r rectas distintas por p. Con más precisión, lo afirmado resulta de la siguiente

(5.21) **Proposición:** Sea $F = F(x, y) \in K[x, y]$ un polinomio de grado d con coeficientes en un cuerpo K. Sea F_r la forma inicial de F (en el origen, por simplicidad) y supongamos que $F_r = gh$ donde $g, h \in K[x, y]$ son polinomios homogéneos, de grados s y $r - s$ respectivamente, sin factores comunes. Entonces existen $G, H \in K[[x, y]]$ (anillo de series formales) tales que g (resp. h) es la forma inicial de G (resp. H) y $F = G.H$ en $K[[x, y]]$.

Demostración: buscamos $G = \sum_{j \geq s} G_j$ y $H = \sum_{j \geq r-s} H_j$ tales que $F = G.H$, o sea, $F_j = \sum_{k=s}^{j-r+s} G_k.H_{j-k}$ para todo $j \geq r$. La hipótesis sobre g, h permite resolver recursivamente este sistema infinito de ecuaciones, para $j = r, r + 1, \ldots$. Dejamos los detalles al lector.

(5.22) **Comentario:** Existe una versión más general y algebraica denominada Lema de Hensel. También, se puede demostrar que si $K = \mathbb{C}$ entonces las series G y H tienen radio de convergencia positivo.

(5.23) **Observación:** El anillo de series formales $K[[x,y]]$ es un dominio de factorización única (ver [ZS]). Un $F \in K[x,y]$ irreducible puede ser reducible cuando es pensado como elemento de $K[[x,y]]$. En su factorización $F = \prod_i G_i$, las series formales irreducibles G_i que aparecen se denominan "ramas de F en 0". Segun (5.21), si 0 es punto singular ordinario de F de multiplicidad r entonces las ramas de F tienen forma inicial de grado uno (se dice entonces que son ramas lineales). El proceso algebraico de pasar de $F \in K[x,y]$ a $F \in K[[x,y]]$ corresponde geometricamente a concentrar la atencion en un entorno arbitrariamente chico de $0 \in \mathcal{C}(F)$ (localizacion).

A continuación damos un tratamiento resumido, siguiendo [F], de la multiplicidad de intersección de dos curvas en un punto. Para una presentación diferente ver [W].

(5.24) **Definición:** (multiplicidad de intersección) Sean $F, G \in K[x,y]$. Definimos la multiplicidad de intersección $(F,G;0) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de F y G en el punto $0 = (0,0)$ como

$$(F,G;0) = \dim_K K[[x,y]]/(F,G)$$

donde (F,G) denota el ideal generado por F,G en el anillo $K[[x,y]]$. Si $p = (a,b) \in K^2$, definimos $(F,G;p) = (F',G';0)$ donde $F'(x,y) = F(x+a,y+b)$, $G'(x,y) = G(x+a,y+b)$.

(5.25) Para motivar la definición dada, consideramos el caso particular en que una de las dos curvas es no singular en el punto en cuestión. Supongamos que K es el cuerpo de los reales o los complejos y que $0 \in \mathcal{C}(F)$ es punto no singular. Sea $(x(t), y(t))$ una parametrizacion analítica de un entorno de $0 \in \mathcal{C}(F)$ (teorema de la función implícita). Tenemos entonces un isomorfismo de anillos

$$\varphi : K[[x,y]]/(F) \to K[[t]]$$

tal que $\varphi(x) = x(t),\ \varphi(y) = y(t)$. Pasando al cociente por (G) obtenemos

$$(F,G;0) = \dim_K K[[x,y]]/(F,G) = \dim_K K[[t]]/(\varphi(G)) = \text{ord } G(x(t),y(t))$$

donde para una serie formal $g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i t^i \in K[[t]]$ denotamos $\text{ord}(g) = r$ si t^r es la mayor potencia de t que divide g. Por lo tanto, (5.24) generaliza al caso singular la definición de orden de contacto

$$(F,G;0) = \text{ord } G(x(t),y(t))$$

habitual en Geometría Diferencial. Este caso particular de la definición es útil y de uso frecuente en la practica (ver (7.5)). Veamos un ejemplo sencillo:

(5.26) **Ejemplo:** Sea G no singular en el punto p. Sea F la ecuación de una recta por p. Entonces $(F, G; p) \geq 2$ si F es la ecuación de la recta tangente de G en p; $(F, G; p) = 1$ en caso contrario. Sugerimos verificarlo utilizando una parametrización de F.

Las propiedades básicas de la multiplicidad de intersección se resumen en el siguiente

(5.27) **Teorema:** La multiplicidad de intersección definida en (5.24) goza de las siguientes propiedades.
a) $(F, G; p) = \infty$ si y solo si F y G tienen un factor comun H tal que $H(p) = 0$.
b) $(F, G; p) = 0$ si y solo si $p \notin \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G)$
c) (Invariancia afín) Si $\alpha : K^2 \to K^2$ es una transformación afín entonces

$$(F \circ \alpha, G \circ \alpha; \alpha^{-1}(p)) = (F, G; p)$$

d) $(G, F; p) = (F, G; p)$
e) (Aditividad) $(F, G_1.G_2; p) = (F, G_1; p) + (F, G_2; p)$
f) $(F, G; p) = (F, G + A.F; p)$ para todo $A \in K[x, y]$.
g) Si la multiplicidad (ver (5.8)) de F y G en p es r y s respectivamente entonces

$$(F, G; p) \geq rs$$

Vale la igualdad si y solo si las formas iniciales F_r y G_s no tienen factores comunes (o sea, los conos tangentes son disjuntos). En particular, $(F, G; p) = 1$ si y solo si F y G son no singulares en p y sus tangentes en p son distintas (situación que se denomina "intersección transversal").

Demostración:

Las propiedades c), d), f) son consecuencia inmediata de la definición (5.24). Para las otras, referimos a [F], pags. 51-55.

Concluyendo este parágrafo, definimos las rectas asintóticas de una curva afín plana. Además de su interés intrínseco, este concepto nos sirve como puente entre las curvas afines y las curvas proyectivas, que seran tratadas en parágrafos posteriores.

(5.24) **Rectas asintóticas.** Sea $F \in K[x,y]$ un polinomio de grado d. Sea $x = a+ut, y = b+vt$ una recta en K^2, parametrizada por $t \in K$, con punto inicial $(a,b) \in K^2$ y vector dirección $(u,v) \in K^2 - \{(0,0)\}$. Nos proponemos evaluar los coeficientes (dominantes en el infinito) de grados d y $d-1$ del polinomio en una variable $F(a+ut, b+vt) \in K[t]$. Sea $F = \sum_{k=0}^{d} F_k$ la descomposición como suma de polinomios homogéneos. Utilizando la formula de Taylor,

$$
\begin{aligned}
F(a+ut, b+vt) &= \sum_{i+j\leq d} \frac{1}{i!j!}((\frac{\partial}{\partial x})^i(\frac{\partial}{\partial y})^j F)(ut, vt)a^i b^j \\
&= \sum_{k=0}^{d} \sum_{i+j\leq d} \frac{1}{i!j!}((\frac{\partial}{\partial x})^i(\frac{\partial}{\partial y})^j F_k)(ut, vt)a^i b^j \\
&= \sum_{k=0}^{d} \sum_{i+j\leq d} \frac{1}{i!j!}((\frac{\partial}{\partial x})^i(\frac{\partial}{\partial y})^j F_k)(u, v)t^{i+j-k} a^i b^j \\
&= \sum_{r=0}^{d} \sum_{k\leq r} t^{r-k} \sum_{i+j=r} \frac{1}{i!j!}((\frac{\partial}{\partial x})^i(\frac{\partial}{\partial y})^j F_k)(u, v)a^i b^j
\end{aligned}
$$

Definición: La recta $x = a+ut, y = b+vt$ es asintótica para F si los coeficientes de t^d y de t^{d-1} en $F(a+ut, b+vt)$ son nulos. Vale decir,

$$
\begin{aligned}
&F_d(u,v) = 0 \\
&\frac{\partial F_d}{\partial x}(u,v)a + \frac{\partial F_d}{\partial y}(u,v)b + F_{d-1}(u,v) = 0
\end{aligned}
$$

Notar que la primera ecuación define d direcciones asintóticas (u,v) (contadas con multiplicidad). Fijada una de ellas, de la segunda ecuación se despeja un punto (a,b) de la asíntota. O también, se puede interpretar que la segunda ecuación es la ecuación de la asíntota (con (u,v) fijo, (a,b) variable). Vemos que una curva de grado d tiene, en general, d rectas asintóticas. Más tarde interpretaremos estas rectas como las "tangentes en el infinito".

§6. **Espacios proyectivos**

Sea K un cuerpo y sea $K^* = K - \{0\}$ su grupo de elementos inversibles. Si V es un K-espacio vectorial, definimos una relación de equivalencia $\sim$ en $V - \{0\}$ mediante

$$x \sim y \text{ si y solo si existe } \lambda \in K^* \text{ tal que } y = \lambda x$$

Esta es la relación de equivalencia deducida de la acción natural de K^* en $V - \{0\}$ (ver §4). Equivalentemente, $x \sim y$ sii $K.x = K.y$, o sea, x e y generan el mismo subespacio vectorial de dimensión uno.

(6.1) **Definición:** El espacio proyectivo asociado al espacio vectorial V es el conjunto cociente

$$\mathbb{P}(V) = V - \{0\}/\sim$$

Dado que se trata del cociente por una acción del grupo K^*, también podemos escribir $\mathbb{P}(V) = V - \{0\}/K^*$.

(6.2) **Definición:** Fijemos $n \in \mathbb{N}$. El espacio proyectivo standard de dimensión n sobre K es

$$\mathbb{P}^n(K) = \mathbb{P}(K^{n+1}) = K^{n+1} - \{0\}/K^*$$

obtenido a partir del K-espacio vectorial standard K^{n+1} de dimensión $n+1$. Es habitual y mayormente suficiente trabajar con $\mathbb{P}^n(K)$. Sin embargo, daremos las primeras definiciones y proposiciones utilizando $\mathbb{P}(V)$, lo cual, al ser más intrínseco, ofrece ventajas tecnicas y conceptuales.

(6.3) **Observación:** Un elemento de $\mathbb{P}(V)$ es una clase de equivalencia bajo $\sim$, vale decir, un subespacio vectorial $L \subset V$ de dimensión uno. De esta manera, el conjunto cociente $\mathbb{P}(V)$ se identifica con el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión uno en V. La proyección al cociente

$$\pi : V - \{0\} \to \mathbb{P}(V)$$

asigna $\pi(x) = K.x$. En el caso del espacio proyectivo standard $\mathbb{P}^n(K)$ es habitual utilizar la notación siguiente: para $x = (x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} - \{0\}$,

$$\pi(x) = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$$

Con esta notación, resulta de las definiciones que

$$(\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n) = (x_0 : \cdots : x_n)$$

para todo $\lambda \in K^*$. Se dice que $(x_0 : \cdots : x_n)$ son coordenadas homogéneas del punto $\pi(x) \in \mathbb{P}^n(K)$.

(6.4) **Observación:** Tenemos una correspondencia biyectiva entre subconjuntos de $\mathbb{P}(V)$ y subconjuntos de $V - \{0\}$ saturados por $\sim$ (vale decir, subconjuntos K^*-estables). Un tal conjunto sera llamado un "cono". Dicha correspondencia es: a $X \subset V - \{0\}$ se le asigna $\pi(X) \subset \mathbb{P}(V)$; al reves, a $Y \subset \mathbb{P}(V)$ le asignamos $\pi^{-1}(Y) \subset V - \{0\}$, que llamamos "cono sobre Y". Notemos también que dar un cono no vacio $X \subset V - \{0\}$ es lo mismo que dar un cono $X' \subset V$ distinto del cono trivial $\{0\}$, via $X' = X \cup \{0\}$ y $X = X' - \{0\}$.

(6.5) **Observación:** De la misma manera, dar una función $f : \mathbb{P}(V) \to A$ con valores en un conjunto A, es equivalente a dar una función $g : V - \{0\} \to A$ tal que $g(kx) = g(x)$ para todo $x \in V - \{0\}$ y para todo $k \in K^*$. Precisamente, f y g se relacionan mediante $g = f \circ \pi$.

(6.6) **Definición:** Diremos que un subconjunto $Y \subset \mathbb{P}(V)$ es un *subespacio lineal* si existe un subespacio vectorial $S \subset V$ tal que $Y = \pi(S - \{0\})$ (observemos que en este caso $S - \{0\} = \pi^{-1}(Y)$ ya que S es un cono). Diremos que Y tiene *dimensión* d si S tiene dimensión $d + 1$. En particular, diremos que $\mathbb{P}(V)$ es un espacio proyectivo de dimensión n si $\dim_K(V) = n + 1$.

En el caso de $\mathbb{P}^n(K)$, si el subespacio vectorial $S \subset K^{n+1}$ viene dado como conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$S = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} / A.x = 0\}$$

donde A es una matriz con coeficientes en K, entonces $Y = \pi(S - \{0\})$ viene descripto por el mismo sistema de ecuaciones

$$Y = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K) / A.x = 0\}$$

(6.7) **Observación:** Si $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{P}(V)$ son subespacios lineales, con conos $S_1, S_2 \subset V$ entonces $Y_1 \cap Y_2 = \pi(S_1 \cap S_2 - \{0\})$ también es un subespacio lineal, con cono $S_1 \cap S_2$.

(6.8) **Definición:** Con la notación de (6.6), el subespacio lineal de $\mathbb{P}(V)$ generado por Y_1, Y_2 se define como $Y_1 + Y_2 = \pi(S_1 + S_2 - \{0\})$, con cono el subespacio vectorial $S_1 + S_2 \subset V$.

(6.9) **Proposición:** Supongamos que $\mathbb{P}(V)$ tiene dimensión n. Sean $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{P}(V)$ subespacios lineales de dimensiónes respectivas d_1, d_2. Entonces $Y_1 \cap Y_2 \subset \mathbb{P}(V)$ es un espacio lineal de dimensión $d \geq d_1 + d_2 - n$. En particular, $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ si $d_1 + d_2 \geq n$. (Si $Y_1 \cap Y_2$ tiene dimensión $d = d_1 + d_2 - n$ entonces se dice que Y_1, Y_2 son transversales).

Demostración: Sea S_i el cono sobre Y_i, de manera que $S_i \subset V$ es un subespacio vectorial de dimensión $d_i + 1$. Por algebra lineal elemental,

$$\begin{aligned}
\dim(S_1 \cap S_2) &= \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 + S_2) \\
&\geq \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(V) \\
&= (d_1 + 1) + (d_2 + 1) - (n + 1) = (d_1 + d_2 - n) + 1
\end{aligned}$$

Notar que si $d_1 + d_2 - n \geq 0$ entonces $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$, con lo cual $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, como se afirmaba.

(6.10) **Observación:** La Proposición anterior, aplicada al caso $n = 2, d_1 = d_2 = 1$, dice que dos subespacios de dimensión uno (que llamamos "rectas") en un espacio proyectivo de dimensión dos ("plano proyectivo"), se intersecan. En el plano afín K^2 dos rectas pueden cortarse o ser paralelas, mientras que en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(K)$ la situación es, en este sentido, más sencilla: dos rectas se cortan.

(6.11) Consideremos aplicaciones lineales entre espacios proyectivos. Sean U, V espacios vectoriales sobre K y sea $f : U \to V$ una aplicación lineal. Entonces, por restriccion, f induce una aplicación $f| : U - \ker(f) \to V - \{0\}$, la cual pasa al cociente como

$$\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(U) - Y \to \mathbb{P}(V)$$

donde $Y = \pi(\ker(f) - \{0\})$ es el subespacio lineal de $\mathbb{P}(U)$ con cono $\ker(f) \subset U$. Notar entonces que la aplicación $\mathbb{P}(f)$ no esta definida en todo $\mathbb{P}(U)$, a menos que f sea inyectiva. Algunas situaciones particulares de interés son las siguientes:

a) Si f es bijectiva entonces $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(V)$ es biyectiva, con inversa $\mathbb{P}(f^{-1})$; decimos entonces que $\mathbb{P}(f)$ es un isomorfismo proyectivo. El grupo $\mathrm{PGL}(V)$ de todos los isomorfismos proyectivos $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ se denomina *grupo proyectivo* de V. Se verifica facilmente que la aplicación $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{PGL}(V)$ que envia $f \mapsto \mathbb{P}(f)$ es un homomorfismo de grupos sobreyectivo con núcleo el conjunto $K^*.\mathrm{id}_V$ de todas las homotecias no nulas, de manera que tenemos un isomorfismo $\mathrm{GL}(V)/K^* \cong \mathrm{PGL}(V)$.
b) Si $f : U \to V$ es inyectiva entonces $\mathbb{P}(f)$ induce un isomorfismo de espacios proyectivos

$$\mathbb{P}(U) \cong \mathbb{P}(\mathrm{im}(f))$$

En particular, un subespacio lineal de un espacio proyectivo es un espacio proyectivo.
c) Proyecciones. Sea $S \subset U$ un subespacio vectorial. Sea $p : U \to U/S$ la aplicación cociente, de manera que $\ker(p) = S$. Si $Y = \pi(S - \{0\})$, la aplicación

$$\mathbb{P}(p) : \mathbb{P}(U) - Y \to \mathbb{P}(U/S)$$

se denomina "proyección con centro Y". Sugerimos al lector tener en mente el caso en que Y es un punto (espacio lineal de dimensión cero). Si elegimos un subespacio complementario $T \subset U$ de S (de manera que $U = S \oplus T$) la proyección al cociente induce un isomorfismo $p|_T : T \cong U/S$ y la proyección con centro Y se identifica via este isomorfismo con la aplicación

$$\mathbb{P}(\pi_2) : \mathbb{P}(U) - Y \to \mathbb{P}(T)$$

donde $\pi_2 : U \to T$ es la proyección en el segundo sumando directo.
Geométricamente, considerando $\mathbb{P}(T) \subset \mathbb{P}(U)$, se verifica que la proyección con centro Y asigna a un punto $x \in \mathbb{P}(U) - Y$ el punto $(x + Y) \cap \mathbb{P}(T)$ (se sugiere verlo en el caso de la proyección desde un punto de $\mathbb{P}^2(K)$).

(6.12) Cubrimiento afín del espacio proyectivo. En el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(K)$ consideramos para cada $j = 0, 1, \ldots, n$ el subconjunto

$$U_j = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)/x_j \neq 0\}$$

(notar que la validez de la condicion $x_j \neq 0$ es independiente del representante $(x_0, \ldots, x_n)$ de la clase $(x_0 : \cdots : x_n)$). También, $U_j = \mathbb{P}^n(K) - H_j$ donde H_j es el subespacio lineal definido por la ecuación $x_j = 0$. Es claro que

$$\mathbb{P}^n(K) = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

Observemos que un punto tipico de U_0 se escribe

$$(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) = (1 : x_1/x_0 : \cdots : x_n/x_0) = (1 : y_1 : \cdots : y_n)$$

y esta univocamente determinado por $(y_1, \ldots, y_n) \in K^n$. Más precisamente,

(6.13) **Proposición:** Para cada $j = 0, 1, \ldots, n$, las aplicaciones

$$\varphi_j : K^n \to U_j, \qquad \psi_j : U_j \to K^n$$

definidas por

$$\varphi_j(y_1, \ldots, y_n) = (y_1 : \cdots : y_{j-1} : 1 : y_j : \cdots : y_n), \qquad \psi_j(x_0 : \cdots : x_n) = (x_i/x_j)_{0 \leq i \leq n,\ i \neq j}$$

son biyecciones recíprocas.

Demostración: Dejamos esta verificación a cargo del lector.

(6.14) Se puede interpretar (6.12) y (6.13) como que el espacio proyectivo se obtiene "pegando" copias de espacios afines. Mediante las "coordenadas afines" φ_j, las cuestiones de caracter local en el espacio proyectivo se reducen a cuestiones en espacios afines. Vamos a ver ejemplos de esto en el proximo parágrafo.

(6.15) El resultado de (6.13) se puede formular más intrinsecamente. Sea V un K-espacio vectorial y sea $\alpha : V \to K$ una forma lineal. En (6.13), α es una de las formas coordenadas x_j. Sea $\pi : V - \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ la proyección al cociente y $U_\alpha = \pi\{x \in V : \alpha(x) \neq 0\}$. En primer lugar, $\pi : \{x \in V : \alpha(x) = 1\} \to U_\alpha$ es biyectiva, ya que $\pi(x) = \pi(x/\alpha(x))$ si $\alpha(x) \neq 0$. Por otro lado, elijamos un $v \in V$ tal que $\alpha(v) = 1$. Entonces la traslación por v induce una biyección $\ker(\alpha) \to \{x \in V : \alpha(x) = 1\}$. Componiendo, obtenemos una biyección $\varphi_\alpha : \ker(\alpha) \to U_\alpha$. En resumen, el complemento de un hiperplano en un espacio proyectivo "es" un espacio afín.

(6.16) Tenemos también una unión disjunta

$$\mathbb{P}^n(K) = U_0 \sqcup H_0 \cong K^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(K)$$

donde $H_0 = \pi(x_0 = 0) \cong \mathbb{P}^{n-1}(K)$ ("hiperplano del infinito" respecto de x_0) y $U_0 \cong K^n$ ("parte finita" de $\mathbb{P}^n(K)$ respecto de x_0). Pensado en K^{n+1}

(visualizarlo para $n = 2$), los subespacios vectoriales de dimensión uno se dividen en dos clases: los contenidos en el hiperplano $x_0 = 0$ y los otros, que estan en biyección con los puntos del hiperplano $x_0 = 1$.

Iterando, obtenemos una unión disjunta

$$\mathbb{P}^n(K) = K^n \sqcup K^{n-1} \sqcup \dots K^1 \sqcup K^0$$

Como una aplicación de esta descomposicion, supongamos que K es un cuerpo finito con q elementos. Entonces el número de elementos de $\mathbb{P}^n(K)$ es

$$|\mathbb{P}^n(K)| = q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$$

Otra manera de obtener el mismo resultado: como $\mathbb{P}^n(K) = K^{n+1} - \{0\}/K^*$ resulta $|\mathbb{P}^n(K)| = (q^{n+1} - 1)/(q - 1)$.

En esta sección nos hemos limitado a dar algunas definiciones relacionadas con el espacio proyectivo que necesitamos en secciones posteriores. Para un tratamiento de la Geometría Proyectiva Sintética, referimos a [S1], [Ha2]. Para la relación entre Geometría Proyectiva y Geometrías no-Euclideanas el lector puede consultar el fascículo [S2].

§7. **Hipersuperficies en espacios proyectivos**

(7.1) Generalidades

(7.1.1) Mantenemos la notación del §5. En particular, $K(n,d)$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq d$ en n variables, que usualmente seran denotadas $x_1,\dots,x_n$. Denotaremos $K[n,d]$ el espacio vectorial de los polinomios homogéneos de grado d en $n+1$ variables $x_0,x_1,\dots,x_n$. Sugerimos tener en mente los casos $n=1$ y $n=2$.

(7.1.2) **Definición:** Si $F \in K[n,d]-\{0\}$, la hipersuperficie proyectiva definida por F es

$$\mathcal{V}(F)=\{(x_0:\cdots:x_n)\in\mathbb{P}^n(K):\ F(x_0,\dots,x_n)=0\}$$

(7.1.3) **Observaciones:**
a) La definición es correcta: la validez de la condicion $F(x_0,\dots,x_n)=0$ no depende del representante $(x_0,\dots,x_n)$ de la clase de equivalencia $(x_0:\cdots:x_n)$ debido a que F es homogéneo.
b) El cono sobre $\mathcal{V}(F)$ (ver (6.4)) es $\mathcal{C}(F)\subset K^{n+1}$, considerando $F\in K(n+1,d)$.

(7.1.4) **Homogeneización y deshomogeneización.**

Sea $f=\sum_{j=0}^{d} f_j \in K(n,d)$. Definimos $f^*\in K[n,d]$ como

$$f^*(x_0,x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=0}^{d} f_j(x_1,\dots,x_n)x_0^{d-j}$$

El polinomio homogéneo f^* se llama el homogeneizado de f (con respecto a la variable x_0). Notar que f^* es divisible por x_0 si y solo si $f\in K(n,d)$ tiene grado $<d$.

En la otra dirección, sea $F\in K[n,d]$. Definimos $F_*\in K(n,d)$ como

$$F_*(x_1,\dots,x_n)=F(1,x_1,\dots,x_n)$$

(7.1.5) **Proposición:** $(\ )^*: K(n,d)\to K[n,d]$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Su inversa es $(\ )_*$.

Demostración: Ambas aplicaciones son claramente K-lineales. La verificación de que son inversas recíprocas es inmediata.

(7.1.6) **Afinización-Deshomogeneización.**
Sea $F \in K[n,d] - \{0\}$ y sea $\mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^n(K)$ la hipersuperficie proyectiva definida por F. Consideremos la descomposicion $\mathbb{P}^n(K) = U_0 \sqcup H_0 \cong K^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(K)$ de (6.16). Nos interesa entender la intersección de $\mathcal{V}(F)$ con la "parte finita" U_0. Consideremos $\varphi_0 : K^n \to U_0$ como en (6.13). Resulta inmediatamente de las definiciones que

$$\varphi_0^{-1}(\mathcal{V}(F)) = \mathcal{C}(F_*)$$

De la misma manera, la hipersuperficie proyectiva $\mathcal{V}(F)$ interseca cada parte afín $U_j \subset \mathbb{P}^n(K)$ en la hipersuperficie afín definida por la deshomogeneización de F respecto de la variable x_j.

(7.1.7) **Clausura proyectiva-Homogeneización.**
Al reves, dada una hipersuperficie afín $\mathcal{C}(f) \subset K^n$, le podemos agregar "puntos en el infinito" para obtener una hipersuperficie proyectiva $\mathcal{V}(f^*) \subset \mathbb{P}^n(K)$. Más precisamente, sea $f = \sum_{j=0}^{d} f_j \in K(n,d)$ de grado d (o sea, suponemos $f_d \neq 0$). Consideremos nuevamente

$$\varphi_0 : K^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n(K)$$

con $\operatorname{im}(\varphi_0) = U_0$. Como $(f^*)_* = f$, sigue de (7.1.6) que la hipersuperficie proyectiva $\mathcal{V}(f^*) \subset \mathbb{P}^n(K)$ satisface $\varphi_0^{-1}(\mathcal{V}(f^*)) = \mathcal{C}(f)$. A veces se escribe $\mathcal{V}(f^*) \cap K^n = \mathcal{C}(f)$, identificando K^n con U_0 via φ_0. Para entender el complemento $\mathcal{V}(f^*) - \varphi_0(\mathcal{C}(f))$, sea $H_0 = (x_0 = 0) = \mathbb{P}^n(K) - U_0 \cong \mathbb{P}^{n-1}(K)$ el hiperplano del infinito. Resulta inmediatamente de las definiciones que

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(f^*) - \varphi_0(\mathcal{C}(f)) &= \mathcal{V}(f^*) \cap H_0 \\ &= \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K) /\ x_0 = 0,\ f_d(x_1, \ldots, x_n) = 0\}\end{aligned}$$

Mediante la biyección $H_0 \to \mathbb{P}^{n-1}(K)$ tal que $(0 : x_1 : \cdots : x_n) \mapsto (x_1 : \cdots : x_n)$ el ultimo conjunto corresponde con $\mathcal{V}(f_d) \subset \mathbb{P}^{n-1}(K)$. Utilizando las identificaciones mencionadas, podemos escribir

$$\mathcal{V}(f^*) = \mathcal{C}(f) \sqcup \mathcal{V}(f_d)$$

Vale decir, los puntos agregados a $\mathcal{C}(f)$ para obtener la clausura proyectiva $\mathcal{V}(f^*)$ son los ceros de la forma de mayor grado f_d. En el caso $n = 2$ esto significa que la clausura proyectiva de una curva afín $\mathcal{C}(f) \subset K^2$ se obtiene agregando el conjunto finito $\mathcal{V}(f_d)$ de sus direcciones asintóticas (ver (5.24)).

(7.1.8) **Definición: (espacio tangente proyectivo)** Sea $F \in K[n, d] - \{0\}$ y sea $p = (p_0 : \cdots : p_n) \in \mathcal{V}(F)$. El espacio tangente de F en p es el subespacio lineal de $\mathbb{P}^n(K)$ definido por

$$PT_F(p) = \{y = (y_0 : \cdots : y_n) \in \mathbb{P}^n(K) : \sum_{i=0}^{n} F_i(p) y_i = 0\}$$

donde, como antes, utilizamos la notación $\frac{\partial F}{\partial x_i} = F_i$. Con la notación de (5.6), $PT_F(p)$ tiene como cono tangente el núcleo de la funcional lineal $dF(p)$, pensando $F \in K(n + 1, d)$.

(7.1.9) **Definición:** El punto $p \in \mathcal{V}(F)$ es singular si $F_i(p) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ (equivalentemente, $PT_F(p) = \mathbb{P}^n(K)$)

La siguiente Proposición es de uso frecuente en esta teoría.

(7.1.10) **Proposición: (relación de Euler)** Si $F \in K[n, d]$ entonces

$$\sum_{i=0}^{n} F_i(x) x_i = dF(x)$$

Demostración: Como ambos miembros son lineales en F, basta verificar la igualdad en el caso en que F es un monomio, lo cual es inmediato.

(7.1.11) **Corolario:**
a) con la notación de (7.1.8), resulta que el espacio lineal $PT_F(p)$ contiene el punto p.
b) en la definición (7.1.9) de punto singular, la condicion $F_i(p) = 0$ para todo i implica $F(p) = 0$.

Las nociones de espacio tangente proyectivo y punto singular se comportan bien en relación a los procesos de homogeneización y deshomogeneización:

(7.1.12) **Proposición:** Sea $f \in K(n, d)$ y $p \in \mathcal{C}(f) \subset K^n$. Entonces la clausura proyectiva del espacio tangente de $\mathcal{C}(f)$ en p es el espacio tangente de la clausura proyectiva. Vale decir, $\varphi_0^{-1}(PT_{f^*}(\varphi_0(p))) = T_f(p)$. En particular, p es punto singular de f si y solo si $\varphi_0(p)$ es punto singular de f^*.

Demostración: Resulta de que $\frac{\partial(f^*)}{\partial x_i} = (\frac{\partial f}{\partial x_i})^*$ para $i > 0$. Dejamos los detalles como ejercicio para el lector.

(7.1.13) **Acción del grupo proyectivo en el espacio de polinomios homogéneos.**
Para $F \in K[n,d]$ y $\tau \in \mathrm{GL}(n+1,K)$ definimos

$$\tau.F(x) = F(\tau(x))$$

Notar que la definición tiene sentido ya que si F es homogéneo de grado d entonces $F(\tau(x))$ también es homogéneo de grado d. Obtenemos asi una acción a izquierda de $\mathrm{GL}(n+1,K)$ en $K[n,d]$.

(7.1.14) Si $\tau = \lambda.\mathrm{id}$ es una homotecia no nula entonces, para todo $F \in K[n,d]$ resulta $\tau.F = \lambda^d F$. Por lo tanto, el grupo proyectivo $\mathrm{PGL}(n+1,K)$, definido como $\mathrm{GL}(n+1,K)/K^*$, actúa en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(K[n,d]) = K[n,d] - \{0\}/K^*$. A este ultimo espacio proyectivo lo denominamos "el espacio de las hipersuperficies de grado d en $\mathbb{P}^n(K)$".

(7.1.15) Como en el §4, interesa estudiar estas acciones (posibles formas canónicas, invariantes, etc.) y su relación con propiedades geometricas de hipersuperficies proyectivas $\mathcal{V}(F)$ para $F \in K[n,d]$. En lo que sigue, nos vamos a concentrar en los siguientes casos particulares:
a) $d = 2$: cuádricas en $\mathbb{P}^n(K)$
b) $n = 1$: conjuntos de d puntos en la recta proyectiva, con especial enfasis en el primer caso no trivial $d = 4$.
c) $n = 2$: curvas de grado d en $\mathbb{P}^2(K)$. El primer caso no cubierto en a) es el de las cúbicas $d = 3$. Su clasificación se relaciona con la clasificación de cuatro puntos en $\mathbb{P}^1(K)$, como vamos a ver.

(7.1.16) **Grupo afín y grupo proyectivo.**
Recordemos (5.4) que el grupo afín $A(n,K)$ actúa a izquierda en $K(n,d)$ mediante $\alpha.F(x) = F(\alpha(x))$, donde $\alpha = \alpha_{\sigma,t} : K^n \to K^n$ es la aplicación $\alpha(x) = \sigma.x + t$ con $\sigma \in \mathrm{GL}(n,K)$ y $t \in K^n$.

El grupo afín $A(n,K)$ se puede considerar como subgrupo de $\mathrm{GL}(n+1,K)$ via el homomorfismo inyectivo $A(n,K) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n+1,K)$ tal que $\alpha_{\sigma,t} \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & \sigma \end{smallmatrix}\right)$. Componiendo con la proyección al cociente por K^* tenemos un homomorfismo, también inyectivo

$$A(n,K) \hookrightarrow \mathrm{PGL}(n+1,K)$$

Es fácil verificar que la imagen consiste de las transformaciones proyectivas que preservan el "hiperplano del infinito" $H_0 = (x_0 = 0) \subset \mathbb{P}^n(K)$. En otras palabras, un elemento tipico $\tau \in \mathrm{PGL}(n+1,K)$ esta representado por una matriz $(\tau_{ij}) \in \mathrm{GL}(n,K)$ e induce una transformación proyectiva $\tau : \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^n(K)$ tal que

$$\tau(x) = (\tau_0(x) : \cdots : \tau_n(x))$$

donde $\tau_i(x) = \tau_i(x_0 : \cdots : x_n) = \sum_{j=0}^n \tau_{ij} x_j$. Los elementos del subgrupo afín son aquellos con $\tau_0(x) = \tau_{00} x_0$.

Las transformaciones proyectivas $\tau : \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^n(K)$ se pueden interpretar también como "transformaciones homograficas" $K^n \to K^n$. En efecto, consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n(K) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{P}^n(K) \\ {\scriptstyle \varphi_0}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_0} \\ K^n & & K^n \end{array}$$

En general, $\tau\varphi_0(K^n) \not\subset \varphi_0(K^n)$, pero τ induce una aplicación $\tau' = {\varphi_0}^{-1}\tau\varphi_0$ definida en un cierto subconjunto de K^n. Un cálculo inmediato nos da la siguiente formula para τ'

$$\tau'(x_1,\dots,x_n) = (\frac{\tau_1(1,x_1,\dots,x_n)}{\tau_0(1,x_1,\dots,x_n)}, \dots, \frac{\tau_n(1,x_1,\dots,x_n)}{\tau_0(1,x_1,\dots,x_n)})$$

El dominio de τ' consiste de los puntos $(x_1,\dots,x_n) \in K^n$ tales que $\tau_0(1,x_1,\dots,x_n) \neq 0$; los puntos con $\tau_0(1,x_1,\dots,x_n) = 0$ son aplicados (via τ) al hiperplano del infinito. Por ejemplo, para $n=1$, la expresión $\tau'(x) = \frac{c+dx}{a+bx}$ define una transformación homografica $K \to K$, no definida en $x = -a/b$. Tenemos una extensión como transformación proyectiva τ :

$\mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^1(K)$ dada por $\tau(x_0 : x_1) = (ax_0 + bx_1 : cx_0 + bx_1)$.

(7.1.17) Interpretemos también en estos términos la acción de $\mathrm{GL}(n+1, K)$ en $K[n, d]$.
Sea $\tau \in \mathrm{GL}(n+1, K)$ y sea $F \in K[n, d]$. Escribiendo como en (7.1.16) $\tau_i(x) = \sum_{j=0}^{n} \tau_{ij} x_j$, la acción (7.1.13) es

$$\tau.F(x) = F(\tau_0(x), \tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)) = \tau_0(x)^d F(1, \frac{\tau_1(x)}{\tau_0(x)}, \ldots, \frac{\tau_n(x)}{\tau_0(x)})$$

(la ultima es una igualdad de funciones racionales, que resultara útil enseguida). Volvamos al isomorfismo $(\ )^* : K(n, d) \to K[n, d]$ de (7.1.5). Como tenemos una acción de $\mathrm{GL}(n+1, K)$ en $K[n, d]$, mediante el isomorfismo $(\ )^*$ podemos extender la acción de $A(n, K)$ en $K(n, d)$ a una acción de $\mathrm{GL}(n+1, K)$. Concretamente, para $\tau \in \mathrm{GL}(n+1, K)$ y $f \in K(n, d)$ podemos definir $\tau.f \in K(n, d)$ como

$$\begin{aligned}\tau.f(x_1, \ldots, x_n) &= (\tau.f^*)_*(x_1, \ldots, x_n) = (\tau.f^*)(1, x_1, \ldots, x_n) \\ &= \tau_0(1, x_1, \ldots, x_n)^d f(\frac{\tau_1(1, x_1, \ldots, x_n)}{\tau_0(1, x_1, \ldots, x_n)}, \ldots, \frac{\tau_n(1, x_1, \ldots, x_n)}{\tau_0(1, x_1, \ldots, x_n)})\end{aligned}$$

Esta es la interpretación "afín" (no homogénea) de la acción, de aspecto más sencillo, en el espacio $K[n, d]$ de los polinomios homogéneos.

(7.2) Cuádricas

(7.2.1) **Proposición:** Sea $F \in K[n, 2]$ un polinomio homogéneo de grado dos en las variables $x_0, \ldots, x_n$, con coeficientes en el cuerpo K. Entonces existe $\tau \in \mathrm{GL}(n+1, K)$ tal que $G = \tau.F$ es de la forma $G(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} g_i x_i^2$ con $g_i \in K$.

Demostración: Completando cuadrados como en (2.7).

(7.2.2) En notación matricial,

$$F(x) = x^t a x$$

donde $x = (x_0, \ldots, x_n)$ y $a = (a_{ij}) \in K^{(n+1)\times(n+1)}$. La acción de $\mathrm{GL}(n+1, K)$ se representa matricialmente: si $\tau \in \mathrm{GL}(n+1, K)$ entonces $\tau.F(x) =$

$x^t(\tau^t a \tau)x$ o también, $\tau.a = \tau^t a \tau$. El rango de a es invariante bajo esta acción, de manera que en (7.2.1) el número de los i tales que $g_i \neq 0$ es un invariante.

(7.2.3) Permutando las variables si es necesario, escribamos $G(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^r g_i x_i^2$ con $g_i \in K^*$ para $i = 1, \ldots, r$. Si existen $t_i, \epsilon_i \in K^*$ tales que $g_i = t_i^2 \epsilon_i$ entonces G es equivalente a $H(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^r \epsilon_i x_i^2$ via la transformación $x_i \mapsto t_i^{-1} x_i$. Cuando $K = \mathbb{R}$ podemos tomar $\epsilon_i = \pm 1$ para todo i. Reordenando nuevamente las variables, obtenemos

(7.2.4) **Proposición:** (clasificación proyectiva de polinomios homogéneos cuadráticos reales) Todo $F \in \mathbb{R}[n, 2]$ es equivalente a uno y solo uno de los siguientes

$$A_{r,p}(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2$$

donde $0 \leq p \leq r \leq n, \quad r \leq 2p$

Demostración: Acabamos de ver la existencia. La unicidad de la signatura (r, p) fue tratada en §2.

(7.2.5) **Proposición:** (clasificación proyectiva de polinomios homogéneos cuadráticos complejos) Todo $F \in \mathbb{C}[n, 2]$ es equivalente a uno y solo uno de los siguientes

$$A_r(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{r} x_i^2$$

donde $0 \leq r \leq n$

Demostración: Sigue de (7.2.3).

(7.3) Puntos en la recta proyectiva

Consideramos ahora polinomios $F \in K[2, d]$ homogéneos de grado d en variables x_0, x_1. Un tal F es llamado "forma binaria" y el problema de su clasificación es clásico y no-trivial.

(7.3.1) Via el isomorfismo $(\ )^* : K(1, d) \to K[2, d]$ de (7.1.5), dar un $F \in$

$K[2,d]$ equivale a dar $f = F_* \in K(1,d)$. Si

$$F(x_0, x_1) = \sum_{i=0}^{d} a_i x_0^{d-i} x_1^i$$

entonces

$$f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$$

Conviene observar que en nuestra notación permitimos $a_d = 0$.

(7.3.2) Si $F \in K[2,d] - \{0\}$ la hipersuperficie $\mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^1(K)$ es un conjunto finito con $\leq d$ elementos. Estos elementos son los $(1 : x)$ donde x recorre el conjunto de raices de $f = F_*$ en K y posiblemente el punto del infinito $\infty = (0 : 1)$ (cuando $a_d = 0$). Otra manera de pensarlo: cuando K es algebraicamente cerrado, segun (5.19) tenemos una factorizacion $F = \prod_{i=1}^{N} L_i^{r_i}$ donde $L_i(x_0, x_1) = a_i x_0 + b_i x_1$, $r_i \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{N} r_i = r$. Entonces $\mathcal{V}(F) = \{p_1, \dots, p_N\}$ donde $p_i = (-b_i : a_i)$.

Supondremos en esta sección que K es algebraicamente cerrado.

(7.3.3) **Definición:** Un *divisor* en $\mathbb{P}^1(K)$ consiste de un subconjunto finito $\{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{P}^1(K)$ junto con la asignación de un número entero $r_i \in \mathbb{Z}$ a cada p_i. Un tal divisor se denota

$$\sum_{i=1}^{N} r_i p_i$$

Informalmente, un divisor en $\mathbb{P}^1(K)$ es una combinación lineal con coeficientes enteros de puntos de $\mathbb{P}^1(K)$. Equivalentemente, un divisor en $\mathbb{P}^1(K)$ es una función $D : \mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{Z}$ tal que $D(p) = 0$ salvo para un número finito de $p \in \mathbb{P}^1(K)$. Es costumbre denotar $D = \sum_{p \in \mathbb{P}^1(K)} D(p)p$. Dados dos divisores D y E, la suma $D + E$ es otro divisor definido por $(D + E)(p) = D(p) + E(p)$ para $p \in \mathbb{P}^1(K)$ (suma de funciones punto a punto). El conjunto Div de todos los divisores en $\mathbb{P}^1(K)$ es un grupo abeliano (es el grupo abeliano libre generado por los puntos de $\mathbb{P}^1(K)$). El orden natural de $\mathbb{Z}$ induce un orden en Div: $D \geq E$ si $D(p) \geq E(p)$ para todo $p \in \mathbb{P}^1(K)$. Decimos que un divisor D es positivo cuando $D \geq 0$. Definimos también el grado de un divisor D como grado$(D) = \sum_{p\in\mathbb{P}^1(K)} D(p) \in \mathbb{Z}$. Denotamos Div_d el conjunto de divisores positivos de grado d. El conjunto de divisores positivos de grado uno esta en biyección con $\mathbb{P}^1(K)$.

(7.3.4) A cada $F \in K[2,d] - \{0\}$ podemos asociar un divisor. Con la notación de (7.3.2), definimos

$$\mathrm{div}(F) = \sum_{i=1}^{N} r_i p_i$$

Si $F, G \in K[2,d] - \{0\}$ entonces $\mathrm{div}(F) = \mathrm{div}(G)$ si y solo si $F = \lambda G$ para algun $\lambda \in K^*$. Como todo divisor positivo de grado d es de la forma $\mathrm{div}(F)$ para algun F, resulta que la aplicación

$$\mathrm{div} : K[2,d] - \{0\}/K^* \to \mathrm{Div}_d$$

es biyectiva.

(7.3.5) Definimos una acción a derecha de $\mathrm{PGL}(2,K)$ en Div:
si $\tau \in \mathrm{PGL}(2,K)$ y $D \in \mathrm{Div}$,

$$(D.\tau)(p) = D(\tau(p)) \quad \text{para } p \in \mathbb{P}^1(K)$$

o sea, $D.\tau = D \circ \tau$ (composición de funciones). Se verifica que $\mathrm{div}(F).\tau = \mathrm{div}(\tau.F)$, o sea, la biyección div es compatible con las acciones. Esto implica que el problema de clasificación proyectiva de formas binarias (modulo K^*) equivale al problema de clasificación proyectiva de divisores positivos, que consideramos a continuacion.

(7.3.6) Sea P un conjunto provisto de una acción a izquierda $\alpha : G \times P \to P$ de un grupo G, como en §4. (El caso que tenemos en mente es $G = \mathrm{PGL}(2,K)$ con su acción natural en $P = \mathbb{P}^1(K)$). A partir de esta acción de G en P se deducen otras acciones.

Primeramente, G también actúa a izquierda en el conjunto $\mathcal{P}(P)$ de todos los subconjuntos de P via $g.Y = \{g.y, y \in Y\} \subset P$ para cada $Y \subset P$. Si $Y \subset P$ es un subconjunto finito con d elementos entonces $g.Y$ también es finito con d elementos. Por lo tanto, G actúa en el conjunto $\mathcal{P}(P)_d$ de todos los subconjuntos finitos de P con d elementos.

Además, G actúa a izquierda en el producto cartesiano P^d, para cada $d \in \mathbb{N}$, via

$$g.(p_1, \dots, p_d) = (g.p_1, \dots, g.p_d)$$

Sea $\Delta = \{(p_1, \dots, p_d) \in P^d : \exists i \neq j / p_i = p_j\} \subset P^d$ el conjunto de las d-tuplas de elementos de P con dos coordenadas iguales. Entonces $G.\Delta \subset \Delta$ y por lo tanto G actúa en

$$P^{[d]} := P^d - \Delta = \{(p_1, \dots, p_d) \in P^d : p_i \neq p_j, \forall i \neq j\}$$

La aplicación

$$P^{[d]} \to \mathcal{P}(P)_d$$

tal que $(p_1, \dots, p_d) \mapsto \{p_1, \dots, p_d\}$ es compatible con las acciones definidas. Un elemento $(p_1, \dots, p_d) \in P^{[d]}$ se puede pensar como un conjunto

$$\{p_1, \dots, p_d\}$$

provisto de un orden de sus elementos. La aplicación anterior consiste en olvidarse del orden.

Consideremos primeramente la clasificación de puntos ordenados.
Vale decir, dados $(p_1, \dots, p_d)$, $(q_1, \dots, q_d)$ donde $p_i, q_i \in P = \mathbb{P}^1(K)$, $p_i \neq p_j$, $q_i \neq q_j$ para $i \neq j$, decidir si existe $\tau \in G = \mathrm{PGL}(2, K)$ tal que

$$\tau(p_i) = q_i$$

para $i = 1, \dots, d$.

La siguiente Proposición resuelve el caso $d = 3$.

(7.3.7) **Proposición:** Sean dados $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}^1(K)$, donde $p_i \neq p_j$, $q_i \neq q_j$ para $i \neq j$. Entonces existe una única $\tau \in \mathrm{PGL}(2, K)$ tal que $\tau(p_i) = q_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Demostración: Elijamos representantes $u_i \in K^2 - \{(0, 0\}$ de p_i y $v_i \in K^2 - \{(0, 0\}$ de q_i. Como u_1, u_2 son linealmente independientes, u_3 se escribe

$$u_3 = au_1 + bu_2$$

para ciertos $a, b \in K^*$. De la misma manera, tenemos

$$v_3 = a'v_1 + b'v_2$$

con $a', b' \in K^*$. Como u_1, u_2 es base de K^2, existe una única transformación lineal $f : K^2 \to K^2$ tal que

$$f(u_1) = (a'/a)v_1, \qquad f(u_2) = (b'/b)v_2$$

Se verifica también que $f(u_3) = v_3$. Por lo tanto, si $\tau \in \mathrm{PGL}(2, K)$ es la clase de f entonces τ satisface $\tau(p_i) = q_i$ para $i = 1, 2, 3$. Para ver la unicidad de τ, sea $g : K^2 \to K^2$ una transformación lineal tal que $g(u_i) = \lambda_i v_i$ con $\lambda_i \in K^*$, para $i = 1, 2, 3$. Afirmamos que existe $\lambda \in K^*$ tal que $g = \lambda f$. Reemplazando g por $\lambda_3^{-1} g$ podemos suponer $g(u_3) = v_3$. Entonces, por linealidad, $g(u_3) = ag(u_1) + bg(u_2) = a\lambda_1 v_1 + b\lambda_2 v_2 = v_3$. Como la escritura $v_3 = a'v_1 + b'v_2$ es única, resulta $\lambda_1 = a'/a$, $\lambda_2 = b'/b$ y por lo tanto $g = f$, como se afirmaba.

(7.3.8) **Corolario:** (forma normal para tres puntos ordenados en $\mathbb{P}^1(K)$) Dados tres puntos distintos y ordenados $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^1(K)$ existe una única $\mu \in \mathrm{PGL}(2, K)$ tal que

$$\mu(p_1) = (1 : 0), \qquad \mu(p_2) = (1 : 1), \qquad \mu(p_3) = (0 : 1)$$

También se escribe $\mu(p_1) = 0$, $\mu(p_2) = 1$, $\mu(p_3) = \infty$, utilizando el abuso de notación $(1 : 0) = 0$, $(1 : 1) = 1$, $(0 : 1) = \infty$.

Demostración: utilizar la Proposición con $q_1 = (1 : 0)$, $q_2 = (1 : 1)$, $q_3 = (0 : 1)$. De hecho, podemos dar una formula explícita para μ. Denotamos $p_i = (a_i : b_i)$. Entonces

$$\mu(x_0 : x_1) = ((b_1a_2 - a_1b_2)(b_3x_0 - a_3x_1) : (b_3a_2 - a_3b_2)(b_1x_0 - a_1x_1))$$

En coordenadas afines $x = x_1/x_0$, tenemos la homografía

$$\mu(x) = \frac{(b_3a_2 - a_3b_2)(b_1 - a_1x)}{(b_1a_2 - a_1b_2)(b_3 - a_3x)}$$

(7.3.9) **Corolario:** Sea $\sigma \in \mathbb{S}_3$ una permutación de $\{1, 2, 3\}$. Entonces para cada $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^1(K)$ existe una única $\tau = \tau_\sigma \in \mathrm{PGL}(2, K)$ tal que

$\tau_\sigma(p_i) = p_{\sigma(i)}$ para $i = 1, 2, 3$.

Demostración: utilizar la Proposición con $q_1 = p_{\sigma(1)},\ q_2 = p_{\sigma(2)},\ q_3 = p_{\sigma(3)}$

(7.3.10) **Observación:** Se demuestra similarmente que dados

$$p_1, \ldots, p_{n+2}, q_1, \ldots, q_{n+2} \in \mathbb{P}^n(K)$$

en posición general (en el sentido que para todo j, los conjuntos $\{p_i, i \neq j\}$, $\{q_i, i \neq j\}$ no estan contenidos en ningun hiperplano de $\mathbb{P}^n(K)$) existe una única $\tau \in \mathrm{PGL}(n+1, K)$ tal que $\tau(p_i) = q_i$ para $i = 1, \ldots, n+2$.

(7.3.11) Ahora tratamos la clasificación de cuatro puntos ordenados

$$p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^1(K)$$

La solución es consecuencia directa de la unicidad de μ en (7.3.8). En efecto, sea $\mu \in \mathrm{PGL}(2, K)$ la única transformación tal que $\mu(p_1) = (1:0),\ \mu(p_2) = (1:1),\ \mu(p_3) = (0:1)$. Aplicamos μ a p_4 y obtenemos $\mu(p_4) = (1:\lambda)$ para un cierto $\lambda = \lambda(p_1, p_2, p_3, p_4) \in K - \{0, 1\}$. Obtenemos

(7.3.12) **Proposición:** (forma normal para cuatro puntos ordenados en $\mathbb{P}^1(K)$) Dados cuatro puntos distintos y ordenados $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^1(K)$ existe una única $\mu \in \mathrm{PGL}(2, K)$ y un único $\lambda \in K - \{0, 1\}$ tal que

$$\mu(p_1) = 0, \quad \mu(p_2) = 1, \quad \mu(p_3) = \infty, \quad \mu(p_4) = \lambda$$

(7.3.13) A partir de (7.3.8) obtenemos la siguiente formula explícita para la función λ (la notación $P^{[4]}$ como en (7.3.6))

$$\lambda : P^{[4]} \to K - \{0, 1\}$$

$$\lambda(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{(b_3 a_2 - a_3 b_2)(b_1 a_4 - a_1 b_4)}{(b_1 a_2 - a_1 b_2)(b_3 a_4 - a_3 b_4)}$$

Se dice que λ es la "razón doble" de (p_1, p_2, p_3, p_4).

La respuesta anunciada viene dada por la siguiente

(7.3.14) **Proposición:** Sean dadas dos cuaternas ordenadas

$$(p_1, p_2, p_3, p_4), (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

de puntos distintos en $\mathbb{P}^1(K)$. Existe $\tau \in \mathrm{PGL}(2, K)$ tal que $\tau(p_i) = q_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ si y solo si

$$\lambda(p_1, p_2, p_3, p_4) = \lambda(q_1, q_2, q_3, q_4)$$

En otras palabras, la función $\lambda : \mathbb{P}^1(K)^{[4]} \to K - \{0, 1\}$ es un sistema completo de invariantes (ver (4.6)) para la acción de $\mathrm{PGL}(2, K)$ en $\mathbb{P}^1(K)^{[4]}$.

Demostración: Veamos primero que λ es invariante, vale decir, si existe $\tau \in \mathrm{PGL}(2, K)$ tal que $\tau(p_i) = q_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ entonces $\lambda(p_i) = \lambda(q_i)$. Esto es consecuencia directa de (7.3.12). En efecto, sea μ (resp. μ') la única transformación que realiza la forma normal $(0, 1, \infty, \lambda(p_i))$ (resp. $(0, 1, \infty, \lambda(q_i)))$ para los p_i (resp. q_i). Como $\tau(p_i) = q_i$, la transformación $\mu'\tau$ también lleva los p_i a forma normal. Por lo tanto, $\mu'\tau = \mu$ y entonces $\lambda(p_i) = \mu(p_4) = \mu'\tau(p_4) = \mu'(q_4) = \lambda(q_i)$, como se afirmaba. La recíproca es también, similarmente, consecuencia directa de (7.3.12).

(7.3.15) El argumento anterior se aplica de la misma manera a la clasificación de $d \geq 4$ puntos ordenados distintos. En efecto, dado $(p_1, \ldots, p_d)$, sea $\mu \in \mathrm{PGL}(2, K)$ la única transformación tal que $\mu(p_1) = 0$, $\mu(p_2) = 1$, $\mu(p_3) = \infty$. Sea $\lambda_i = \lambda(p_1, p_2, p_3, p_i)$ para $i \geq 4$ (o sea, $\mu(p_i) = (1 : \lambda_i)$). Entonces $(p_1, \ldots, p_d)$ es equivalente a $(0, 1, \infty, \lambda_4, \ldots, \lambda_d)$, donde los $\lambda_i \in K - \{0, 1\}$ son distintos entre si (forma normal de d puntos ordenados distintos). Además, dos d-tuplas $(p_1, \ldots, p_d)$, $(q_1, \ldots, q_d)$ son equivalentes si y solo si $\lambda(p_1, p_2, p_3, p_i) = \lambda(q_1, q_2, q_3, q_i)$ para todo $i = 4, \ldots, d$ (o sea, las funciones $\{\lambda_i, i \geq 4\}$ forman un sistema completo de invariantes).

(7.3.16) Seguidamente consideramos el problema de clasificación de puntos no ordenados. Vale decir, dados dos subconjuntos con exactamente d elementos $A = \{p_1, \ldots, p_d\}, B = \{q_1, \ldots, q_d\} \subset \mathbb{P}^1(K)$, decidir si existe $\tau \in \mathrm{PGL}(2, K)$ tal que $\tau(A) = B$. Equivalentemente, eligiendo un orden de los elementos de A y de B, decidir si existen $\tau \in \mathrm{PGL}(2, K)$ y una permutación $\sigma \in \mathbb{S}_d$ tal que $\tau(p_i) = q_{\sigma(i)}$ para $i = 1, \ldots, d$.

(7.3.17) Tratemos primero el caso $d = 3$. Resulta de (7.3.7) que dados $\{p_1, p_2, p_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}$ existen exactamente seis transformaciones $\tau \in \mathrm{PGL}(2, K)$ tales que $\tau\{p_1, p_2, p_3\} = \{q_1, q_2, q_3\}$. En efecto, para cada $\sigma \in \mathbb{S}_3$ existe una única $\tau_\sigma \in \mathrm{PGL}(2, K)$ tal que $\tau_\sigma(p_i) = q_{\sigma(i)}$ para $i = 1, 2, 3$. En particular, la forma normal para tres puntos distintos no ordenados es $\{0, 1, \infty\}$.

(7.3.18) Sea ahora $d = 4$. Segun (7.3.14), dados dos conjuntos con cuatro elementos $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $B = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, existe $\tau \in \mathrm{PGL}(2, K)$ tal que $\tau(A) = B$ si y solo si

$$\lambda(p_1, p_2, p_3, p_4) = \lambda(q_{\sigma(1)}, q_{\sigma(2)}, q_{\sigma(3)}, q_{\sigma(4)})$$

para alguna $\sigma \in \mathbb{S}_4$.

(7.3.19) Estudiemos entonces como cambia $\lambda = \lambda(p_1, p_2, p_3, p_4)$ al modificar el orden de los puntos p_i. Denotemos, para cada $\sigma \in \mathbb{S}_4$

$$\lambda_\sigma = \lambda(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}, p_{\sigma(4)})$$

En principio hay 24 valores λ_σ, pero vamos a ver que en realidad hay solamente 6 valores diferentes. Denotemos por μ la única transformación proyectiva tal que $\mu(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0, 1, \infty, \lambda)$. Calculemos λ_σ para cada $\sigma \in \mathbb{S}_4$:

Si $\sigma = (12)(34)$, sea $g \in \mathrm{PGL}(2, K)$ definida por $g(x) = \lambda.(x - 1)/(x - \lambda)$. Se verifica $g(1) = 0$, $g(0) = 1$, $g(\lambda) = \infty$, $g(\infty) = \lambda$ y entonces

$$\begin{aligned} g \circ \mu(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}, p_{\sigma(4)}) &= g \circ \mu(p_2, p_1, p_4, p_3) \\ &= g(1, 0, \lambda, \infty) = (0, 1, \infty, \lambda) \end{aligned}$$

Resulta entonces que la transformación $g \circ \mu$ lleva (p_2, p_1, p_4, p_3) a forma normal y que $\lambda_\sigma = \lambda$.

Si $\sigma = (13)(24)$ o $\sigma = (14)(23)$ también resulta, similarmente, $\lambda_\sigma = \lambda$ (dejamos esta verificación al lector).

Notemos que el conjunto de los $\sigma \in \mathbb{S}_4$ tales que $\lambda_\sigma = \lambda$ es un subgrupo. Acabamos de ver que dicho subgrupo contiene al subgrupo normal $K =$

$\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ (subgrupo de Klein, isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$). Como el cociente $\mathbb{S}_4/K$ tiene seis elementos, resulta que hay a lo sumo seis valores distintos de λ_σ.

Sea ahora $\sigma = (12)$. Definimos $g \in \mathrm{PGL}(2, K)$ como $g(x) = 1-x$. Entonces $g(1) = 0$, $g(0) = 1$, $g(\infty) = \infty$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g \circ \mu(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}, p_{\sigma(4)}) &= g \circ \mu(p_2, p_1, p_3, p_4) \\ &= g(1, 0, \infty, \lambda) = (0, 1, \infty, 1-\lambda) \end{aligned}$$

En este caso resulta $\lambda_\sigma = 1 - \lambda$.

Mediante un cálculo similar obtenemos

$\sigma = (12)$	$g(x) = g(x) = 1-x$	$\lambda_\sigma = 1 - \lambda$
$\sigma = (13)$	$g(x) = 1/x$	$\lambda_\sigma = 1/\lambda$
$\sigma = (14)$	$g(x) = (x-\lambda)/(1-\lambda)$	$\lambda_\sigma = \lambda/(\lambda - 1)$
$\sigma = (34)$	$g(x) = (1-\lambda)x/(x-\lambda)$	$\lambda_\sigma = 1 - \lambda$
$\sigma = (234)$	$g(x) = x/(x-\lambda)$	$\lambda_\sigma = 1/(1-\lambda)$
$\sigma = (123)$	$g(x) = (x-1)/x$	$\lambda_\sigma = (\lambda - 1)/\lambda$

(7.3.20) De (7.3.18) y (7.3.19) resulta la siguiente solución al problema de clasificación de cuatro puntos no ordenados. Para cada $t \in K - \{0, 1\}$ denotemos

$$V(t) = \{t, 1/t, 1-t, 1/(1-t), t/(t-1), (t-1)/t\} \subset K$$

Entonces, dados dos conjuntos con cuatro elementos $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $B = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, existe $\tau \in \mathrm{PGL}(2, K)$ tal que $\tau(A) = B$ si y solo si

$$V(\lambda) = V(\lambda')$$

donde, eligiendo algun orden de los puntos, $\lambda = \lambda(p_1, p_2, p_3, p_4)$, $\lambda' = \lambda(q_1, q_2, q_3, q_4)$.
El conjunto $V(\lambda)$ no depende del orden elegido. Otra manera de escribir la condicion: $\lambda' \in V(\lambda)$.

Nos interesa dar otra formulación de este criterio, para lo cual necesitamos la siguiente

(7.3.21) **Proposición:** Consideremos la función $\jmath : K - \{0,1\} \to K$ definida por

$$\jmath(t) = \frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2(t-1)^2}$$

Entonces $V(t) = \jmath^{-1}\jmath(t)$ para todo $t \in K - \{0,1\}$.

Demostración: Primeramente veamos que

$$\jmath(t) = \jmath(1/t) = \jmath(1-t) = \jmath(1/(1-t)) = \jmath(t/(t-1)) = \jmath((t-1)/t)$$

para todo $t \in K - \{0,1\}$. Basta con verificar las dos primeras igualdades, ya que componiendo las transformaciones $t \mapsto 1/t$ y $t \mapsto 1-t$ se obtienen $1/(1-t)$, $t/(t-1)$ y $(t-1)/t$. La verificación de las mencionadas dos primeras igualdades se realiza mediante un cálculo directo. Esto prueba que $V(t) \subset \jmath^{-1}\jmath(t)$ para todo $t \in K - \{0,1\}$.
Para ver la otra inclusión, sea $s \in \jmath^{-1}\jmath(t)$, o sea, $\jmath(s) = \jmath(t)$, o también, s es solución de la ecuación

$$(s^2 - s + 1)^3 = t'.s^2(s-1)^2$$

con $t' = \jmath(t)$. Como esta ecuación tiene a lo sumo seis soluciones, y como ya sabemos que $V(t) \subset \jmath^{-1}\jmath(t)$, la demostración esta terminada para los t tales que los seis elementos de $V(t)$ son distintos. Entonces, solo resta analizar los (finitos) valores de t tales que $|V(t)| < 6$. Es fácil verificar que hay solamente dos tales casos:
a) Para los valores de $t = -1, 2, 1/2$ tenemos $V(t) = \{-1, 2, 1/2\}$ y $\jmath(t) = 27/4$. La ecuación $4(s^2-s+1)^3 = 27s^2(s-1)^2$ tiene por raices $\{-1, 2, 1/2\}$, cada una con multiplicidad dos, como se verifica facilmente. Por lo tanto, $V(t) = \jmath^{-1}\jmath(t)$ también en este caso.
b) Sea $t = \epsilon, 1/\epsilon$ una de las soluciones de $t = 1/(1-t)$, o sea, $t^2 - t + 1 = 0$. Entonces $V(t) = \{\epsilon, 1/\epsilon\}$, $\jmath(t) = 0$ y claramente $\jmath^{-1}(0) = \{\epsilon, 1/\epsilon\}$, como queríamos demostrar.

(7.3.22) **Observación:** Por simplicidad logica, hemos dado a priori la función $\jmath$. Pero esta puede ser encontrada, de la manera siguiente. Dado que la propiedad básica requerida de $\jmath$ es

$$\jmath(t) = \jmath(1/t) = \jmath(1-t) = \jmath(1/(1-t)) = \jmath(t/(t-1)) = \jmath((t-1)/t)$$

formamos el polinomio

$$\varphi(X) =$$
$$(X-t)(X-1/t)(X-(1-t))(X-(1/(1-t)))(X-(t/(t-1)))(X-((t-1)/t))$$

Cada coeficiente de este polinomio de grado seis en X es una función de t con la propiedad requerida. Se puede verificar mediante un cálculo directo que $\varphi(X) = X^6 - 3X^5 + a(t)X^4 + b(t)X^3 + a(t)X^2 - 3X + 1$ donde $a(t) = \jmath(t) - 6$. La función $b(t)$ también tiene la propiedad en cuestión, pero es función racional (homográfica) de $\jmath(t)$.

(7.3.23) **Proposición:** (clasificación de cuatro puntos no ordenados, segunda formulacion) Dos conjuntos $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ y $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ son equivalentes bajo $\mathrm{PGL}(2, K)$ si y solo si

$$\jmath(\lambda(p_1, p_2, p_3, p_4)) = \jmath(\lambda(q_1, q_2, q_3, q_4))$$

Demostración: Por (7.3.20), los conjuntos son equivalentes si y solo si $V(\lambda) = V(\lambda')$. En virtud de (7.3.20), esta igualdad es equivalente a $\jmath(\lambda) = \jmath(\lambda')$, como queríamos demostrar.

(7.3.24) Aplicación al problema de clasificación proyectiva de formas binarias. Como vimos en (7.3.4), la clasificación de formas binarias $F \in K[2, d]$ equivale a la clasificación de divisores positivos de grado d en $\mathbb{P}^1(K)$. Analicemos los casos $d = 3$ y $d = 4$.
$d = 3$: un divisor positivo de grado 3 es de una de las formas

$$p_1 + p_2 + p_3, \qquad 2p_1 + p_2, \qquad 3p_1$$

con $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$. Por (7.3.16), estos son proyectivamente equivalentes a

$$(0) + (\infty) + (1), \qquad 2(0) + (\infty), \qquad 3(0)$$

Consecuentemente, toda $F \in K[2, 3]$ no nula es proyectivamente equivalente a una y solo una de las siguientes

$$x_0x_1(x_0 - x_1), \qquad x_0^2x_1, \qquad x_0^3$$

$d = 4$: los tipos de divisores positivos de grado cuatro son

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4, \qquad 2p_1 + p_2 + p_3, \qquad 2p_1 + 2p_2, \qquad 3p_1 + p_2, \qquad 4p_1$$

los cuales, segun (7.3.23), admiten las siguientes formas normales

$$(0) + (\infty) + (1) + (\lambda),\ 2(0) + (\infty) + (1),\ 2(0) + 2(\infty),\ 3(0) + (\infty),\ 4(0)$$

Las formas binarias de grado cuatro admiten las formas normales siguientes

$$x_0x_1(x_0 - x_1)(x_0 - \lambda x_1),\ x_0^2x_1(x_0 - x_1),\ x_0^2x_1^2,\ x_0^3x_1,\ x_0^4$$

Aquí $\lambda \in K - \{0, 1\}$. Las formas canónicas escritas son no-equivalentes, con la excepción de que si λ' es alguno de

$$1/\lambda,\ 1 - \lambda,\ 1/(1 - \lambda),\ \lambda/(\lambda - 1),\ (\lambda - 1)/\lambda$$

entonces $x_0x_1(x_0 - x_1)(x_0 - \lambda x_1)$ es proyectivamente equivalente a

$$x_0x_1(x_0 - x_1)(x_0 - \lambda' x_1)$$

(7.4) Curvas en el plano proyectivo

En esta sección consideramos hipersuperficies de grado d en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(K)$. Una tal hipersuperficie, o curva plana, es de la forma

$$\mathcal{V}(F) = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) : \ F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

donde $F \in K[2, d] - \{0\}$ es un polinomio en las variables x_0, x_1, x_2, homogéneo de grado d. Mantenemos la notación de (7.1).

El problema de clasificación proyectiva de "formas ternarias" $F \in K[2, d]$ de grado d es difícil para $d \geq 4$. Nuestro objetivo es tratar este problema en el caso $d = 3$, en la proxima sección. Para esto, necesitamos algunos hechos generales sobre curvas planas, que presentamos a continuacion.

En (5.24) habíamos definido la multiplicidad de intersección de dos curvas afines en un punto.

(7.4.1) **Definición:**
(multiplicidad de intersección para curvas proyectivas)
Sean F, G dos polinomios homogéneos en x_0, x_1, x_2 sin factores comunes, de grados m y n respectivamente. Definimos

$$(F, G; p) = (F_*, G_*; p_*)$$

donde F_* y G_* denotan la deshomogeneización respecto de la variable x_i para algun $i = 0, 1, 2$ tal que $p_i \neq 0$.

(7.4.2) **Proposición:** $(F, G; p)$ no depende de la variable utilizada para deshomogeneizar.

Demostración: Supongamos que $p = (p_0 : p_1 : p_2)$ es tal que $p_0 \neq 0$ y $p_1 \neq 0$, de manera que $p = (1 : a : b) = (a' : 1 : b')$, donde $a.a' = 1$ y $a.b' = b$. Sean $f(x, y) = F(1, x + a, y + b)$, $g(x, y) = G(1, x + a, y + b)$, $f'(x, y) = F(x + a', 1, y + b')$, $g'(x, y) = G(x + a', 1, y + b')$. Segun (5.24), debemos demostrar que

$$\dim_K K[[x, y]]/(f, g) = \dim_K K[[x, y]]/(f', g')$$

La relación entre f y f' (resp. g y g') es la siguiente

$$\begin{aligned} f'(x,y) &= F(x+a',1,y+b') = (x+a')^m F(1,1/(x+a'),(y+b')/(x+a')) \\ &= (x+a')^m F(1,(1/(x+a'))-a+a,((y+b')/(x+a'))-b+b) \\ &= (x+a')^m f(1/(x+a'))-a,((y+b')/(x+a'))-b) \\ &= (x+a')^m f(-ax/(x+a'),(y-bx)/(x+a')) \end{aligned}$$

De la misma manera, $g'(x,y) = (x+a')^n g(-ax/(x+a'),(y-bx)/(x+a'))$. Sea $\sigma : K[[x,y]] \to K[[x,y]]$ el isomorfismo de K-algebras definido por

$$\sigma f(x,y) = f(-ax/(x+a'),(y-bx)/(x+a')$$

Como $x+a' \in K[[x,y]]$ es una unidad, resulta $\sigma(f,g) = (f',g')$, lo cual implica lo que queríamos demostrar.

Uno de los resultados básicos de la teoría es el siguiente

(7.4.3) **Teorema (de Bèzout) :** Supongamos que el cuerpo K es algebraicamente cerrado. Sean $F,G \in K[x_0,x_1,x_2]$ dos polinomios homogéneos sin factores comunes, de grados m y n respectivamente. Entonces $\mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(G) \subset \mathbb{P}^2(K)$ es un conjunto finito y

$$\sum_{p \in \mathcal{V}(F)\cap\mathcal{V}(G)} (F,G;p) = mn$$

Observaciones:
a) Un caso particular interesante es cuando $n = 1$ ($\mathcal{V}(G)$ es una recta). En este caso se puede dar una demostración directa del teorema (ejercicio), ya que se reduce a la afirmación de que el número de raices de un polinomio en una variable, contadas con multiplicidad, es igual al grado del polinomio.
b) El teorema de Bèzout es de naturaleza global y expresa una propiedad de completitud del plano proyectivo sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.
c) Como corolario del teorema, si F y G se intersecan transversalmente (o sea, $(F,G;p) = 1$ para todo $p \in \mathcal{V}(F)\cap\mathcal{V}(G)$) entonces $|\mathcal{V}(F)\cap\mathcal{V}(G)| = mn$.

Demostración: Solamente vamos a dar un argumento heuristico. Para una demostración completa referimos a [F]. La idea que expondremos aquí es que el teorema es consecuencia de la propiedad de continuidad clásicamente denominada "principio de conservación del número de intersección". Más precisamente, definamos el número total de intersección de F y G como

$$(F,G) = \sum_{p \in \mathcal{V}(F)\cap\mathcal{V}(G)} (F,G;p) \quad \in \mathbb{N}$$

Supongamos que F y G dependen (polinomialmente) de un parámetro $t \in K$, vale decir, son dados $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in K[x,y,z]$ tales que $\mathcal{F}(x,y,0) = F(x,y)$, $\mathcal{G}(x,y,0) = G(x,y)$. Para cada $t \in K$ denotamos $F_t(x,y) = \mathcal{F}(x,y,t)$, de manera que tenemos una familia de polinomios $F_t \in K[x,y]$ con $t \in K$. El mencionado Principio de Conservación es:

$$(F_t, G_t) \text{ es constante como función de } t$$

Esta afirmación implica el teorema. Para ver esto, construimos una familia particular. Sean $F' = \prod_{i=1}^{m} L_i$, $G' = \prod_{i=1}^{n} M_i$ productos de factores L_i, M_j de grado uno, elegidos en posición general. Es claro que $\mathcal{V}(F') \cap \mathcal{V}(G')$ consiste de mn puntos $\mathcal{V}(L_i) \cap \mathcal{V}(M_j)$ y la intersección es transversal en cada uno de ellos; por lo tanto, $(F', G') = mn$. Sean $F_t = (1-t)F + tF'$, $G_t = (1-t)G + tG'$. Por el principio, $(F_0, G_0) = (F_1, G_1)$, con lo cual

$$(F,G) = (F_0,G_0) = (F_1,G_1) = (F',G') = mn$$

como queríamos demostrar.

Es claro que el teorema de Bèzout implica el principio de conservación, de manera que lo que hemos demostrado es la equivalencia de las dos afirmaciones. Para mayor información sobre principios de conservación se puede consultar el libro "Intersection Theory" de W. Fulton (Springer-Verlag).

(7.4.4) **Puntos de inflexión.** Sea $X = \mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^2(K)$ una curva algebraica proyectiva de grado d. Supondremos que F no tiene factores multiples. Sea $x \in X$ un punto no singular y denotemos $T = PT_F(x)$ la recta tangente a F en x. Sabemos que $(X,T;x) \geq 2$. Decimos que x es un punto de inflexión de X si

$$(X,T;x) \geq 3$$

Decimos que x es una inflexión ordinaria si $(X,T;x) = 3$.

Por ejemplo, si X es una recta, todos sus puntos son de inflexión. Si X

es una cónica irreducible entonces X no tiene puntos de inflexión. Para la curva afín $X = (y = x^d)$ el punto $x = (0, 0)$ es de inflexión, si $d \geq 3$.

Como aplicación del teorema de Bèzout, nos interesa calcular el número de puntos de inflexión de una curva $X = \mathcal{V}(F)$.

(7.4.5) **Definición:** Sea F un polinomio homogéneo de grado d en x_0, x_1, x_2. Definimos el Hessiano de F como $h(F) = \det H(F)$, donde $H(F)$ es la matriz de polinomios

$$H(F) = (\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j})_{0 \leq i,j \leq 2}$$

Notemos que $h(F)$ es un polinomio homogéneo de grado $3(d-2)$.

(7.4.6) **Proposición:** Denotemos $\mathcal{S}(F)$ el conjunto de puntos singulares de $X = \mathcal{V}(F)$ y $\mathcal{I}(F)$ el conjunto de sus puntos de inflexión. Entonces

$$\mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(h(F)) = \mathcal{I}(F) \cup \mathcal{S}(F)$$

Demostración: Sea $x \in X$ y L una recta por x. Calculemos $(X, L; x)$. Elegimos un punto $p \in L - \{x\}$, de manera que $(X, L; x) = \operatorname{ord} F(x + tp)$, ver (5.25). La formula de Taylor se puede escribir

$$F(x + tp) = F(x) + \Delta_p F(x) t + \Delta_p^2 F(x) t^2 + \cdots + \Delta_p^d F(x) t^d$$

donde Δ_p es el operador diferencial

$$\Delta_p = p_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Para $0 \leq j \leq d$, el polinomio $\Delta_p^j F$ se denomina el j-esimo polinomio polar de F respecto a p. Es un polinomio homogéneo de grado $d - j$ en x. Asi tenemos,

$$\Delta_p F = \sum_{0 \leq i \leq 2} p_i \frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad \Delta_p^2 F = \sum_{0 \leq i,j \leq 2} p_i p_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$$

Denotemos $r = \operatorname{ord} F(x + tp)$. Entonces $\Delta_p^j F(x) = 0$ para $0 \leq j < r$ y $\Delta_p^r F(x) \neq 0$.

Supongamos que $x \in X$ es punto de inflexión. Tomamos como L la recta tangente a X en x. Entonces $r \geq 3$ y resulta del análisis anterior que $\Delta_p^2 F(x) = 0$, para todo $p \in L - \{x\}$. Entonces, la recta L esta contenida en la cónica con ecuación $Q(p) = \Delta_p^2 F(x)$ (polinomio de grado dos en p, con x fijo). Dado que una cónica es reducible si y solo si la matriz que la define es singular (ejercicio), obtenemos $h(F)(x) = 0$, con lo cual hemos demostrado que $\mathcal{I}(F) \subset \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(h(F))$.

Sea ahora $x \in \mathcal{S}(F)$ y elijamos como L una de las rectas tangentes (i. e. factores de la forma inicial) de X en x. Parametrizando $L = \{x + p.t\}$ resulta facilmente

$$\text{ord } F(x + tp) = (X, L; x) \geq 3$$

Repitiendo el argumento anterior, obtenemos $h(F)(x) = 0$, con lo cual $\mathcal{S}(F) \subset \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(h(F))$.

Recíprocamente, supongamos que $h(F)(x) = 0$. Si $x \in \mathcal{S}(F)$, hemos terminado. Supongamos entonces que x es no singular y veamos que x es punto de inflexión. Sea L la recta tangente a X en x y elijamos $p \in L - \{x\}$. Sabemos que $\Delta_p F(x) = 0$ y basta con ver que $\Delta_p^2 F(x) = 0$. Consideremos nuevamente el polinomio cuadrático $Q(y) = \Delta_y^2 F(x)$ con $y = (y_0, y_1, y_2)$. La hipótesis $h(F)(x) = 0$ implica que Q es un polinomio cuadrático reducible, o sea, es el producto de dos factores lineales. De la relación de Euler resulta inmediatamente que $Q(x) = 0$, que Q es no singular en x y su recta tangente en x es L. Por lo tanto, L es una de las dos rectas que constituyen $\mathcal{V}(Q)$; en particular, $L \subset \mathcal{V}(Q)$, que es lo que necesitabamos demostrar.

(7.4.7) **Proposición:** Sea F homogéneo de grado d, sin factores multiples. Sea $x \in X = \mathcal{V}(F)$ un punto no-singular. Denotamos L la recta tangente a X en x y $r = (F, L; x)$. Entonces

$$(F, h(F); x) = r - 2$$

Demostración: Primeramente destacamos que la construcción del Hessiano es invariante respecto a transformaciones proyectivas: si $\tau : \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ es una transformación proyectiva, se verifica facilmente que

$$h(\tau.F) = (\det \tau)^2 \tau.h(F)$$

Debido a que la multiplicidad de intersección también es invariante, podemos suponer, luego de aplicar una transformación apropiada, que $x = (1 : 0 : 0)$ y que $L = (x_2 = 0)$. Afinizando $x_0 = 1$, $F_* = f$ adopta la forma

$$f(x, y) = y - ax^r + b(x, y)y + c(x, y)$$

donde $a \in K - \{0\}$, b contiene monomios de grados entre 1 y r, c contiene monomios de grado $> r$. Por el teorema de la función implícita, f admite una parametrización analítica $x(t) = t, y(t) = at^r + \cdots = t^r u(t)$, donde $u(t) \in K[[t]], u(0) \neq 0$. Sea $h = h(F)_*$ la deshomogeneización del Hessiano de F. Basta con demostrar que ord $h(t, y(t)) = r - 2$. Para esto, utilizamos la formula general

$$h(x, y) = \frac{d}{d-1} f(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) + 2 f_{xy} f_x f_y - f_{xx} f_y^2 - f_{yy} f_x^2$$

cuya verificación dejamos a cargo del lector. Reemplazando $x \mapsto t$, $y \mapsto t^r u(t)$ resulta ord $h(t, y(t)) = r - 2$ mediante un cálculo directo.

(7.4.8) **Ejemplo:** si $x \in X$ es un punto de inflexión ordinario (7.4.4) entonces $(F, h(F); x) = 1$ (F y su Hessiano se cortan transversalmente en x)

(7.4.9) **Corolario:** Supongamos que $X = \mathcal{V}(F)$ es no-singular de grado $d \geq 2$. Entonces el número de puntos de inflexión de X, contados con multiplicidad, es $3d(d-2)$.

Demostración: Afirmamos que el polinomio irreducible F no divide a $h(F)$. Si lo dividiera, todo punto de $X = \mathcal{V}(F)$ seria de inflexión y, con la notación de la demostración de (7.4.7), seria $h(t, x(t))$ identicamente cero. Esto contradice que ord $h(t, y(t)) = r - 2$. Entonces, segun el teorema de Bèzout

$$\sum_{x \in \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(h(F))} (F, h(F); x) = 3d(d-2)$$

Como X es no-singular, $\mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(h(F)) = \mathcal{I}(F)$. La multiplicidad con que debe ser contado cada punto de inflexión x es

$$(F, h(F); x) = (F, PT_F(x); x) - 2$$

(7.4.10) **Ejemplo:** Sea X una cúbica no singular. Entonces X tiene exactamente nueve puntos de inflexión. En efecto, $3d(d-2) = 9$ para $d = 3$. Además, todos los puntos de inflexión son ordinarios, ya que $(L, X) = 3$ para toda recta L.

(7.4.11) **Observación:** Si X es singular, el número de puntos de inflexión, contados con multiplicidad, es

$$3d(d-2) - \sum_{x \in \mathcal{S}(X)} (F, h(F); x)$$

No hemos calculado $(F, h(F); x)$ para $x \in \mathcal{S}(X)$, cosa que se puede hacer con metodo similar al de (7.4.7). El resultado depende del tipo de punto singular (nodo, cúspide, punto ordinario, etc.). Ver [W] (Plücker formulas).

Consideramos ahora otro problema enumerativo, relevante al tratamiento de cúbicas en la proxima sección.

(7.4.12) **Recta polar.** Sea $X = \mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^2(K)$ una curva de grado d. Suponemos que F no tiene factores multiples. Fijemos un punto $p \in \mathbb{P}^2(K) - X$. Entre los puntos no singulares $q \in X - \mathcal{S}(X)$, cuantos hay tales que la recta tangente $PT_F(q)$ pasa por p ?

En coordenadas, la condición sobre $q \in X$ se expresa

$$\sum_{i=0}^{2} F_i(q) p_i = 0$$

o también

$$\Delta_p F(q) = 0, \qquad F(q) = 0$$

donde $\Delta_p F(x) = \sum_{i=0}^{2} F_i(x) p_i$ es la "polar de F respecto a p"; es un polinomio homogéneo de grado $d-1$ (ver (7.4.6). Notemos que todo punto singular $q \in \mathcal{S}(X)$ (si los hay) satisface estas condiciones, y por lo tanto representa una solución extraña al problema. Resulta del teorema de Bèzout que el número de soluciones $q \in X$, contadas con multiplicidad, es

$$d(d-1)$$

Para conocer el número de soluciones (verdaderas, distintas), hace falta calcular la multiplicidad $(F, \Delta_p F; q)$ para cada q. La respuesta para q no singular viene dada por

(7.4.13) **Proposición:** Sea $T = PT_F(q)$ la recta tangente a X en q y denotemos $r = (X, T; q)$. Entonces $(F, \Delta_p F; q) = r - 1$ para $p \in T - \{q\}$.

Demostración: Utilizaremos la notación de la demostración de (7.4.7). Sea $f_p = (\Delta_p F)_*$ la deshomogeneización respecto de x_0 de la polar $\Delta_p F$, de manera que

$$f_p = p_0(F_0)_* + p_1(F_1)_* + p_2(F_2)_* = p_0(F_0)_* + p_1 f_x + p_2 f_y$$

De la relación de Euler $dF = \sum_{i=0}^{2} x_i F_i$ obtenemos deshomogeneizando

$$(F_0)_* = df - xf_x - yf_y$$

Combinando las dos igualdades anteriores,

$$f_p = dp_0 f - ((p_0 x - p_1)f_x + (p_0 y - p_2)f_y)$$

Mediante una transformación proyectiva podemos suponer que $q = (1 : 0 : 0)$ y la recta tangente T en q es $x_2 = 0$. Además, $p = (1 : a : 0) \in T - \{q\}$ con $a \neq 0$. Mediante un cálculo sencillo obtenemos ord $f_p(t, y(t)) = r - 1$, como queríamos demostrar.

(7.4.14) **Corolario:** Supongamos que X es no singular y que $p \notin X$. Sean $q_1, \ldots, q_m$ los puntos de X tales que la tangente pasa por p. Si $r_i = (F, PT_F(q_i); q_i)$ entonces

$$d(d-1) = \sum_{i=1}^{m} (r_i - 1)$$

En particular, si p no pertenece a ninguna de las finitas tangentes inflexionarias de X entonces el número de puntos $q \in X$ tales que $PT_F(q)$ pasa por p es exactamente $d(d-1)$.

(7.4.15) Ahora consideramos el mismo problema planteado en (7.4.12), pero en el caso $p \in X - \mathcal{S}(X)$. El análisis es similar: los puntos $q \in X$ tales que $PT_F(q)$ pasa por p son los que satisfacen $F(q) = \Delta_p F(q) = 0$. La única diferencia radica en que ahora el mismo punto p contribuye, ya que satisface estas ecuaciones (equivalentemente, la recta tangente en p contiene p).

Para q no singular, $q \neq p$, el resultado de (7.4.13) se aplica: $(F, \Delta_p F; q) = (F, PT_F(q); q) - 1$. Para el punto p vale $(F, \Delta_p F; p) = (F, PT_F(p); p)$. Esto se verifica facilmente con la misma demostración de (7.4.13), excepto que ahora $a = 0$ y ord $f_p(t, y(t)) = r$. Obtenemos:

(7.4.16) **Corolario:** Supongamos que X es no singular y que $p \in X$. Sean $q_1, \dots, q_m$ los puntos de X, distintos de p, tales que la tangente pasa por p. Si $r = (F, PT_F(p); p)$ y $r_i = (F, PT_F(q_i); q_i)$ entonces

$$d(d-1) = r + \sum_{i=1}^{m} (r_i - 1)$$

(7.4.17) **Ejemplo:** Sea $X = \mathcal{V}(F)$ una cúbica no singular y $p \in X$ uno de los nueve puntos de inflexión. Entonces existen exactamente tres puntos $q_1, q_2, q_3 \in X$ distintos de p tales que la recta tangente $L_i = PT_F(q_i)$ pasa por p.

Demostración: Si $q \in X$ es uno de los puntos de inflexión entonces la recta tangente L en q interseca a X solamente en q, ya que el número total de intersección satisface $(X, L) = 3 = (X, L; q)$. Por lo tanto, ninguno de los q_i de (7.4.16) es de inflexión. Tenemos entonces $3(3-1) = 3 + m$, o sea $m = 3$, como queríamos demostrar.

(7.4.18) El invariante $\jmath$ de las cuatro rectas tangentes en p, q_1, q_2, q_3 es el invariante fundamental para la clasificación proyectiva de cúbicas no singulares, como veremos en la proxima sección.

(7.5) Cúbicas

(7.5.1) **Cúbicas en forma de Weierstrass.** Para cada $t \in K$ definimos

$$f_t(x, y) = y^2 - x(x-1)(x-t) \quad \in K[x, y]$$

La curva afín $\mathcal{C}(f_t) \subset K^2$ se llama "cúbica en forma de Weierstrass" con parámetro t. Se verifica facilmente que esta curva es singular (nodal) si y solo si $t = 0, 1$. Supondremos en general que $t \neq 0, 1$. Sugerimos al lector graficar $\mathcal{C}(f_t)$ en el caso $K = \mathbb{R}$. Un hecho que va a resultar de importancia en nuestra discusión es el siguiente:

En los puntos $(0, 0), (1, 0), (t, 0)$ la recta tangente a $\mathcal{C}(f_t)$ es vertical.

Sea $F_t(x, y, z) = zy^2 - x(x-z)(x-tz) \in K[x, y, z]$ la homogeneización de f_t y $X_t = \mathcal{V}(F_t) \subset \mathbb{P}^2(K)$ la cúbica proyectiva correspondiente. La intersección de X_t con la recta del infinito $z = 0$ consiste solamente del punto $p = (0 : 1 : 0) \in X_t$. Este punto es de inflexión. En efecto, $F_t(x, 1, z) = z - x(x-z)(x-tz)$ tiene recta tangente $z = 0$ en $(x, z) = (0, 0)$ y como este polinomio no contiene x^2, el orden de contacto de la tangente es tres. En coordenadas homogéneas la observación anterior se formula:

La recta tangente en los puntos $q_1 = (0 : 0 : 1), q_2 = (1 : 0 : 1), q_3 = (t : 0 : 1)$ pasa por el punto de inflexión $p = (0 : 1 : 0)$, como en (7.4.17).

Recíprocamente,

(7.5.2) **Proposición:** Sea $X = \mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^2(K)$ una cúbica no singular. Supongamos que $p = (0 : 1 : 0) \in X$ es punto de inflexión con recta tangente $z = 0$, que $q_1 = (0 : 0 : 1), q_2 = (1 : 0 : 1) \in X$ y que la recta tangente en cada q_i pasa por p. Entonces, salvo constante multiplicativa, $F = zy^2 - cx(x-z)(x-tz)$ con $c \in K - \{0\}$ y $t \in K - \{0, 1\}$.

Demostración: Sea $g(x, z) = F(x, 1, z)$. Como g tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$ con recta tangente $z = 0$, podemos escribir

$$g(x, z) = z + az^2 + bxz + h(x, z)$$

con h homogéneo de grado tres. Homogeneizando obtenemos $F(x, y, z) = y^2z + ayz^2 + bxyz + h(x, z)$. Sea $f(x, y) = F(x, y, 1) = y^2 + ay + bxy + h(x, 1)$.

De la hipótesis $F(q_i) = 0$ resulta que el polinomio $h(x, 1)$ de grado tres tiene raices $0, 1, t$, con lo cual $h(x, t) = cx(x - 1)(x - t)$ con $c \in K - \{0\}$. La hipótesis sobre rectas tangentes equivale a $\partial f(x, y)/\partial y = 0$ para $(x, y) = (0, 0), (1, 0)$. De aquí resulta $a = b = 0$, como queríamos demostrar.

(7.5.3) **Observación:** Resulta automaticamente que la recta tangente en el tercer punto de intersección $q_3 = (t : 0 : 1)$ de X con la recta $y = 0$, también pasa por p.

(7.5.4) **Proposición:** Toda cúbica no singular es proyectivamente equivalente a una cúbica en forma de Weierstrass.

Demostración: Sea $X = \mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^2(K)$ una cúbica no singular. Elijamos $p \in X$ uno de los nueve puntos de inflexión. Sean q_1, q_2, q_3 los tres puntos de $X - \{p\}$ tales que $p \in PT_F(q_i)$, como en (7.4.17). Consideremos las tres rectas $A = \overline{pq_1}$, $B = \overline{q_1q_2}$, $C = PT_F(p)$. Resulta del teorema de Bèzout que estas rectas son distintas y no concurrentes. Sea $\tau : \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ una transformación proyectiva tal que $\tau(A) = (x = 0)$, $\tau(B) = (y = 0)$, $\tau(C) = (z = 0)$. Se puede elegir τ de manera que $\tau(q_2) = (1 : 0 : 1)$. Resulta entonces $\tau(q_1) = (0 : 0 : 1)$, $\tau(p) = (0 : 1 : 0)$, $\tau(A \cap C) = (1 : 0 : 0)$. Como τ envia tangentes en tangentes, la cúbica $G = \tau^{-1}.F$ satisface las hipótesis de (7.5.2) y por lo tanto $G = zy^2 - cx(x - z)(x - tz)$, para ciertos $c \in K - \{0\}$ y $t \in K - \{0, 1\}$. La transformación $(x, y, z) \mapsto (x, \sqrt{c}y, z)$ permite eliminar c, reduciendo G a forma de Weierstrass, como queríamos demostrar. Observemos que necesariamente $\tau(q_3) = (t : 0 : 1)$, de manera que resulta que los puntos q_1, q_2, q_3 de (7.4.17) estan alineados.

(7.5.5) **Proposición:** Dos cúbicas no singulares en forma de Weierstrass F_s, F_t son proyectivamente equivalentes si y solo si

$$s \in \{t,\ 1/t,\ 1 - t,\ 1/(1 - t),\ t/(t - 1),\ (t - 1)/t\}$$

Demostración: Si la condicion se satisface, existe (ver (7.3)) una transformación proyectiva $\sigma : \mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^1(K)$ tal que $\sigma(1 : 0) = (1 : 0)$ y

$$\sigma\{(0 : 1), (1 : 1), (s : 1)\} = \{(0 : 1), (1 : 1), (t : 1)\}$$

Escribamos $\sigma(x, z) = (ax + bz, z)$. Entonces la transformación $\tilde{\sigma} : \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ tal que $\tilde{\sigma}(x, y, z) = (ax + bz, y, z)$ satisface

$$\tilde{\sigma}(0 : 1 : 0) = (0 : 1 : 0), \quad \tilde{\sigma}(1 : 1 : 0) = (1 : 1 : 0)$$
$$\tilde{\sigma}\{(0 : 1 : 1), (1 : 1 : 1), (s : 1 : 1)\} = \{(0 : 1 : 1), (1 : 1 : 1), (t : 1 : 1)\}$$

Resulta $F_s = \tilde{\sigma}.F_t$ (utilizando (7.5.2) o por cálculo directo).

Recíprocamente, supongamos que existe una transformación proyectiva τ tal que $F_s = \tau.F_t$. Si $\tau(p) = p$, con $p = (0:1:0)$, entonces es fácil terminar la demostración. En efecto, en este caso τ debe preservar los puntos de tangencia respecto a p (ver (7.4.17)), o sea, se verifica

$$\tau\{(0:1:1),(1:1:1),(s:1:1)\} = \{(0:1:1),(1:1:1),(t:1:1)\}$$

La restricción $\tau|$ de τ a la recta $(y=0)$ es una transformación proyectiva $\mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^1(K)$ que satisface

$$\tau|\{(0:1),(1:1),(1:0),(s:1)\} = \{(0:1),(1:1),(1:0),(t:1)\}$$

El resultado sigue de (7.3.20).

Ahora es suficiente con demostrar que si existe τ tal que $F_s = \tau.F_t$ entonces también existe τ' tal que $F_s = \tau'.F_t$ y $\tau'(p) = p$. Como $p_1 = \tau(p)$ es punto de inflexión de F_t, basta con demostrar la siguiente Proposición (tomando $\tau' = \mu \circ \tau$):

(7.5.6) **Proposición:** Dados dos puntos de inflexión p_1, p_2 de una cúbica no singular $X = \mathcal{V}(F)$, existe una trasformación proyectiva $\mu : \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ tal que $\mu(X) = X$ y $\mu(p_1) = p_2$. En otras palabras, el grupo de transformaciones proyectivas que preservan X actúa transitivamente en el conjunto de sus nueve puntos de inflexión.

Demostración: Supongamos que $X = \mathcal{V}(F_t)$ es una cúbica en forma de Weierstrass. Consideremos $\sigma : \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ dada por $\sigma(x,y,z) = (x,-y,z)$ (simetría respecto de la recta $(y=0)$). Como $\sigma(X) = X$, σ actúa en el conjunto de los puntos de inflexión de X. Denotando $p = (0:1:0)$, tenemos que $\sigma(p) = p$. Además, si $p_1 = (a:b:1)$ es un punto de inflexión distinto de p entonces $\sigma(p_1) = (a:-b:1)$ también es punto de inflexión. Vemos que el conjunto de los nueve puntos de inflexión se puede escribir

$$\{p, p_1, \sigma(p_1), p_2, \sigma(p_2), p_3, \sigma(p_3), p_4, \sigma(p_4)\}$$

En particular, la recta $\overline{pp_i}$ que une estos dos puntos de inflexión contiene $\sigma(p_i)$, otro punto de inflexión. Más en general, Sea X una cúbica no singular y sean $p, p' \in X$ dos puntos de inflexión. Entonces la recta $\overline{pp'}$ contiene un tercer punto de inflexión $p'' \in X$.

En efecto, utilicemos p (o p') para reducir X a forma de Weierstrass, como en (7.5.4). La afirmación resulta entonces de lo anterior.

Ahora, sean $p_1, p_2 \in X$ dos puntos de inflexión. Sea $p \in \overline{p_1p_2} \cap X$ el tercer punto de inflexión determinado por p_1, p_2. Reduzcamos X a forma de Weierstrass utilizando p. Es claro ahora que existe una transformación proyectiva σ (simetría respecto a una recta) tal que $\sigma(p) = p$ y $\sigma(p_1) = p_2$, como queríamos demostrar.

Las Proposiciones (7.5.4) y (7.5.5) constituyen una respuesta satisfactoria al problema de clasificación de cúbicas no singulares. Puede ser útil formular el resultado obtenido de la manera siguiente.

Consideremos pares ordenados $(p, \{L_1, L_2, L_3, L_4\})$ donde $p \in \mathbb{P}^2(K)$ y cada $L_i \subset \mathbb{P}^2(K)$ es una recta que contiene p. Suponemos que las rectas L_i son distintas. Sea $\mathcal{Q}$ el conjunto de todos tales objetos. El grupo $G = \mathrm{PGL}(3, K)$ de automorfismos de $\mathbb{P}^2(K)$ actúa en $\mathcal{Q}$ via

$$\tau.(p, \{L_1, L_2, L_3, L_4\}) = (\tau(p), \tau(\{L_1, L_2, L_3, L_4\}))$$

Tratemos la cuestión de la clasificación proyectiva de estas cuaternas de rectas concurrentes. Afirmamos que este problema es equivalente a la clasificación proyectiva de cuatro puntos en $\mathbb{P}^1(K)$. En efecto, definamos el invariante $\jmath$ de una cuaterna y veamos que dos cuaternas son equivalentes si y solo si tienen el mismo invariante $\jmath$.

En (7.3.23) habíamos definido el invariante $\jmath$ de cuatro puntos no ordenados en la recta proyectiva standard $\mathbb{P}^1(K)$ como

$$\jmath\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \jmath(\lambda(p_1, p_2, p_3, p_4))$$

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión dos. Sean $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}(V)$ cuatro puntos no ordenados. Definimos

$$\jmath\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \jmath\{f(p_1), f(p_2), f(p_3), f(p_4)\}$$

donde $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^1(K)$ es un isomorfismo lineal. La propiedad de invariancia de $\jmath$ en el caso de $\mathbb{P}^1(K)$ implica que $\jmath\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ no depende del isomorfismo f elegido.

Sea ahora U un K-espacio vectorial de dimensión tres y $p \in \mathbb{P}(U)$ un punto (o sea, $p \subset U$ es un subespacio lineal de dimensión uno). Una recta $L \subset \mathbb{P}(U)$ que contiene p es lo mismo que un subespacio lineal $L \subset U$ de dimensión dos tal que $p \subset U$. Sea V el espacio vectorial cociente $V = U/p$. Las mencionadas rectas L estan en correspondencia biyectiva natural con los puntos de $\mathbb{P}(V)$. Una cuaterna de rectas concurrentes $(p, \{L_1, L_2, L_3, L_4\})$ corresponde entonces a cuatro puntos de $\mathbb{P}(K^3/p)$ y es claro entonces el significado de $\jmath(p, \{L_1, L_2, L_3, L_4\})$. Dejamos al lector el demostrar que dos cuaternas son proyectivamente equivalentes si y solo si tienen el mismo $\jmath$.

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las cúbicas no singulares en $\mathbb{P}^2(K)$ y sea $\mathcal{C}_*$ el conjunto de todos los pares (X, p) donde X es una cúbica no singular y $p \in X$ es un punto de inflexión. Consideremos la aplicación

$$\alpha : \mathcal{C}_* \to \mathcal{C}$$

tal que $\alpha(X, p) = X$. Notar que $|\alpha^{-1}(X)| = 9$ para todo $X \in \mathcal{C}$. El grupo G actúa en $\mathcal{C}_*$ y en $\mathcal{C}$. Como α es compatible con las acciones, tenemos una aplicación inducida entre conjuntos cociente

$$\tilde{\alpha} : \mathcal{C}_*/G \to \mathcal{C}/G$$

Resulta de (7.5.6) que $\tilde{\alpha}$ es biyectiva.

Por otra parte, tenemos la aplicación

$$\beta : \mathcal{C}_* \to \mathcal{Q}$$

tal que $\beta(X, p) = (p, \{T_X(p), T_X(q_1), T_X(q_2), T_X(q_3)\})$ donde los q_i son como en (7.4.17). Claramente β es compatible con las acciones y por lo tanto induce una aplicación entre conjuntos cociente

$$\tilde{\beta} : \mathcal{C}_*/G \to \mathcal{Q}/G$$

Combinando (7.5.4) y (7.5.5) resulta que $\tilde{\beta}$ es biyectiva.

La situación se puede resumir mediante el siguiente diagrama de biyecciones

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}_*/G & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \mathcal{Q}/G \\
{\scriptstyle\tilde{\alpha}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\jmath} \\
\mathcal{C}/G & & K
\end{array}$$

La clasificación de cúbicas proyectivas planas que hemos realizado es solamente un primer paso en su estudio detallado. Para la estructura de grupo de una cúbica, su parametrización mediante funciones elípticas, superficies cúbicas y otros interesantes tópicos el lector puede consultar los libros [C], [Go], [Ha1], [La], [M], [Gr], [Ma].

Ejercicios

1) Demostrar que las secciones planas de un cono (intersección del cono con distintos planos) en $\mathbb{R}^3$ son cónicas. Interpretar la clasificación de las cónicas en términos de la posición del plano utilizado.

2) Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ y un número real positivo a sea

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,p) + d(x,q) = 2a\}$$

con $d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. Demostrar que X es una elipse. Los puntos p y q son llamados "focos". Ver que el punto medio entre los focos es el centro de la elipse. Toda elipse puede obtenerse por esta construcción.

3) Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ y un número real positivo a sea

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,p) - d(x,q) = 2a\}$$

Probar que X es una hipérbola y que toda hipérbola se puede obtener de esta forma.

4) Mostrar que dada una elipse que refleje como un espejo los rayos de luz en el plano, los rayos emitidos desde un foco pasan, luego de reflejarse, por el otro foco.

5) Para $p \in \mathbb{R}^2$ y $L \subset \mathbb{R}^2$ una recta que no contiene a p, sea

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,p) = d(x,L)\}$$

Probar que X es una parábola. Toda parábola se obtiene de esta forma. El punto p se llama el foco de la parábola y la recta L su eje. Una parábola que refleja la luz concentra en el foco los rayos de dirección perpendicular a su eje provenientes del semiespacio que contiene al foco.

6) Escribir al azar la ecuación de varias cónicas. Realizar su clasificación afín y ortogonal. En cada caso graficar en el sistema de coordenadas original.

7) (proyección estereografica generalizada) Sea $Q = (F = 0) \subset \mathbb{R}^n$ una

cuádrica no singular. Elijamos un punto $p \in Q$ y un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ que no contiene a p. Definimos $\pi : Q - \{p\} \to H$ por $\pi(x) = \overline{xp} \cap H$, donde $\overline{xp}$ denota la recta que pasa por x y p. En realidad, esta relación no es necesariamente una función, ya que para algunos $x \in Q - \{p\}$ puede ser que $\overline{xp} \cap H = \emptyset$.
Escribir una formula para $\pi(x)$.
Determinar el dominio, imagen y región de inyectividad de π.
Calcular su inversa en donde tenga sentido.
Se sugiere comenzar por los casos $n = 2$ y $n = 3$. Puede ser útil considerar primero las formas canónicas.

8) La curva en $\mathbb{R}^2$ definida en coordenadas polares por la condición $r = a\cos^3(\theta/3)$ es una curva algebraica de grado seis con ecuación

$$4(x^2 + y^2 - ax)^3 = 27a^2(x^2 + y^2)^2$$

9) Demostrar que las curvas en $\mathbb{R}^2$ dadas paramétricamente por

$$x(t) = a\mathrm{sen}(nt + d), \;\; y(t) = b\mathrm{sen}(t)$$

(curvas de Lissajous) son algebraicas si n es un número racional. En este caso, demostrar también que son curvas algebraicas racionales (vale decir, parametrizables mediante funciones racionales)

10) Sean F, $G \in k[x_0, \ldots, x_n]$ dos polinomios homogéneos de grado r y $r + 1$, sin factores comunes. Probar que $F + G$ es un polinomio irreducible.

12) Verificar que si n es par, las cuádricas en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ contienen subespacios lineales de dimensión proyectiva $n/2 - 1$. Si n es impar, contienen subespacios de dimensión proyectiva $(n - 1)/2$.

13) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{C}$ de modo que la curva proyectiva dada por la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + \alpha(x + y + z)^3 = 0$$

tenga al menos un punto singular. Hallar los puntos singulares para cada α hallado. Hallar los α para los cuales la curva se descompone como unión de tres rectas.

14) Mostrar que para cada $d > 0$ existen curvas proyectivas no singulares

de grado d.

15) Demostrar que una curva algebraica $X \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de grado d tiene un punto singular p de multiplicidad d si y sólo si X consiste de d rectas por p.

16) Demostrar el teorema de Bèzout en el caso en que una de las curvas es una recta.

17) Sea $f(x, y) = y - g(x)$ con g un polinomio complejo de grado d, y sea $X = (f = 0) \subset \mathbb{C}^2$ la curva afín definida por f. Si $H_a = (y - a = 0)$ es una recta horizontal, probar que el número total de intersecciones (contadas con multiplicidad) $X \cap H_a$ es igual a d. Si $V_a = (x - a = 0)$ es una recta vertical, el número total de intersecciones $X \cap V_a$ es igual a 1. Cómo se concilia esto con el teorema de Bèzout ?

18) Sea X el conjunto de polinomios reales de grados dos en n variables, provisto de la acción usual del grupo afín $G = A(n, \mathbb{R})$. Las órbitas de la acción de G en X corresponden a las formas canónicas del Teorema (2.7). Para cada órbita $A \subset X$ determinar cuáles son las órbitas $B \subset X$ tales que B está contenido en la clausura de A (o sea, las cuádricas de tipo B son límite de cuádricas de tipo A, o como también se dice, las cuádricas de tipo A degeneran en cuádricas de tipo B).

References

[**A**] T. Apostol, *Calculus, vol. 1, 2.*

[**Ba**] H. F. Baker, *Principles of Geometry, 6 vols.*, Cambridge Univ. Press, 1933.

[**Bl**] Blumenthal, *A modern view of Geometry*, Dover.

[**B**] Brieskorn, *Plane Algebraic Curves*, Birkhauser.

[**C**] H. Cartan, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Dover.

[**E**] N. Efimov, *Geometrie Superieure*, MIR.

[**E-Ch**] F. Enriques - O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, 3 vols.*, Zanichelli, Bologna, 1924.

[**F**] W. Fulton, *Algebraic Curves*, Springer.

[**G**] I. Gelfand, *Lectures on Linear Algebra.*

[**Go**] E. Goursat, *Cours dAnalyse Mathematique.*

[**Gr**] J. Gray, *Linear Differential Equations and Group Theory, from Riemann to Poincare*, Birkhauser.

[**H**] J. Harris, *Algebraic Geometry*, Springer.

[**Ha1**] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer.

[**Ha2**] R. Hartshorne, *Projective Geometry*, Benjamin.

[**La**] S. Lang, *Elliptic functions*, Springer.

[**Ma**] Y. Manin, *Cubic Forms: algebra, arithmetic and geometry.*

[**M**] D. Mumford, *Complex Projective Varieties*, Springer.

[**Sa**] G. Salmon, *Analytic Geometry of Three Dimensions*, Chelsea, 1914.

[**Sa2**] G. Salmon, *Higher Plane Curves*, Dublin, 1873.

[**S1**] L. Santalo, *Geometría Proyectiva*, EUDEBA.

[**S2**] L. Santalo, *Geometrías no Euclideanas*, EUDEBA.

[**SR**] J. G. Semple-L. Roth, *Introduction to Algebraic Geometry*, Oxford Univ. Press.

[**St**] D. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover.

[**W**] R. Walker, *Algebraic Curves*, Springer.

[**Wa**] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer.

[**ZS**] O. Zariski - P. Samuel, *Commutative Algebra, vol. 1, 2*, Springer.

Departamento de Matemática, FCEyN-UBA, Ciudad Universitaria

(1428) Buenos Aires, ARGENTINA

E-mail address: `fcukier@dm.uba.ar`