

Álgebra II

PRIMER CUATRIMESTRE 2005

PRÁCTICA 3 (CONTINUACIÓN)

- 19) Sea A un anillo. Denotamos $S = \{a \in M(n \times n, A) \mid t(a) = a\}$ el submódulo de matrices simétricas ($t(a)_{ij} = a_{ji}$) y $T = \{a \in M(n \times n, A) \mid t(a) = -a\}$ el submódulo de matrices anti-simétricas. Verificar que si $2 \in A$ es una unidad entonces $M(n \times n, A) \cong S \oplus T$.
- 20) Sea A un anillo y M un A -módulo. Si $S \subset M$ genera M , decimos que S es un sistema de generadores minimal si ningun subconjunto propio de S genera M .
- a) Probar que un módulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal.
 - b) Consideramos \mathbb{Z} como \mathbb{Z} -módulo. Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe en \mathbb{Z} un sistema de generadores minimal con n elementos.
 - c) \mathbb{Q} , visto como \mathbb{Z} -módulo, no posee un sistema de generadores minimal.
 - d) Si A es un cuerpo y M es un A -módulo entonces $S \subset M$ es un sistema de generadores minimal sii S es una base de M . Todo A -módulo M posee una base, y todas las bases de M tienen la misma cardinalidad.
- 21) Sea A un anillo y M un A -módulo. M se dice localmente cíclico si todo submódulo de M de tipo finito es cíclico.
- a) Si M es localmente cíclico, todo submódulo de M es localmente cíclico.
 - b) Sea $f : M \rightarrow N$ un epimorfismo de A -módulos. Si M es localmente cíclico entonces también lo es N .
 - c) Si A es un dominio de ideales principales y K es el cuerpo de fracciones de A entonces K y K/A son A -módulos localmente cíclicos.
 - d) \mathbb{Q} y \mathbb{Q}/\mathbb{Z} son grupos abelianos localmente cíclicos, pero no son de tipo finito.
- 22) Sea G un grupo y $x \in G$. Se llama orden de x , denotado $\text{ord}(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, al cardinal del subgrupo generado por x .
- a) Son validas las proposiciones:
 - I) Si x genera G entonces $\text{ord}(x) = |G|$. La recíproca vale si G es un grupo finito.
 - II) Si G es un grupo finito entonces $\text{ord}(x)$ es un divisor de $|G|$.
 - b) Si $n \in \mathbb{N}$, son equivalentes:
 - I) $\text{ord}(x) = n$
 - II) $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_n$
 - III) Si $e_x : \mathbb{Z} \rightarrow G$ es la expansión asociada a x ($e_x(m) = x^m$) entonces $\ker(e_x) = n\mathbb{Z}$.
 - IV) para $m \in \mathbb{Z}$, $x^m = 1$ sii n divide a m .

- v) para $r, s \in \mathbb{Z}$, $x^r = x^s$ sii r y s son congruentes módulo n .
 - vi) $x^n = 1$ y los elementos x^j , $j = 0, 1, \dots, n-1$ son distintos.
 - vii) $n = \min\{r \in \mathbb{N} / x^r = 1\}$
 - c) Son equivalentes:
 - i) $\text{ord}(x) = \infty$.
 - ii) $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$.
 - iii) Si $e_x : \mathbb{Z} \rightarrow G$ es la expansión asociada a x entonces $\ker(e_x) = 0$.
 - iv) para $m \in \mathbb{Z}$, $x^m = 1$ sii $m = 0$.
- 23) Sea G un grupo y sea $x \in G$.
- a) Si G es finito de orden n entonces $x^n = 1$.
 - b) Si $\text{ord}(x) = n$ y $m \in \mathbb{N}$ entonces $\text{ord}(x^m) = n/(m : n)$. En particular, si m y n son coprimos, $\text{ord}(x^m) = \text{ord}(x)$.
 - c) Si G es cíclico de orden n y x, y son generadores de G entonces existe m coprimo con n tal que $y = x^m$.
 - d) Sea $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la función de Euler, definida por

$$\varphi(n) = \text{cardinal}\{m \in \mathbb{N} / m \leq n, (m : n) = 1\}$$
- Probar que el número de generadores de un grupo cíclico de orden n es $\varphi(n)$.
- 24) Sea G un grupo abeliano finito. Se llama exponente de G al número natural $\exp(G)$ máximo de los ordenes de elementos de G .
- a) Si $\text{ord}(x) = n$, $\text{ord}(y) = m$ y $(n : m) = 1$ entonces $\text{ord}(xy) = nm$.
 - b) Si $\text{ord}(x) = n$, $\text{ord}(y) = m$ entonces existe $z \in G$ tal que $\text{ord}(z) = [n : m]$.
 - c) Se verifica:
 - i) $\exp(G)$ es un divisor de $|G|$.
 - ii) G es cíclico sii $\exp(G) = |G|$.
 - iii) $\text{ord}(x)$ es un divisor de $\exp(G)$ para todo $x \in G$.
 - iv) Si K es un cuerpo finito entonces $G = (K - \{0\}, \cdot)$ es un grupo cíclico.
 Sug.: Todo elemento de $K - \{0\}$ es raíz del polinomio $X^e - 1 \in K[X]$ con $e = \exp(G)$.
- 25) Sea G un grupo abeliano y $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Se dice que G es un grupo p -cuasícíclico (o un grupo tipo p^∞) si todo subgrupo de G es cíclico de orden una potencia de p y G es infinito.
- a) G es p -cuasícíclico si y sólo si existe una familia de subgrupos $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de G tal que:
 - i) G_n es un grupo cíclico de orden p^n .
 - ii) $G_n \subset G_{n+1}$ para todo n .
 - iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = G$.

- b) G es p -cuasicíclico si y sólo si admite un sistema de generadores $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:
- i) $g_1 \neq 0$ y $p \cdot g_1 = 0$.
 - ii) $p \cdot g_{n+1} = g_n$ para todo $n \geq 1$.
- c) Unicidad: dos grupos p -cuasicíclicos son isomorfos.
- d) Existencia: sea $S_p \subset \mathbb{Q}$ el subgrupo definido por $S_p = \{m/p^n, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. El grupo cociente $\mathbb{Z}_{p^\infty} = S_p/\mathbb{Z}$ es p -cuasicíclico.
- e) Todo homomorfismo no nulo entre grupos p -cuasicíclicos es un epimorfismo.
- f) Un grupo p -cuasicíclico es localmente cíclico.
- g) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^n}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \cong \mathbb{Z}_{p^n}$.
- h) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{q^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) = 0$, ($p \neq q$).
- 26) Probar que los grupos siguientes no son finitamente generados:
- $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*, \mathbb{S}^1, \mathbb{Q}_{>0}, \mathbb{R}_{>0}$.
- 27) a) Encontrar sistemas de generadores (lo más chicos posibles) de los grupos:
 $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^*, (\mathbb{Q}^*)^2, \mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q} / p \text{ no divide } b\}$ (p primo).
- b) Encontrar sistemas de generadores (lo más chicos posibles) de $K[x]/\langle f \rangle$ (K cuerpo, $f \in K[x]$) como A -módulo, para $A = K$, $A = K[x]$ y $A = K[x]/\langle f \rangle$.
- 28) a) Probar que $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ sii $(m : n) = 1$.
- b) Encontrar los sumandos directos de \mathbb{Z}_n ; determinar en cada caso un suplemento.
- c) Determinar los submódulos cíclicos $\langle (a, b) \rangle$ de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ que son sumandos directos.
- 29) Establecer isomorfismos de grupos:
- a) $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}_{>0}$.
 - b) $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.
 - c) $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{S}^1 \oplus \mathbb{R}_{>0}$.
 - d) $\mathbb{R}^* \cong G_2 \oplus \mathbb{R}_{>0}$.
 - e) $\mathbb{Q}^* \cong G_2 \oplus \mathbb{Q}_{>0} \cong G_2 \oplus \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$.
- 30) Probar que no existen epimorfismos de grupo en los siguientes casos:
- a) $\mathbb{Z}_{p^\infty} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$
 - b) $\mathbb{Z}_{n^2} \rightarrow \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$
 - c) $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$
 - d) $\mathbb{C}^* \rightarrow G_n$
- 31) Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de A -módulos. Probar:
- a) f es sección lineal sii f es inyectiva e $\text{im}(f)$ es un sumando directo de N .
 - b) f es retracción lineal sii f es sobreyectiva y $\ker(f)$ es un sumando directo de M .

- 32) Probar que los siguientes grupos son indescomponibles: \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z}_{p^∞} , \mathbb{Z}_{p^n} .
- 33) a) Sea A un anillo, M un A -módulo y $J \subset A$ un ideal bilatero tal que $J.M = \{0\}$ (es decir, J está contenido en el anulador de M). Probar que M posee una única estructura de A/J -módulo tal que es conmutativo el diagrama
- b) Si M y N están en las condiciones de a), probar que

$$\text{Hom}_A(M, N) = \text{Hom}_{A/J}(M, N)$$

Calcular $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_{12}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4)$