

# Álgebra II

## PRIMER CUATRIMESTRE 2005

### PRÁCTICA 1

- 1) Sea  $X$  un conjunto con una operación interna  $*$  :  $X \times X \rightarrow X$ . Para  $x_i \in X$  definimos inductivamente

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 * \cdots * x_n = (x_1 * \cdots * x_{n-1}) * x_n$$

Demostrar que si  $*$  es asociativa entonces vale

$$\prod_{i=1}^n x_i = \left( \prod_{i=1}^m x_i \right) * \left( \prod_{i=m+1}^n x_i \right)$$

para todo  $m \leq n$ . Deducir que en un producto se pueden insertar paréntesis de cualquier manera, sin alterar el resultado.

- 2) Con la notación de 1), supongamos que  $*$  es asociativa y conmutativa. Demostrar que para toda biyección  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  vale

$$x_1 * \cdots * x_n = x_{\sigma(1)} * \cdots * x_{\sigma(n)}$$

Sea  $J$  un conjunto finito y  $x : J \rightarrow X$  una función (también escrita  $(x_j)_{j \in J}$ , pensada como familia de elementos de  $X$  parametrizada por el conjunto de índices  $J$ ). Si  $*$  es asociativa y conmutativa, darle sentido a la expresión  $\prod_{j \in J} x_j$ .

- 3) Sea  $S$  el sub-semigrupo de  $(\mathbb{N}, +)$  generado por  $\{2, 3\}$ . Verificar que  $\mathbb{N} = S \cup \{1\}$ .
- 4) Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , denotemos  $\mathbb{N}_{\geq m} = \{n \in \mathbb{N} / n \geq m\} \cup \{0\}$ , que es un sub-semigrupo de  $(\mathbb{N}, +)$ . Encontrar un conjunto finito de generadores de  $\mathbb{N}_m$ .
- 5) Sea  $X$  un conjunto y  $X^X$  el conjunto de todas las funciones  $X \rightarrow X$ . Si  $\circ$  denota composición de funciones entonces  $(X^X, \circ)$  es un semigrupo. El grupo de unidades  $\mathbb{S}(X) := U(X^X, \circ)$ , consistente de las funciones  $X \rightarrow X$  biyectivas, se denomina grupo simétrico de  $X$ .

Sea  $(X, *)$  un monoide. Verificar que el conjunto  $\text{End}(X, *)$  de endomorfismos de monoide es un sub-semigrupo de  $X^X$ . El conjunto  $\text{Aut}(X, *) = U(\text{End}(X, *)) = \text{End}(X, *) \cap \mathbb{S}(X)$  de automorfismos de monoide, es un subgrupo de  $\mathbb{S}(X)$ .

- 6) Dibujar algunos sub-semigrupos de  $(\mathbb{R}^n, +)$ , ( $n = 1, 2, 3$ ). Se sugiere considerar conos convexos  $C \subset \mathbb{R}^n$ . Intersecando con sub-semigrupos discretos como  $\mathbb{N}^n$  o  $\mathbb{Z}^n$  se obtienen ejemplos discretos.
- 7) Sea  $A$  el semigrupo  $(\mathbb{N} - \{0\}, \cdot)$  y  $B = (\mathbb{N}, +)$ . Demostrar que existe un isomorfismo de semigrupos  $A \cong B^{(\mathbb{N})}$ .

Sugerencia: usar la descomposición de un número natural como producto de factores primos.

- 8) a) Sea  $X$  un conjunto y  $P(X)$  el conjunto de partes de  $X$ . Verificar que  $(P(X), \cup)$  y  $(P(X), \cap)$  son semigrupos y que  $c : (P(X), \cup) \rightarrow (P(X), \cap)$  definido por  $c(Y) = X - Y$  es un isomorfismo de semigrupos. Determinar los grupos de unidades de estos semigrupos.
- b) Sea  $Y \subset X$  un subconjunto. Verificar que  $(P(Y), \cap)$  es un submonoide de  $(P(X), \cap)$ , pero no es un sub-semigrupo (a menos que  $Y = X$ ).
- 9) El grupo simétrico  $\mathbb{S}_3 := \mathbb{S}(\{1, 2, 3\})$  es no conmutativo y posee exactamente 6 subgrupos, de los cuales 3 son normales.
- 10) a) Probar que todo grupo de orden  $\leq 5$  es abeliano. Describir las posibles estructuras.
- b) Existen dos grupos de orden 4 no isomorfos.
- 11) Sea  $G$  un grupo cíclico. Demostrar que  $G$  es abeliano y que todo subgrupo de  $G$  también es cíclico.
- 12) Sea  $G$  un grupo. Para  $x, y \in G$ , el elemento  $[x, y] := x.y.x^{-1}.y^{-1} = (x.y).(y.x)^{-1}$  se llama conmutador de  $(x, y)$ . Denotamos  $[G, G] \subset G$  el subgrupo generado por todos los conmutadores. Verificar que  $[G, G]$  es un subgrupo normal y que  $G/[G, G]$  es abeliano. Demostrar que todo morfismo de  $G$  en un grupo abeliano se factoriza unívocamente a través de  $G/[G, G]$ .
- 13) a) Sea  $G$  un grupo. Se define el centro de  $G$  como  $Z(G) = \{g \in G / g.x = x.g \ \forall x \in G\}$ . Verificar que  $Z(G)$  es un subgrupo normal de  $G$ .
- b) Determinar el centro del grupo  $GL(n, K)$  de matrices inversibles de  $n \times n$  sobre el cuerpo  $K$ , del grupo de matrices inversibles triangulares superiores  $T(n, K)$  y del grupo simétrico  $\mathbb{S}_n$ .
- 14) Sea  $G$  un grupo y  $\text{Aut}(G)$  el grupo de automorfismos de  $G$  (ver ejercicio 5). Para cada  $g \in G$  se define la conjugación por  $g$ ,  $c_g : G \rightarrow G$ , como  $c_g(x) = g.x.g^{-1}$ . Verificar que:
- a)  $c_g \in \text{Aut}(G)$  (un automorfismo de la forma  $c_g$  se denomina automorfismo interior)
- b) la aplicación  $c : G \rightarrow \text{Aut}(G)$  tal que  $c(g) = c_g$  es un morfismo de grupos.
- c)  $\ker(c) = Z(G)$ . Deducir que el grupo de automorfismos interiores es isomorfo a  $G/Z(G)$ .
- d) si  $g \in G$  y  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  entonces  $\varphi \circ c_g \circ \varphi^{-1} = c_{\varphi(g)}$ . Deducir que  $\text{im}(c)$  es un subgrupo normal de  $\text{Aut}(G)$ . El grupo  $\text{Aut}(G)/\text{im}(c)$  de “automorfismos exteriores” es un interesante invariante de  $G$ .
- Comentario: a veces se utiliza la notación  $g^{-1}.x.g = x^g$ , de manera que a) se escribe  $(x.y)^g = x^g.y^g$ , mientras que b) dice  $(x^g)^h = x^{g.h}$ .
- 15) Sea  $G$  un grupo y  $K \subset H$  subgrupos de  $G$ . Si  $K$  es normal en  $H$  y  $H$  es normal en  $G$ , ¿es cierto que  $K$  es normal en  $G$ ?

- 16) Si  $H$  y  $K$  son subgrupos propios de un grupo  $G$  entonces  $H \cup K \neq G$ . ¿Es válido lo mismo para tres subgrupos propios?
- 17) Dar contraejemplos a la siguiente afirmación: “Si  $H$  y  $K$  son subgrupos de  $G$  entonces  $H.K$  es un subgrupo de  $G$ ”. Probar que  $H.K$  es un subgrupo si y sólo si,  $H.K = K.H$  (Definición:  $H.K = \{h.k/h \in H, k \in K\}$ ).
- 18) Sea  $G$  un grupo finito con  $|G| = n$  elementos. Se sabe (teorema de Lagrange) que si  $H$  es un subgrupo de  $G$  entonces  $|H|$  es un divisor de  $n$ . ¿Vale la recíproca? Es decir, si  $m$  es un divisor de  $n$ , ¿existe un subgrupo  $H \subset G$  tal que  $|H| = m$ ? Demostrar que la respuesta es afirmativa si  $G$  es cíclico, pero negativa en general.
- 19) Si  $H$  y  $K$  son subgrupos normales de  $G$  entonces existe un monomorfismo (natural)

$$f : G/(H \cap K) \rightarrow G/H \times G/K$$

Considerar también el caso de tres o más subgrupos.

- 20) Si  $H$  es un subgrupo de  $G$  de índice 2 entonces  $H$  es normal.
- 21) Sea  $O(n, \mathbb{R})$  el grupo de transformaciones lineales  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que preservan distancia (una tal transformación corresponde a una matriz  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  tal que  $A.A^t = I$ ). Para cada subconjunto  $P \subset \mathbb{R}^n$  definimos los grupos  $O(P) = \{A \in O(n, \mathbb{R})/A(P) = P\}$  y  $SO(P) = \{A \in O(n, \mathbb{R})/A(P) = P, \text{ y } \det(A) = 1\}$ .  
Sea  $P \subset \mathbb{R}^3$  un tetraedro regular. Demostrar que  $O(P)$  es isomorfo al grupo simétrico  $S_4$  y que  $SO(P)$  es isomorfo al grupo alternado  $A_4$ .  
Sugerencia: Ver [O], pag. 7, y considerar la acción de  $O(P)$  sobre los vértices de  $P$ .
- 22) Sea  $H$  un subgrupo normal de  $G$ . Para que  $G$  sea isomorfo a  $H \times G/H$  es necesario y suficiente que el morfismo de inclusión  $H \rightarrow G$  sea una sección.
- 23) Sea  $G$  un grupo. Decidir cuáles de las siguientes propiedades son verdaderas y cuáles falsas. Justificar.
- $a^n.b^n = (a.b)^n, n \in \mathbb{N}$
  - $(a.b.a^{-1})^n = a.b^n.a^{-1}$
  - Si  $a^2 = e$  y  $b^2 = e$  entonces  $(a.b)^2 = e$ .

- 24) Probar que un grupo de orden 30 tiene a lo sumo 7 subgrupos de orden 5.
- 25) Si  $G$  es un grupo tal que  $g^2 = e$  para todo  $g \in G$  entonces  $G$  es conmutativo.
- 26) Probar que:
- Si  $H$  es un subgrupo de  $\mathbb{Z}$  entonces existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $H = n\mathbb{Z}$ .
  - Si  $H$  es un subgrupo discreto de  $\mathbb{R}$  entonces existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $H = x\mathbb{Z}$ .
  - Si  $H$  es un subgrupo finito de  $\mathbb{C}^*$  entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $H = G_n$  (raíces  $n$ -ésimas de 1).

- 27) Calcular  $[G, G]$  (Ej. 12) en los siguientes casos:

- a)  $G = SL(2, \mathbb{R})$
  - b)  $G = GL(2, \mathbb{R})$
  - c)  $G = D_n$  (grupo dihedral).
  - d)  $G = \mathbb{S}_n$
- 28) Si  $G$  es un conjunto y  $K$  un grupo sea  $K^G$  el conjunto de funciones  $G \rightarrow K$  con estructura de grupo dada por  $(\alpha * \beta)(g) = \alpha(g) \cdot \beta(g)$ ,  $g \in G$ . Si  $G$  es también un grupo, sea  $\text{Hom}(G, K) \subset K^G$  el conjunto de morfismos de grupo. Verificar que si  $K$  es conmutativo entonces  $\text{Hom}(G, K)$  es estable, y por lo tanto hereda una estructura de grupo. Calcular:
- a)  $\text{Hom}(D_n, \mathbb{Z})$
  - b)  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, D_n)$
  - c)  $\text{Hom}(D_3, D_3)$
  - d)  $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$
  - e)  $\text{Hom}(\mathbb{S}_n, G_2) = \{1, \text{sg}\}$
  - f)  $\text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$
  - g)  $\text{Hom}(G, K) = \{1\}$ , donde  $G$  y  $K$  son grupos finitos cuyos órdenes son coprimos.
  - h)  $\text{Hom}(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_m)$  (?)
- 29) *Grupo simétrico.*
- a) Sea  $\sigma = (1, 2, \dots, n) \in \mathbb{S}_n$  un  $n$ -ciclo. Verificar que  $\tau \cdot \sigma \cdot \tau^{-1} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  para cualquier  $\tau \in \mathbb{S}_n$ . Deducir que la clase de conjugación de  $\sigma$  tiene  $(n-1)!$  elementos, y que el centralizador de  $\sigma$  es el grupo cíclico generado por  $\sigma$ .
  - b) Para  $\alpha \in \mathbb{S}_n$  consideremos la descomposición  $\alpha = \prod_{i=1}^a \alpha_i$  como producto de ciclos disjuntos, escrita de manera que las longitudes (=órdenes)  $|\alpha_i|$  verifican  $|\alpha_i| \leq |\alpha_{i+1}|$ . Decimos entonces que  $(a; |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_a|)$  es el tipo de descomposición de  $\alpha$ . Demostrar que  $\alpha, \beta \in \mathbb{S}_n$  son conjugados si y sólo si tienen el mismo tipo de descomposición.
  - c)  $\mathbb{S}_n$  es generado por las trasposiciones  $(12), (13), \dots, (1n)$ .
  - d)  $\mathbb{S}_n$  es generado por las trasposiciones  $(12), (23), \dots, (n-1, n)$ .
  - e)  $\mathbb{S}_n$  es generado por  $\{(12), (1, 2, \dots, n)\}$  (o por  $\{\tau, \sigma\}$  donde  $\tau$  es una trasposición y  $\sigma$  un  $n$ -ciclo).
  - f)  $\mathbb{A}_n$  es generado por 3-ciclos.
- 30) Sea  $G$  un grupo y  $\alpha : G \times X \rightarrow X$  una acción de  $G$  sobre un conjunto  $X$ . Se dice que  $\alpha$  es transitiva si  $\forall x, y \in X, \exists g \in G/y = g \cdot x$  (o sea, hay una sola órbita de  $G$  en  $X$ ). Para  $n \in \mathbb{N}$ , se dice que  $\alpha$  es  $n$ -transitiva si la acción sobre  $X^n$  definida por  $g \cdot (x_1, \dots, x_n) = (g \cdot x_1, \dots, g \cdot x_n)$ , es transitiva. Verificar que
- a) La acción natural de  $\mathbb{S}_n$  sobre  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  es  $n$ -transitiva, mientras que la acción de  $\mathbb{A}_n$  es  $(n-2)$ -transitiva.

- b) Sea  $V$  un espacio vectorial de dimension  $n$  sobre un cuerpo  $K$ . Describir las órbitas de las acciones de  $GL(V)$  sobre  $V$  y sobre  $V \times V$ .
- c) *Equivalencia de matrices*. Consideremos la acción de  $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R})$  sobre el conjunto de matrices  $M(n \times m, \mathbb{R})$  reales de  $n \times m$ , definida por  $(P, Q)(A) = P.A.Q^{-1}$ . Describir las órbitas de esta acción.  
Sugerencia: considerar el rango de  $A$ .
- d) *Semejanza de matrices*. Se tiene también la acción de  $GL(n, \mathbb{C})$  sobre  $M(n \times n, \mathbb{C})$  definida por  $P(A) = P.A.P^{-1}$ . Describir las órbitas.  
Sugerencia: considerar la forma de Jordan de  $A$ .
- 31) ¿Es  $\mathbb{S}_3$  producto directo de subgrupos propios?
- 32) Un grupo cíclico de orden  $r.s$  es isomorfo al producto de subgrupos cíclicos de órdenes  $r$  y  $s$  si y sólo si  $r$  y  $s$  son coprimos.
- 33) Sea  $G$  un grupo de orden  $n = a.b$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ ). Supongamos que existen subgrupos  $H \subset G$  y  $K \subset G$  de órdenes  $a$  y  $b$  respectivamente. Demostrar que si  $H \cap K = \{1\}$  entonces  $H.K = G$ . ¿Es  $G$  isomorfo al producto  $H \times K$ ?