

ALGEBRA II - PRACTICA 3 (CONTINUACION)

1er. cuatrimestre 1995

19) Sea A un anillo. Denotamos $S = \{a \in M(n \times n, A) \mid t(a) = a\}$ el submodulo de matrices simetricas ($t(a)_{ij} = a_{ji}$) y $T = \{a \in M(n \times n, A) \mid t(a) = -a\}$ el submodulo de matrices anti-simetricas. Verificar que si $2 \in A$ es una unidad entonces $M(n \times n, A) \cong S \oplus T$.

20) Sea A un anillo y M un A -modulo. Si $S \subset M$ genera M , decimos que S es un sistema de generadores minimal si ningun subconjunto propio de S genera M .

a) Probar que un modulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal.

b) Consideramos \mathbb{Z} como \mathbb{Z} -modulo. Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe en \mathbb{Z} un sistema de generadores minimal con n elementos.

c) \mathbb{Q} , visto como \mathbb{Z} -modulo, no posee un sistema de generadores minimal.

d) Si A es un cuerpo y M es un A -modulo entonces $S \subset M$ es un sistema de generadores minimal sii S es una base de M . Todo A -modulo M posee una base, y todas las bases de M tienen la misma cardinalidad.

21) Sea A un anillo y M un A -modulo. M se dice localmente ciclico si todo submodulo de M de tipo finito es ciclico.

a) Si M es localmente ciclico, todo submodulo de M es localmente ciclico.

b) Sea $f : M \rightarrow N$ un epimorfismo de A -modulos. Si M es localmente ciclico entonces tambien lo es N .

c) Si A es un dominio de ideales principales y K es el cuerpo de fracciones de A entonces K y K/A son A -modulos localmente ciclicos.

d) \mathbb{Q} y \mathbb{Q}/\mathbb{Z} son grupos abelianos localmente ciclicos, pero no son de tipo finito.

22) Sea G un grupo y $x \in G$. Se llama orden de x , denotado $\text{ord}(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, al cardinal del subgrupo generado por x .

a) Son validas las proposiciones:

i) Si x genera G entonces $\text{ord}(x) = |G|$. La reciproca vale si G es un grupo finito.

ii) Si G es un grupo finito entonces $\text{ord}(x)$ es un divisor de $|G|$.

b) Si $n \in \mathbb{N}$, son equivalentes:

i) $\text{ord}(x) = n$

ii) $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_n$

iii) Si $e_x : \mathbb{Z} \rightarrow G$ es la expansion asociada a x ($e_x(m) = x^m$) entonces $\ker(e_x) = n\mathbb{Z}$.

iv) para $m \in \mathbb{Z}$, $x^m = 1$ sii n divide a m .

v) para $r, s \in \mathbb{Z}$, $x^r = x^s$ sii r y s son congruentes modulo n .

vi) $x^n = 1$ y los elementos x^j , $j = 0, 1, \dots, n-1$ son distintos.

vii) $n = \min\{r \in \mathbb{N} / x^r = 1\}$

c) Son equivalentes:

i) $\text{ord}(x) = \infty$.

ii) $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$.

iii) Si $e_x : \mathbb{Z} \rightarrow G$ es la expansion asociada a x entonces $\ker(e_x) = 0$.

iv) para $m \in \mathbb{Z}$, $x^m = 1$ sii $m = 0$.

23) Sea G un grupo y sea $x \in G$.

a) Si G es finito de orden n entonces $x^n = 1$.

b) Si $\text{ord}(x) = n$ y $m \in \mathbb{N}$ entonces $\text{ord}(x^m) = n/(m : n)$. En particular, si m y n son coprimos, $\text{ord}(x^m) = \text{ord}(x)$.

c) Si G es ciclico de orden n y x, y son generadores de G entonces existe m coprimo con n tal que $y = x^m$.

d) Sea $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funcion de Euler, definida por

$$\varphi(n) = \text{cardinal}\{m \in \mathbb{N} / m \leq n, (m : n) = 1\}$$

Probar que el numero de generadores de un grupo ciclico de orden n es $\varphi(n)$.

24) Sea G un grupo abeliano finito. Se llama exponente de G al numero natural $\exp(G)$ maximo de los ordenes de elementos de G .

a) Si $\text{ord}(x) = n$, $\text{ord}(y) = m$ y $(n : m) = 1$ entonces $\text{ord}(xy) = nm$.

b) Si $\text{ord}(x) = n$, $\text{ord}(y) = m$ entonces existe $z \in G$ tal que $\text{ord}(z) = [n : m]$.

c) Se verifica:

i) $\exp(G)$ es un divisor de $|G|$.

ii) G es ciclico sii $\exp(G) = |G|$.

iii) $\text{ord}(x)$ es un divisor de $\exp(G)$ para todo $x \in G$.

iv) Si K es un cuerpo finito entonces $G = (K - \{0\}, \cdot)$ es un grupo ciclico.

Sug.: Todo elemento de $K - \{0\}$ es raiz del polinomio $X^e - 1 \in K[X]$ con $e = \exp(G)$.

25) Sea G un grupo abeliano y $p \in \mathbb{N}$ un numero primo. Se dice que G es un grupo p -cuasiciclico (o un grupo tipo p^∞) si todo subgrupo de G es ciclico de orden una potencia de p y G es infinito.

a) G es p -cuasiciclico si y solo si existe una familia de subgrupos $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de G tal que:

i) G_n es un grupo ciclico de orden p^n .

ii) $G_n \subset G_{n+1}$ para todo n .

iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = G$.

b) G es p -cuasiciclico si y solo si admite un sistema de generadores $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

i) $g_1 \neq 0$ y $p \cdot g_1 = 0$.

ii) $p \cdot g_{n+1} = g_n$ para todo $n \geq 1$.

c) Unicidad: dos grupos p -cuasiciclicos son isomorfos.

d) Existencia: sea $S_p \subset \mathbb{Q}$ el subgrupo definido por $S_p = \{m/p^n, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. El grupo cociente $\mathbb{Z}_{p^\infty} = S_p/\mathbb{Z}$ es p -cuasiciclico.

e) Todo homomorfismo no nulo entre grupos p -cuasiciclicos es un epimorfismo.

f) Un grupo p -cuasiciclico es localmente ciclico.

g) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^n}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \cong \mathbb{Z}_{p^n}$.

h) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{q^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) = 0, (p \neq q)$.

26) Probar que los grupos siguientes no son finitamente generados:

$\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*, \mathbb{S}^1, \mathbb{Q}_{>0}, \mathbb{R}_{>0}$.

27) a) Encontrar sistemas de generadores (lo mas chicos posibles) de los grupos:

$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^*, (\mathbb{Q}^*)^2, \mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q} / p \text{ no divide } b\}$ (p primo).

b) Encontrar sistemas de generadores (lo mas chicos posibles) de $K[x]/\langle f \rangle$ (K cuerpo, $f \in K[x]$) como A -modulo, para $A = K, A = K[x]$ y $A = K[x]/\langle f \rangle$.

28) a) Probar que $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ sii $(m : n) = 1$.

b) Encontrar los sumandos directos de \mathbb{Z}_n ; determinar en cada caso un suplemento.

c) Determinar los submodulos ciclicos $\langle (a, b) \rangle$ de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ que son sumandos directos.

29) Establecer isomorfismos de grupos:

a) $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}_{>0}$.

b) $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

c) $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{S}^1 \oplus \mathbb{R}_{>0}$.

d) $\mathbb{R}^* \cong G_2 \oplus \mathbb{R}_{>0}$.

e) $\mathbb{Q}^* \cong G_2 \oplus \mathbb{Q}_{>0} \cong G_2 \oplus \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$.

30) Probar que no existen epimorfismos de grupo en los siguientes casos:

- i) $\mathbb{Z}_{p^\infty} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$
- ii) $\mathbb{Z}_{n^2} \rightarrow \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$
- iii) $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$
- iv) $\mathbb{C}^* \rightarrow G_n$

31) Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de A -modulos. Probar:

- a) f es seccion lineal sii f es inyectiva e $\text{im}(f)$ es un sumando directo de N .
- b) f es retraccion lineal sii f es sobreyectiva y $\ker(f)$ es un sumando directo de M .

32) Probar que los siguientes grupos son indescomponibles: \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z}_{p^∞} , \mathbb{Z}_{p^n} .

33) a) Sea A un anillo, M un A -modulo y $J \subset A$ un ideal bilatero tal que $J.M = \{0\}$ (es decir, J esta contenido en el anulador de M). Probar que M posee una unica estructura de A/J -modulo tal que es conmutativo el diagrama

b) Si M y N estan en las condiciones de a), probar que

$$\text{Hom}_A(M, N) = \text{Hom}_{A/J}(M, N)$$

c) Calcular $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_{12}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4)$