

ALGEBRA II - PRACTICA 2

1er. cuatrimestre 1995

1) (grupo asociado a un semigrupo conmutativo)

Sea $(N, +)$ un semigrupo conmutativo. En el grupo producto $N \times N$ definimos la relacion $(x, y)R(x', y')$ si existe $z \in N$ tal que $z + x + y' = z + x' + y$. Verificar que R es una relacion de equivalencia compatible con la operacion de grupo. Verificar que la operacion cociente define una estructura de grupo en el conjunto cociente $N \times N/R$. Este grupo sera denotado $G(N)$. La aplicacion $j : N \rightarrow G(N)$ tal que $j(n) =$ clase de $(n, 0)$ es un morfismo de semigrupos; j es inyectiva si y solo si en N vale la ley cancelativa ($x + z = y + z$ implica $x = y$). Deducir que en un semigrupo conmutativo vale la ley cancelativa si y solo si el semigrupo se puede inyectar en un grupo. Se define $\mathbb{Z} = G(\mathbb{N})$.

2) (cuerpo de fracciones de un dominio)

Sea A un dominio (=anillo conmutativo sin divisores de cero). En $A \times A - \{0\}$ definimos la relacion $(x, y)R(x', y')$ si $x.y' = x'.y$. Verificar que R es una relacion de equivalencia. La clase de (x, y) se denota x/y . Definimos operaciones en $A \times A - \{0\}$: $(x, y).(x', y') = (x.x', y.y')$ y $(x, y) + (x', y') = (x.y' + x'.y, y.y')$. Verificar que estas operaciones son compatibles con R y definen en el conjunto cociente una estructura de anillo. Verificar que este anillo es un cuerpo, denotado $K(A)$. Se define $\mathbb{Q} = K(\mathbb{Z})$. Tambien se denota $A(t) = K(A[t])$ (cuerpo de funciones racionales en una variable) y $A((t)) = K(A[[t]])$.

3) (construccion del cuerpo \mathbb{R} de los numeros reales).

Consideremos el anillo producto $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$: un elemento de este anillo es una sucesion de numeros racionales, las operaciones de anillo son coordenada a coordenada.

a) Probar que el subconjunto $Ca \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ de la sucesiones de Cauchy, es un subanillo.

b) Probar que el subconjunto $Ce \subset Ca$ de la sucesiones que convergen a cero, es un ideal.

Definimos $\mathbb{R} = Ca/Ce$ (anillo cociente). Verificar que \mathbb{R} es un cuerpo.

Nota: se demuestra que \mathbb{R} es un cuerpo ordenado arquimediano completo, y que es el unico cuerpo con estas propiedades.

4) Sea A un anillo conmutativo y $x \in A$ un elemento nilpotente (es decir, $x^n = 0$ para algun $n \in \mathbb{N}$). Probar que $1 + x$ es una unidad en A . Deducir que la suma de un elemento nilpotente y una unidad es una unidad.

5) a) $A[[x]]$ es de integridad sii $A[x]$ es de integridad, sii A es de integridad.

b) Un elemento $p = \sum_{i=0}^n p_i x^i \in A[x]$ es una unidad sii $p_0 \in A$ es una unidad y p_1, \dots, p_n son nilpotentes.

c) Un elemento $p = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i \in A[[x]]$ es una unidad sii $p_0 \in A$ es una unidad. Si p es nilpotente entonces p_i es nilpotente para todo i . Vale la reciproca ?

18) Describir los anillos:

a) $\mathbb{Z}[x]/(2, x)$

b) $\mathbb{Z}[x]/(2)$

c) $\mathbb{Z}[x]/(2x)$

d) $\mathbb{Z}[i]/(2)$ donde $\mathbb{Z}[i] = \{z = a + b.i/a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ es el anillo de enteros de Gauss.

e) $\mathbb{Z}/(6, 4)$

f) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$

g) $\mathbb{Z}[x]/(1 + x + x^2)$

h) $\mathbb{Z}[i]/(i)$

i) $\mathbb{Z}[i]/(1 + i)$

j) $\mathbb{Z}[i]/(2, 1 + i)$

k) $\mathbb{Z}[i]/(1 + i, 1 - 2i)$

l) $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ (algebra de numeros duales)

6) Sea A un anillo y $(S, *)$ un semigrupo. En el conjunto A^S de todas las funciones $\alpha : S \rightarrow A$ definimos dos operaciones:

$$(\alpha + \beta)(s) = \alpha(s) + \beta(s)$$

$$(\alpha.\beta)(s) = \sum_{\{(u,v) \in S \times S / u*v=s\}} \alpha(u).\beta(v)$$

Suponemos que el semigrupo S es tal que el conjunto $\{(u, v) \in S \times S / u * v = s\}$ es finito para todo $s \in S$ (p. ej. $S \subset \mathbb{N}^k$, o S finito).

a) Verificar que $(A^S, +, .)$ es un anillo, que se denota $A[[S]]$. El anillo $A[[S]]$ es conmutativo si y solo si A y S son conmutativos.

Notacion: Es usual escribir un elemento $\alpha \in A^S$ como una suma formal $\sum_{s \in S} \alpha(s).s$. Explicitar las operaciones $+$ y $.$ utilizando esta convencion.

b) Verificar que el subconjunto $A^{(S)} \subset A^S$ de funciones con soporte finito ($\alpha(s) = 0$ salvo a lo sumo finitos $s \in S$) es un subanillo, denotado $A[S]$ y llamado algebra del semigrupo S con coeficientes en A .

c) Definir isomorfismos $A[[\mathbb{N}^r]] \cong A[[x_1, \dots, x_r]]$ y $A[\mathbb{N}^r] \cong A[x_1, \dots, x_r]$.

d) Verificar que si S es un grupo finito entonces la multiplicacion en $A[S]$ se escribe $(\alpha.\beta)(s) = \sum_{t \in S} \alpha(s.t^{-1}).\beta(t)$ (producto de convolucion).

7) Sea $\mathbb{H} = (\mathbb{R}^4, +, .)$ el algebra de cuaterniones. Para $q = a + b.i + c.j + d.k \in \mathbb{H}$ sea $\bar{q} = a - b.i - c.j - d.k$ el cuaternion conjugado.

a) Verificar que $q.\bar{q} = \bar{q}.q = |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Deducir que $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$ para $q \neq 0$ y que \mathbb{H} es un anillo de division.

b) Exhibir subanillos de \mathbb{H} isomorfos a \mathbb{C} .

c) $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{H} - \{0\}, .)$. Probar que todo subgrupo de H es normal. Deducir que H no es isomorfo al grupo dihedral D_4 .

Se demuestra que H y D_4 son los unicos grupos no conmutativos de orden 8.

8) Si A es un anillo denotamos $GL(n, A)$ el grupo de matrices inversibles de $n \times n$ con coeficientes en A . Calcular el numero de elementos de $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ (p primo).

9) a) Sea A un anillo y $J \subset A$ un ideal a izquierda (resp. derecha, bilatero). Entonces $M(n, J) \subset M(n, A)$ es un ideal a izquierda (resp. derecha, bilatero).

Sea V un espacio vectorial de dimension n sobre un cuerpo K y consideremos el anillo $A = \text{End}_K(V)$. Para cada subespacio lineal $U \subset V$ sea $I_U = \{f \in A/U \subset \ker(f)\}$ y $D_U = \{f \in A/\text{im}(f) \subset U\}$.

b) Demostrar que I_U es un ideal a izquierda y D_U es un ideal a derecha.

c) Todo ideal a izquierda (resp. derecha) de A es igual a I_U (resp. D_U) para algun subespacio U .

d) A tiene exactamente dos ideales bilateros.

10) Sea A un dominio finito. Probar que A es un anillo de division.

11) Sean I, J y K ideales de un anillo conmutativo A . Probar:

a) $I.J \subset I \cap J$. Dar ejemplos de igualdad y de desigualdad.

b) $(I + J).K = I.K + J.K$

c) $(I.J)^n = I^n.J^n$

12) En \mathbb{Z}

- a) $\langle m \rangle \cap \langle n \rangle = \langle [m, n] \rangle$ (minimo comun multiplo)
- b) $\langle m \rangle + \langle n \rangle = \langle (m, n) \rangle$ (maximo comun divisor)
- c) $\langle m \rangle \cdot \langle n \rangle = \langle m \cdot n \rangle$
- d) $\langle n \rangle$ es primo sii $\langle n \rangle$ es maximal, sii n es primo.

13) Sea A un anillo conmutativo. Probar que un ideal $J \subset A$ es maximal sii A/J es un cuerpo. Equivalentemente, un anillo conmutativo es simple (tiene solo dos ideales) sii es un cuerpo. Que pasa si A no es conmutativo? (considerar $M(n, K)$).

14) Se dice que un grupo G es simple si los unicos subgrupos normales de G son $\{1\}$ y G . Demostrar que si G es simple y conmutativo entonces es ciclico de orden primo. Otro ejemplo de grupo simple es \mathbb{A}_n con $n \geq 5$ (demostracion en [O]).

15) Sea $A = C^0((0, 1), \mathbb{R})$ el anillo de funciones continuas del intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R} . Probar que $f \in A$ es un divisor de cero si y solo si $\{x/f(x) = 0\}$ contiene un abierto. Opcional: Si $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto, sea A_U el anillo de funciones holomorfas $U \rightarrow \mathbb{C}$. Probar que si U es conexo entonces A_U es un dominio de integridad.

- 16) a) Un elemento de \mathbb{Z}_n es inversible sii no es divisor de cero.
 b) \mathbb{Z}_n es un cuerpo sii es dominio de integridad.
 c) \mathbb{Z}_n es un cuerpo sii n es primo.
 d) hay correspondencia biyectiva antiordenada entre el conjunto de ideales de \mathbb{Z}_n (ordenados por inclusion) y el conjunto de divisores de n (ordenados por la relacion de divisibilidad).
 e) Calcular el numero de ideales maximales de \mathbb{Z}_n (en funcion del numero de primos positivos que dividen n).
 f) Un ideal de \mathbb{Z}_n es primo sii es maximal.
 g) Caracterizar los elementos nilpotentes (o sea $x^m = 0$) y los elementos idempotentes (o sea $x^2 = x$) de \mathbb{Z}_n .

17) Analizar la existencia de un isomorfismo de anillos:

- a) \mathbb{Z} y $\mathbb{Z}[x]$
- b) $\mathbb{Z}[\pi] \subset \mathbb{R}$ ($\pi = 3, 1416 \dots$) y $\mathbb{Z}[x]$.
- c) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.
- d) \mathbb{R} y \mathbb{C} .
- e) \mathbb{H} y $M(2, \mathbb{R})$ (para mas informacion ver [J]).

f) $A[x][y]$ y $A[x, y]$.

g) dos de $A[[x]][y]$, $A[y][[x]]$ y $A[[x, y]]$.

h) $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ y $\mathbb{R}[\cos, \sin] \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (\mathbb{R} -subalgebra generada por $\{\cos, \sin\}$).

i) $K(\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)) \cong \mathbb{R}(t)$

Sug.: considerar una proyeccion estereografica.

j) $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 - y^2 - 1)$ y $\mathbb{R}[t]$

k) $\mathbb{R}[x, y]/(x^3 + y^3 - 1)$ y $\mathbb{R}[t]$