

ALGEBRA II - PRACTICA 1

1er. cuatrimestre 1995

1) Sea X un conjunto con una operacion interna $*$: $X \times X \rightarrow X$. Para $x_i \in X$ definimos inductivamente

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 * \cdots * x_n = (x_1 * \cdots * x_{n-1}) * x_n$$

Demostrar que si $*$ es asociativa entonces vale

$$\prod_{i=1}^n x_i = \left(\prod_{i=1}^m x_i \right) * \left(\prod_{i=m+1}^n x_i \right)$$

para todo $m \leq n$. Deducir que en un producto se pueden insertar parentesis de cualquier manera, sin alterar el resultado.

2) Con la notacion de 1), supongamos que $*$ es asociativa y conmutativa. Demostrar que para toda biyeccion $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ vale

$$x_1 * \cdots * x_n = x_{\sigma(1)} * \cdots * x_{\sigma(n)}$$

Sea J un conjunto finito y $x : J \rightarrow X$ una funcion (tambien escrita $(x_j)_{j \in J}$, pensada como familia de elementos de X parametrizada por el conjunto de indices J). Si $*$ es asociativa y conmutativa, darle sentido a la expresion $\prod_{j \in J} x_j$.

3) Sea S el sub-semigrupo de $(\mathbb{N}, +)$ generado por $\{2, 3\}$. Verificar que $\mathbb{N} = S \cup \{1\}$.

4) Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos $\mathbb{N}_{\geq m} = \{n \in \mathbb{N} / n \geq m\} \cup \{0\}$, que es un sub-semigrupo de $(\mathbb{N}, +)$. Encontrar un conjunto finito de generadores de \mathbb{N}_m .

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

5) Sea X un conjunto y X^X el conjunto de todas las funciones $X \rightarrow X$. Si \circ denota composición de funciones entonces (X^X, \circ) es un semigrupo. El grupo de unidades $\mathbb{S}(X) := U(X^X, \circ)$, consistente de las funciones $X \rightarrow X$ biyectivas, se denomina grupo simétrico de X .

Sea $(X, *)$ un monoide. Verificar que el conjunto $\text{End}(X, *)$ de endomorfismos de monoide es un sub-semigrupo de X^X . El conjunto $\text{Aut}(X, *) = U(\text{End}(X, *)) = \text{End}(X, *) \cap \mathbb{S}(X)$ de automorfismos de monoide, es un subgrupo de $\mathbb{S}(X)$.

6) Dibujar algunos sub-semigrupos de $(\mathbb{R}^n, +)$, ($n = 1, 2, 3$). Se sugiere considerar conos convexos $C \subset \mathbb{R}^n$. Intersecando con sub-semigrupos discretos como \mathbb{N}^n o \mathbb{Z}^n se obtienen ejemplos discretos.

7) Sea A el semigrupo $(\mathbb{N} - \{0\}, \cdot)$ y $B = (\mathbb{N}, +)$. Demostrar que existe un isomorfismo de semigrupos $A \cong B^{(\mathbb{N})}$.

Sugerencia: usar la descomposición de un número natural como producto de factores primos.

8) a) Sea X un conjunto y $P(X)$ el conjunto de partes de X . Verificar que $(P(X), \cup)$ y $(P(X), \cap)$ son semigrupos y que $c : (P(X), \cup) \rightarrow (P(X), \cap)$ definido por $c(Y) = X - Y$ es un isomorfismo de semigrupos. Determinar los grupos de unidades de estos semigrupos.

b) Sea $Y \subset X$ un subconjunto. Verificar que $(P(Y), \cap)$ es un submonoide de $(P(X), \cap)$, pero no es un sub-semigrupo (a menos que $Y = X$).

9) El grupo simétrico $\mathbb{S}_3 := \mathbb{S}(\{1, 2, 3\})$ es no conmutativo y posee exactamente 6 subgrupos, de los cuales 3 son normales.

10) a) Probar que todo grupo de orden ≤ 5 es abeliano. Describir las posibles estructuras.

b) Existen dos grupos de orden 4 no isomorfos.

11) Sea G un grupo cíclico. Demostrar que G es abeliano y que todo subgrupo de G también es cíclico.

12) Sea G un grupo. Para $x, y \in G$, el elemento $[x, y] := x.y.x^{-1}.y^{-1} = (x.y).(y.x)^{-1}$ se llama conmutador de (x, y) . Denotamos $[G, G] \subset G$ el subgrupo generado por todos los conmutadores. Verificar que $[G, G]$ es un subgrupo normal y que $G/[G, G]$ es abeliano. Demostrar que todo morfismo de G en un grupo abeliano se factoriza unívocamente a través de $G/[G, G]$.

13)a) Sea G un grupo. Se define el centro de G como $Z(G) = \{g \in G / g.x = x.g \ \forall x \in G\}$. Verificar que $Z(G)$ es un subgrupo normal de G .

b) Determinar el centro del grupo $GL(n, K)$ de matrices inversibles de $n \times n$ sobre el cuerpo K , del grupo de matrices inversibles triangulares superiores $T(n, K)$ y del grupo simétrico S_n .

14) Sea G un grupo y $\text{Aut}(G)$ el grupo de automorfismos de G (ver ejercicio 5). Para cada $g \in G$ se define la conjugación por g , $c_g : G \rightarrow G$, como $c_g(x) = g^{-1}.x.g$. Verificar que:

a) $c_g \in \text{Aut}(G)$

(un automorfismo de la forma c_g se denomina automorfismo interior)

b) la aplicación $c : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ tal que $c(g) = c_g$ es un morfismo de grupos.

c) $\ker(c) = Z(G)$.

Deducir que el grupo de automorfismos interiores es isomorfo a $G/Z(G)$.

d) si $g \in G$ y $\varphi \in \text{Aut}(G)$ entonces $\varphi \circ c_g \circ \varphi^{-1} = c_{\varphi(g)}$. Deducir que $\text{im}(c)$ es un subgrupo normal de $\text{Aut}(G)$. El grupo $\text{Aut}(G)/\text{im}(c)$ de "automorfismos exteriores" es un interesante invariante de G .

Comentario: a veces se utiliza la notación $g^{-1}.x.g = x^g$, de manera que a) se escribe $(x.y)^g = x^g.y^g$, mientras que b) dice $(x^g)^h = x^{g.h}$.

15) Sea G un grupo y $K \subset H$ subgrupos de G . Si K es normal en H y H es normal en G , es cierto que K es normal en G ?

16) Si H y K son subgrupos propios de un grupo G entonces $H \cup K \neq G$. Es válido lo mismo para tres subgrupos propios?

17) Dar contraejemplos a la siguiente afirmación: "Si H y K son subgrupos de G entonces $H.K$ es un subgrupo de G ". Probar que $H.K$ es un subgrupo si, y solo si, $H.K = K.H$ (Definición: $H.K = \{h.k / h \in H, k \in K\}$).

18) Sea G un grupo finito con $|G| = n$ elementos. Se sabe (teorema de Lagrange) que si H es un subgrupo de G entonces $|H|$ es un divisor de n . Vale la recíproca? Es decir, si m es un divisor de n , existe un subgrupo $H \subset G$ tal que $|H| = m$? Demostrar que la respuesta es afirmativa si G es cíclico, pero negativa en general.

19) Si H y K son subgrupos normales de G entonces existe un monomorfismo (natural)

$$f : G/(H \cap K) \rightarrow G/H \times G/K$$

Considerar tambien el caso de tres o mas subgrupos.

20) Si H es un subgrupo de G de indice 2 entonces H es normal.

21) Sea $O(n, \mathbb{R})$ el grupo de transformaciones lineales $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preservan distancia (una tal transformacion corresponde a una matriz $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $A \cdot A^t = I$). Para cada subconjunto $P \subset \mathbb{R}^n$ definimos el grupo $O(P) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) / A(P) = P\}$. Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ un tetrahedro regular. Demostrar que $O(P)$ es isomorfo al grupo alternado \mathbb{A}_4 .

Sugerencia: Ver [O], pag. 7, y considerar la accion de $O(P)$ sobre los vertices de P .

22) Sea H un subgrupo normal de G . Para que G sea isomorfo a $H \times G/H$ es necesario y suficiente que el morfismo de inclusion $H \rightarrow G$ sea una seccion.