NOTAS SOBRE LA FORMA DE JORDAN

Fernando Cukierman

Forma de Jordan: (mas o menos la presentacion en Gentile OEA, con algunos complementos)

Sea A un anillo conmutativo integro. Denotemos $A^{m \times n}$ el conjunto de matrices $m \times n$ con coeficientes en A.

En nuestras aplicaciones, A sera un anillo de ideales principales (como $\mathbb{Z}$ o $A = k[t]$, con k un cuerpo), aunque por ahora no suponemos esto. Otro ejemplo para tener en mente puede ser $A = k[x, y]$.

Definicion: Si $a, b \in A^{m \times n}$, decimos que a y b son equivalentes (escrito $a \equiv b$) si existen matrices inversibles $u \in A^{m \times m}$ y $v \in A^{n \times n}$, tales que $b = u.a.v$. Esta es claramente una relacion de equivalencia.

Definicion: Para $a \in A^{m \times n}$ denotamos $J_k(a)$ (k-esimo ideal de Fitting de a) el ideal de A generado por los determinantes de las sub-matrices $k \times k$ de a.

Observacion: Se tiene $A = J_0(a) \supset J_1(a) \supset \cdots \supset \dots J_r(a)$, con $r = \min\{m, n\}$. En particular, si a es matriz cuadrada inversible entonces $J_k(a) = A$ para todo k, ya que $\det(a)$ es inversible.

Proposicion: $J_k(a.b) \subset J_k(a) \cap J_k(b)$ para todo k.

Demostracion: ejercicio.

Corolario: Los ideales de Fitting son invariantes por equivalencia. Mas precisamente, si

$a \equiv b$ entonces $J_k(a) = J_k(b)$ para todo k.

Demostracion: ejercicio.

Definicion: Sea $d \in A^{m \times n}$ una matriz diagonal (o sea, $d_{i,j} = 0$ para $i \neq j$). Decimos que d es diagonal creciente si $d_{i,i}$ divide a $d_{i+1,i+1}$ para todo i.

Proposicion: Sean $d, d' \in A^{m \times n}$ dos matrices diagonales crecientes. Entonces $d \equiv d'$ si y solo si d y d' son asociadas (vale decir, existen u_i elementos inversibles de A tales que $d'_{i,i} = u_i.d_{i,i}$ para todo i).

Demostracion: Una implicacion es obvia. Para la otra, utilizar la invariancia de los ideales de Fitting y el hecho que $J_k(d) = \prod_{i=1}^{k} d_{i,i}$ para una matriz diagonal d.

Corolario: (unicidad) Una matriz $a \in A^{m \times n}$ es equivalente a lo sumo a una (salvo asociados) matriz diagonal creciente.

Definicion: Si $a \equiv d$ con d diagonal creciente, los ideales $A.d_{i,i}$ se denominan factores invariantes de a.

Teorema (existencia): Sea A un anillo de ideales principales. Toda matriz $a \in A^{m \times n}$ es equivalente a una matriz diagonal creciente.

Demostracion: Hay varios procedimientos constructivos de diagonalizacion. Referimos a Gentile (OEA).

Ejercicio: Dar un ejemplo de una matriz que no es equivalente a una matriz diagonal (por supuesto, sobre un anillo que no es principal).

Observacion: Este ordenamiento de las implicaciones, que difiere poco de la presentacion en Gentile (OEA) o Kurosch, intenta poner de manifiesto la relacion entre la unicidad de la diagonalizacion y los ideales de Fitting, donde no se supone que el anillo es principal. Para una discusion mas detallada de ideales de Fitting se puede consultar el libro de Lang.

Ahora utilizamos los resultados anteriores sobre matrices para sacar algunas conclusiones sobre modulos.

Teorema (de estructura): Sea A un anillo de ideales principales. Sea M un A-modulo finitamente generado. Entonces

a) (existencia) Existe un isomorfismo $M \cong \oplus_{i=1}^{r} A/A.d_i$ donde $d_1, \ldots, d_r \in A$ son tales que d_i divide a d_{i+1} para todo i. (notar que no se excluye que algunos $d_i = 0$).

b) (unicidad) Si $\oplus_{i=1}^{r} A/A.d_i \cong \oplus_{i=1}^{s} A/A.e_i$ (donde tambien cada e_i divide a e_{i+1}), entonces $r = s$ y d_i es asociado a e_i para todo i.

Demostracion:

a) Enfatizamos el caracter constructivo del argumento que sigue, a ser aplicado a la teoria de la forma de Jordan. Aqui juega un rol el concepto de "presentacion" (por generadores y relaciones, ver texto) de M. En general, una presentacion finita de un modulo M sobre un anillo conmutativo A es una sucesion exacta

$$A^n \to A^m \to M \to 0$$

vale decir, M es el conucleo de un morfismo de modulos libres finitos, definido necesariamente por una matriz $a \in A^{m \times n}$. Si M admite una presentacion finita, decimos que es finitamente presentable. Si A es noetheriano (lo cual es el caso si A es de ideales principales) entonces todo modulo finitamente generable es finitamente presentable (ejercicio).

Una vez que disponemos de una presentacion finita de M, podemos aplicar nuestros resultados sobre matrices. Volviendo al caso A principal, podemos encontrar matrices inversibles u, v tales que $d = u.a.v$ es diagonal creciente. Entonces

$$M \cong \operatorname{coker}(a) \cong \operatorname{coker}(d) \cong \oplus_{i=1}^{r} A/A.d_{i,i}$$

como debiamos demostrar.

b) Existen varias demostraciones de la unicidad. Ver el texto o Gentile (OEA), Lang (utilizando ideales de Fitting) o tambien via el concepto de modulo filtrado y modulo graduado asociado. Notar que en el texto se demuestra un resultado mas general que el enunciado en b).

Sea ahora k un cuerpo y $\tau \in k^{n\times n}$ una matriz cuadrada con coeficientes en k. Escribimos $V = k^n$ y pensamos a τ como endomorfismo k-lineal $\tau : V \to V$. Consideramos el $k[t]$-modulo V_τ asociado. Como grupo abeliano $V_\tau = V$. La accion de t es $t.v = \tau(v)$ para $v \in V$. Sea $\chi(\tau) = \tau - t.\mathrm{Id} \in k[t]^{n\times n}$ la matriz caracteristica de τ.

Denotemos $e_1, \ldots, e_n$ la base canonica de k^n como k-espacio vectorial. Como elementos del $k[t]$-modulo V_τ, los e_i claramente son generadores. Pero no son una base, ya que son elementos de torsion (todo elemento de V_τ es de torsion, como resulta, por ejemplo, de Cayley-Hamilton). Denotemos $E_1, \ldots, E_n$ la base canonica de $k[t]^n$ como $k[t]$-modulo. Sea $\pi : k[t]^n \to k^n = V_\tau$ el unico morfismo de $k[t]$-modulos tal que $\pi(E_i) = e_i$ para todo i.

Ejercicio: calcular $\pi(P_1, \ldots, P_n)$ para todo $(P_1, \ldots, P_n) \in k[t]^n$.

La siguiente Proposicion es el nexo entre la teoria anterior y el calculo efectivo de los factores invariantes de una matriz. Ver Gentile (OEA) para mas detalles.

Proposicion: La sucesion de $k[t]$-modulos

$$0 \to k[t]^n \xrightarrow{\chi(\tau)} k[t]^n \xrightarrow{\pi} k^n \to 0$$

es exacta.

Observacion 1: La Proposicion dice que V_τ es el $k[t]$-modulo con generadores e_i y relaciones $t.e_j = \sum_i \tau_i, j.e_i$.

Observacion 2: Esta Proposicion es una forma explicita del teorema de syzygias de Hilbert, en dimension uno. (ver Cartan-Eilenberg, Homological Algebra).

Corolario: $V_\tau \cong \oplus_{i=1}^r k[t]/A.d_i$, donde los factores invariantes $d_i \in k[t]$ se obtienen diagonalizando la matriz caracteristica de τ.

Demostracion de la Proposicion:

Denotemos $a = \chi(\tau) \in k[t]^{n\times n}$. Como el determinante de la matriz a (polinomio caracteristico de τ) es no nulo, el morfismo a es inyectivo.

De la definicion de la estructura de modulo en V_τ resulta que $\pi \circ a = 0$, o sea, $\mathrm{im}(a) \subset \ker(\pi)$.

Veamos que $\ker(\pi) \subset \mathrm{im}(a)$. Sea $\tilde{\pi} : M = k[t]^n/\mathrm{im}(a) \to V_\tau$ el morfismo de $k[t]$-modulos deducido de π por pasaje al cociente. Necesitamos demostrar que $\tilde{\pi}$ es inyectivo. Ahora, $\tilde{\pi}$ es claramente sobreyectiva, ya que π es sobreyectiva. Por lo tanto, bastaria con ver que M, considerado como k- espacio vectorial, tiene dimension $\leq n = \dim_k(V_\tau$. Para esto, sea $f_i \in M$ la clase de $E_i \in k[t]^n$. En M vale la relacion $t.f_i = \sum_i \tau_i, j.f_i$, ya que justamente hemos pasado al cociente por $\mathrm{im}(a)$. Por lo tanto, $t.f_i \in S$ para todo i, donde S denota el k-espacio vectorial generado por los f_j. Se sigue que $t^r.f_i \in S$ para todo $r \in \mathbb{N}$, y entonces $P..f_i \in S$ para todo $P \in k[t]$. En consecuencia, M esta generado como k-espacio vectorial por $f_1, \ldots, f_n$, lo cual implica que tiene dimension $\leq n$, como queriamos demostrar.