NOTAS SOBRE INTEGRALES ABELIANAS

FERNANDO CUKIERMAN

Contents

1. Introducción.

En los cursos elementales de Análisis se estudia el problema siguiente: dada una función $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ encontrar una función $\psi : (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{d\psi}{dx} = \varphi$$

Decimos que ψ es una primitiva de φ. Se tiene entonces que

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \psi(b) - \psi(a)$$

suponiendo φ continua en $[a, b]$.

Se considera - apropiadamente - que encontrar una fórmula explícita para una tal ψ es más un arte que una ciencia y para lograr esto (en caso que sea posible) se conocen varios métodos, como: substitución (o cambio de variable), integración por partes, fracciones simples, etc.

El objetivo de estas notas es explicar la relación que existe entre un cierto caso particular de este problema, el caso de las Integrales Abelianas, y la teoría de las Curvas Algebraicas.

A través de las ideas y métodos que expondremos esperamos se alcance una comprensión más amplia y clara del problema, en particular justificando geométricamente ciertas substituciones utilizadas en textos clásicos; ver por ejemplo [5], [7], [11], [13]. Además, lograremos ampliar nuestra colección de funciones φ con primitiva explícitamente calculable.

El caso de las integrales abelianas es aquel en que $\varphi(x) = R(x, y)$ donde R es una función racional de dos variables y donde $y = y(x)$ es una función algebraica de x, o sea, existe una relación de dependencia algebraica $f(x, y) = 0$, donde f es un polinomio en dos variables.

En esta situación se puede considerar que estamos trabajando con una forma diferencial $\omega = \varphi(x)dx$ sobre la curva algebraica X definida por f.

Debido a que la correspondencia entre polinomios y sus conjuntos de ceros tiene mejor comportamiento en el caso complejo que en el caso real, será conveniente trabajar sobre el cuerpo de los complejos, lo cual no produce inconvenientes para nuestro problema original.

Resulta importante destacar además el carácter biracional del problema del cálculo de primitivas. Esto implica en particular que tiene relevancia considerar el género $g(X)$.

Como veremos, si $g(X) = 0$ entonces X es una curva racional y toda integral abeliana sobre X se reduce a fracciones simples.

Si $g(X) = 1$ entonces X es una curva elíptica, biracionalmente equivalente a una cúbica plana, y las integrales abelianas sobre X se calculan en términos de funciones elípticas.

En el caso general, cada integral abeliana se puede expresar como suma de una primitiva elemental (más precisamente, una diferencial exacta) y de integrales de primera, segunda y tercera especie. El número de integrales de primera y de segunda especie linealmente independientes está determinado por el género de X. Por otra parte, las integrales de tercera especie se pueden expresar como suma de derivadas logarítmicas trasladadas de la función Θ de Jacobi y Riemann.

Vamos a suponer cierta familiaridad con los conceptos básicos de la teoría de curvas algebraicas, a nivel de los primeros capítulos de [4].

Las presentes notas fueron redactadas como texto complementario para el curso de Geometría Algebraica que he dictado durante la Escuela de Matemática de América Latina y el Caribe (EMALCA, Perú, 18 al 29 de Febrero de 2008). Agradezco a la Sociedad Matemática Peruana, al IMCA y a la UMALCA por haber apoyado esta actividad, y al Comité Organizador de esta EMALCA por su invitación a dictar el mencionado curso. También agradezco a los alumnos y otros participantes por sus preguntas, comentarios y dedicación a las tareas del curso.

Buenos Aires, Febrero de 2008.

2. Definiciones y primeros ejemplos.

2.1. **Funciones algebraicas.** Sea $f \in \mathbb{C}[x,y]$ un polinomio con coeficientes complejos, en dos variables. Denotemos

$$C(f) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 / f(x,y) = 0\}$$

la curva algebraica compleja definida por f.

El polinomio f es una suma finita $f = \sum_{i,j} f_{ij} x^i y^j$ con los $f_{ij} \in \mathbb{C}$. Reordenando términos podemos expresar nuestro polinomio en la forma

$$f = \sum_j a_j(x) y^j \tag{1}$$

donde $a_j \in \mathbb{C}[x]$. También podemos expresar f de modo único como

$$f = \sum_k f_k \tag{2}$$

donde $f_k \in \mathbb{C}[x,y]$ es un polinomio homogéneo de grado k, específicamente $f_k = \sum_{i+j=k} f_{ij} x^i y^j$.

Definición 2.1. *Escribiendo más precisamente $f = \sum_{r \le k \le d} f_k$ con $f_r \neq 0$ y $f_d \neq 0$, se dice que d es el* **grado** *de f y que r es la* **multiplicidad** *de f en el punto 0. El polinomio homogéneo f_r se denomina la* **forma inicial** *de f en el punto 0 y el conjunto $C(f_r)$ es el* **cono tangente** *de f en el punto 0. Notar que f_r se factoriza como producto de formas lineales distintas $f_r = \prod_j (a_j x + b_j y)^{r_j}$; las rectas $C(a_j x + b_j y)$ se llaman* **rectas tangentes** *de f en el punto 0. Se dice que 0 es un* **punto singular ordinario** *de f si $r_j = 1$ para todo j. Un punto singular ordinario de multiplicidad dos se denomina un* **nodo**. *Una* **cúspide** *es un punto de multiplicidad dos, no-ordinario (o sea, la forma inicial es el cuadrado de una forma lineal). Las mismas definiciones se aplican a otro punto $p = (a,b) \in \mathbb{C}^2$ considerando $g(x,y) = f(x+a, y+b) \in \mathbb{C}[x,y]$.*

Sea $(x_0, y_0) \in C(f)$ y sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo que contiene x_0. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ (o sea, (x_0, y_0) no es punto crítico de la primera proyección $(x,y) \mapsto x$). Entonces, por el Teorema de las Funciones Implícitas [2], existe una única función holomorfa $g : U \to \mathbb{C}$ tal que $g(x_0) = y_0$ y $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in U$. En virtud de 1 obtenemos que $\sum_j f_j g^j = 0$ y por lo tanto g es un elemento algebraico sobre el cuerpo $\mathbb{C}(x)$ de funciones racionales en x.

En términos heurísticos, podemos considerar entonces que la relación $f(x,y) = 0$ define y como "función multiforme algebraica" de la variable compleja x.

Como ejemplo sencillo tenemos $f(x,y) = y^2 - x$, que da lugar a las diversas determinaciones de la raíz cuadrada de x.

2.2. **Integrales abelianas.** Una integral abeliana se escribe

$$\int R(x,y)\,dx \tag{3}$$

donde $R \in \mathbb{C}(x,y)$ es una función racional en las variables x, y, conectadas por la relación $f(x,y) = 0$, donde $f \in \mathbb{C}[x,y]$ es un polinomio dado.

Tiene interés estudiar la integral como función (multiforme) de su límite superior de integración. También se puede encarar el problema de la existencia de una primitiva expresable explícitamente en términos de funciones conocidas, por ejemplo, expresable como $S(x,y)$ donde $S \in \mathbb{C}(x,y)$ es una función racional o alguna otra función considerada conocida.

Antes de dar los primeros ejemplos nos conviene recordar el método de fracciones simples para integración de funciones racionales en una variable t.

Proposición 2.2. *Sean $P, Q \in \mathbb{C}[t]$ dos polinomios sin factores comunes. Denotemos $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ las raíces distintas de Q. Entonces existen $\bar{P}, \bar{Q} \in \mathbb{C}[t]$ y $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tales que*

$$\frac{P}{Q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{P}}{\bar{Q}}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{t - a_i}$$

En particular, cualquier determinación de $\bar{P}/\bar{Q} + \sum_{i=1}^{n} b_i \ \log(t - a_i)$ es una primitiva de P/Q.

Proof. El polinomio Q se factoriza como $Q = c.\prod_{i=1}^{n}(t - a_i)^{n_i}$ donde $c \in \mathbb{C}$ y n_i es la multiplicidad de a_i. Definimos $Q_j = c.\prod_{i \neq j}(t - a_i)^{n_i}$ para $j = 1, \dots, n$. Como los Q_j son coprimos existen $B_1, \dots, B_n \in \mathbb{C}[t]$ tales que $P = \sum_{i=1}^{n} B_i Q_i$ y por lo tanto

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{(t - a_i)^{n_i}}$$

Cada B_i se puede expresar como combinación lineal

$$B_i = \sum_j B_{ij}(t - a_i)^j$$

con $B_{ij} \in \mathbb{C}$, de lo cual se obtiene inmediatamente el resultado. □

Observación 2.3. *Los a_i son los polos de P/Q y los b_i son los correspondientes residuos.*

También resulta conveniente recordar aquí las siguientes definiciones.

Definición 2.4. *Sea $C(f)$ una curva algebraica irreducible. Decimos que $C(f)$ es* **uniracional** *si existe una función racional no-constante $\mathbb{C} \to C(f)$. Vale decir, existen funciones racionales $X, Y \in \mathbb{C}(t)$, al menos una de ellas no-constante, y tales que $f(X, Y) = 0 \in \mathbb{C}(t)$.*

Definición 2.5. *Se dice que la curva algebraica $C(f)$ es* **racional** *si existe un isomorfismo biracional $\mathbb{C} \to C(f)$. O sea, existen funciones racionales $X, Y \in \mathbb{C}(t)$ y $T \in \mathbb{C}(x,y)$ tales que*

$f(X, Y) = 0 \in \mathbb{C}(t)$

$T(X(t), Y(t)) = t \in \mathbb{C}(t)$

$X(T(x,y)) = x$, $Y(T(x,y)) = y$ *como elementos del cuerpo $K(C(f))$ de funciones racionales de $C(f)$.*

Observación 2.6. *Es inmediato que una curva algebraica uniracional es racional. La recíproca también es válida (Teorema de Luroth, ver* [17]*).*

La importancia de las curvas racionales para nuestro tema se debe a la siguiente

Proposición 2.7. *Sea $f \in \mathbb{C}[x,y]$ tal que $C(f)$ es una curva racional. Entonces toda integral abeliana $\int R(x,y)dx$ con $f(x,y) = 0$ se reduce a fracciones simples, o sea, su estudio es equivalente al de una integral de la forma $\int p(t)\ dt$ con $p \in \mathbb{C}(t)$.*

Proof. Con la notación de la Definición 2.5, en la integral $\int R(x,y)dx$ hacemos el cambio de variable

$$x = X(t), y = Y(t)$$

de modo que $R(x,y)dx = R(X,Y)\frac{dX}{dt}dt = p\ dt$, donde $p \in \mathbb{C}(t)$. Por la Proposición 2.2 existe una primitiva de la forma $r + \sum_i b_i\ \log(t - a_i)$ donde $a_i, b_i \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{C}(t)$. Resulta fácilmente de la regla de la cadena que reemplazando $t = T(x,y)$ obtenemos la primitiva buscada, que adopta la forma

$$S(x,y) + \sum_i\ b_i\ \log(T(x,y) - a_i)$$

con $S, T \in \mathbb{C}(x,y)$. $\square$

Ahora estamos en condiciones de enunciar nuestros primeros ejemplos.

Ejemplo 2.8. *Toda integral de tipo* $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$*, donde* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *y* $R \in \mathbb{C}(x,y)$*, se reduce a fracciones simples.*

En efecto, denotando $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ estamos en presencia de una integral abeliana con $f(x,y) = y^2 - (ax^2 + bx + c)$, un polinomio de grado dos, que suponemos irreducible (otros casos se pueden analizar por separado). La curva algebraica $C(f)$ es una cónica irreducible y toda tal cónica es racional: se verifica facilmente que la proyección sobre una recta desde un punto de la cónica define un isomorfismo biracional entre ella y $\mathbb{C}$.

Más explícitamente: aplicando una traslación, si es necesario, podemos suponer $c = 0$, con lo cual el origen $(0,0) \in C(f)$. Para $t \in \mathbb{C}$ sea $L_t = C(y - tx)$ la recta por el origen y con pendiente t. La intersección $C(f) \cap L_t$ consiste de dos puntos, el origen y otro punto (que denominamos "punto móvil") $(X(t), Y(t))$. Reemplazando $y = tx$ en $f(x,y) = 0$ resulta inmediatamente que $X(t) = \frac{b}{t^2 - a}$, $Y(t) = \frac{bt}{t^2 - a}$ y vemos que $t \mapsto (X(t), Y(t))$ define un isomorfismo biracional $\mathbb{C} \to C(f)$. En consecuencia podemos proceder como en la Proposición 2.7 con estos $X, Y \in \mathbb{C}(t)$ y con $T = y/x \in \mathbb{C}(x,y)$ para reducir la integral propuesta a fracciones simples.

Ejemplo 2.9. *Toda integral de tipo* $\int R(\cos(t), \text{sen}(t))dt$*, donde* $R \in \mathbb{C}(x,y)$*, se reduce a fracciones simples.*

En efecto, efectuando la substitución $u = \cos(t)$ se tiene $\text{sen}(t) = \sqrt{1 - u^2}$, $du = -\sqrt{1 - u^2}dt$, con lo cual la integral se reduce al tipo considerado en el Ejemplo 2.8.

Similarmente, la integración de una función racional de las seis funciones trigonométricas se reduce a fracciones simples. Más precisamente, se puede ver (ejercicio) que el cuerpo de funciones racionales en $\text{sen}(t)$ y $\cos(t)$ es isomorfo al cuerpo de fracciones de $\mathbb{C}[x,y]/(x^2 + y^2 - 1)$, o sea, al cuerpo de funciones racionales de la curva algebraica $C(x^2 + y^2 - 1)$.

Ejemplo 2.10. *Sea* $f \in \mathbb{C}[x,y]$ *de la forma* $f = f_r + f_{r+1}$ *(en la notación de Definición 2.1) para un cierto* $r \in \mathbb{N}$*. O sea,* f *sólo contiene monomios de grados* r *y* $r+1$*. Entonces toda integral abeliana* $\int R(x,y)dx$ *con* $f(x,y) = 0$ *se reduce a fracciones simples.*

Según la Proposición 2.7 basta con ver que $C(f)$ es racional. Pero en este caso el método del Ejemplo 2.8, proyectar desde el punto $(0,0) \in C(f)$, también funciona aquí: reemplazando $y = tx$ en $f(x,y) = 0$ obtenemos $f_r(x,tx) + f_{r+1}(x,tx) =$

$x^r f_r(1,t) + x^{r+1} f_{r+1}(1,t) = 0$, con lo cual $X = -\frac{f_r(1,t)}{f_{r+1}(1,t)}$, $Y = tX$ resulta ser una parametrización racional de $C(f)$

En la próxima sección daremos otros ejemplos de curvas algebraicas racionales y de métodos explícitos para encontrar parametrizaciones racionales de esas curvas.

Ahora mencionamos otro ejemplo de integral abeliana sobre curvas que no son racionales en general.

Ejemplo 2.11. *Consideremos $f(x,y) = y^2 - p(x) \in \mathbb{C}[x,y]$ donde $p \in \mathbb{C}[x]$ es un polinomio de grado $d \geq 3$. La curva algebraica $C(f)$ se denomina "curva hiperelíptica" definida por p. Las integrales abelianas correspondientes*

$$\int R(x,y)dx = \int R(x, \sqrt{p(x)})dx$$

se denominan "integrales hiperelípticas".

Cuando $d = 3$ o $d = 4$, se denominan integrales elípticas. Daremos más detalles sobre ellas en la Sección 4. Por ahora consideremos los dos siguientes ejemplos de integrales hiperelípticas, con $d = 6$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^6 - 1}}, \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 - 1}}$$

La segunda se integra facilmente mediante el cambio de variable $x^3 = u$. Se sabe, pero no lo demostraremos, que la primera no es expresable en términos elementales. Ambas integrales refieren a la misma curva $y^2 = x^6 - 1$, pero tienen comportamiento diferente.

Ejercicio 2.12. *Ejercicio: Encontrar una primitiva de $1/y(x)$ donde*

$$y(x) = \sqrt[3]{(-x^2 + \sqrt{x^4 + 4x^3})} - \sqrt[3]{(x^2 + \sqrt{x^4 + 4x^3})}$$

Sugerencia: Observar que $y^3 + axy + bx^2 = 0$ para ciertas $a, b \in \mathbb{C}$.

3. Curvas racionales.

Según la Proposición 2.7, interesa resolver el siguiente problema: dada una curva algebraica $C(f)$ determinar si es racional y, en caso afirmativo, encontrar explícitamente una parametrización $(X(t), Y(t))$ de $C(f)$. La solución de este problema está dada en la Proposición 3.2 y Corolario 5.4 siguientes.

Definición 3.1. *Consideramos una clausura proyectiva de $C(f)$: supongamos que f tiene grado d, sea $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogéneo de grado d tal que $F(1,x,y) = f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ y definimos*

$$\bar{C}(F) = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) / \ F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

Supongamos que f es libre de cuadrados (o sea, es un producto de factores irreducibles distintos), de modo que el conjunto $S(X)$ de puntos singulares de $X = \bar{C}(F)$ es finito. Para cada punto singular $p \in S(X)$ denotemos r_p la multiplicidad de X en p.

Proposición 3.2. *Si se verifica la igualdad*

$$\sum_{p\in S(X)} r_p(r_p-1)=(d-1)(d-2)$$

entonces $X=\bar{C}(F)$ *es racional.*

Proof. La idea es construir explícitamente una parametrización racional de X, del modo siguiente: consideramos el conjunto V de todos los polinomios $G\in\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]$ homogéneos de grado $d-1$ tales que para todo punto $p\in X$ las multiplicidades en p satisfacen $r_p(G)\geq r_p-1$. Por ejemplo, si p es un punto no-singular de F la condición no impone restricción a G, mientras que si p es un punto singular de F con multiplicidad dos entonces la condición significa que G pasa por p. Expresado en coordenadas: supongamos que $p=(1:a:b)$ y sea $g(x,y)=G(1,x,y)$. Entonces la condición significa que las derivadas respecto a x,y de orden $<(r_p-1)$ de g en p son nulas. Estas son $r_p(r_p-1)/2$ condiciones lineales independientes impuestas a G. Por lo tanto V es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]_{d-1}$ de los polinomios homogéneos de grado $d-1$, cuya dimensión es $d(d+1)/2$. Tenemos entonces que

$$\dim(V)\geq d(d+1)/2-\sum_{p\in S(X)} r_p(r_p-1)/2=d(d+1)/2-(d-1)(d-2)/2=2d-1$$

Elijamos $2d-3$ puntos no-singulares $q_1,\ldots,q_{2d-3}\in X$ y sea $U\subset V$ el subespacio de los $G\in V$ tales que $G(q_i)=0$ para $i=1,\ldots,2d-3$. Entonces,

$$\dim(U)\geq\dim(V)-(2d-3)\geq 2d-1-(2d-3)=2$$

(Nota: Según la terminología clásica, U y V son sistemas lineales de curvas de grado $d-1$, con puntos base y multiplicidades asignadas.)

Afirmamos:

a) Para cada $G\in U, G\neq 0$, existe un punto $p_G\in\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tal que

$$\bar{C}(G)\cap\bar{C}(F)=S(F)\cup\{p_G,q_1,\ldots,q_{2d-3}\}$$

(es posible que $p_G\in S(F)$ o que $p_G=q_j$ para algún j)

b) $\dim(U)=2$

Para ver a) utilizamos el Teorema de Bezout. Como F es irreducible y el grado de G es menor que el grado de F, resulta que F y G no tienen factores comunes. Sabemos que $S(F)\cup\{q_1,\ldots,q_{2d-3}\}\subset\bar{C}(G)\cap\bar{C}(F)$ y que la multiplicidad de intersección $(F,G;p)\geq r_p(r_p-1)$ para todo $p\in S(F)$. Entonces,

$$\begin{aligned}d(d-1)-1=(d-1)(d-2)+(2d-3)&=\sum_{p\in S(X)} r_p(r_p-1)+(2d-3)\\&\leq\sum_{p\in\bar{C}(G)\cap\bar{C}(F)}(F,G;p)=d(d-1)\end{aligned}$$

de lo cual resulta a).

b): Sabemos que $\dim(U)\geq 2$. Supongamos que $\dim(U)\geq 3$. Elijamos dos puntos $r,s\in X$, no-singulares y distintos de todos los q_j. Entonces existe un $G\in U, G\neq 0$, tal que $G(r)=G(s)=0$, lo cual contradice a) y por lo tanto $\dim(U)=2$.

Sea entonces G_1,G_2 una base de U. Para $t\in\mathbb{C}$ denotemos $G_t=G_1+tG_2\in U$ y sea $p_{G_t}\in\bar{C}(G_t)\cap\bar{C}(F)$ como en a). Entonces la aplicación $\mathbb{C}\to C(F)$ tal que

$t \mapsto p_{G_t}$ es la parametrización buscada (ver [17] para la justificación de este punto). Heurísticamente, p_{G_t} es el "punto móvil" en las intersecciones de $\bar{C}(F)$ con las curvas $\bar{C}(G_t)$ del sistema lineal U, como en el Ejemplo 2.8. $\square$

Ejemplo 3.3. *Sea $X = \bar{C}(F)$ tal que $r_p = 2$ para todo $p \in S(X)$. Denotemos δ el número de puntos singulares de X. Obtenemos el siguiente resultado: si $\delta = (d-1)(d-2)/2$ entonces X es racional. En efecto, basta con aplicar la Proposición 3.2, observando que $r_p(r_p-1)/2 = 1$ para todo $p \in S(X)$.*

Como un caso específico del Ejemplo 3.3, sea

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 8x(x^2-3y^2) + 18(x^2+y^2) - 27$$

Entonces $X = \bar{C}(F)$ tiene grado cuatro y tres cúspides, como se verifica facilmente. Por lo tanto X es una curva racional, denominada Deltoide. Para gráfico de los puntos reales de X y mayores detalles se puede consultar

http://mathworld.wolfram.com/Deltoid.html

http://www.2dcurves.com/

Ejercicio 3.4. *Sea $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)$ y consideremos $X = \bar{C}(F)$ como antes. Esta curva es llamada la Lemniscata. Demostrar que X tiene tres puntos singulares. Calcular la multiplicidad de cada uno de estos puntos y deducir a partir de la Proposición 3.2 que X es racional. Obtener explícitamente una parametrización racional de X: Sea $g_t = x^2+y^2 - t(x-y)$ (familia de círculos); demostrar que el único punto móvil de la intersección $C(f) \cap C(g_t)$ es*

$$(x(t), y(t)) = (t(t^2+1)/(t^4+1), t(t^2-1)/(t^4+1))$$

Hacer un dibujo.

Ejercicio 3.5. *Las curvas dadas paramétricamente por*

$$\alpha(t) = (a \operatorname{sen}(nt+d), b \operatorname{sen}(t))$$

se denominan curvas de Lissajous. Demostrar:

a) Si n es racional entonces las curvas de Lissajous son curvas algebraicas. Más precisamente, el conjunto imagen de α es el conjunto de ceros de un polinomio en dos variables.

b) Estas curvas algebraicas son racionales.

Ejercicio 3.6. *Más generalmente, toda curva algebraica parametrizable por funciones racionales de las funciones trigonométricas, es racional.*

4. Integrales elípticas.

Como en el Ejemplo 2.11 consideremos una integral abeliana

$$\int R(x,y)dx$$

con $f(x,y) = y^2 - p(x)$, donde $R \in \mathbb{C}(x,y)$ y $p \in \mathbb{C}[x]$ es un polinomio de grado 4, que podemos suponer mónico.

Si p tiene raíces múltiples entonces $C(f)$ es una curva racional (ejercicio) y estamos en el caso ya considerado. Supongamos entonces que p no tiene raíces múltiples, en cuyo caso $C(f)$ se denomina curva elíptica en forma de Weierstrass definida por f.

Podemos factorizar $p(x) = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)$ donde las $r_i \in \mathbb{C}$ son las raíces de p. Aplicando una transformación homográfica apropiada $x \mapsto ax+b/cx+d$ se puede normalizar p en la forma

$$p_k(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2)$$

para un cierto $k \in \mathbb{C}$ (denominado "módulo" de la curva elíptica).

Definimos las siguientes integrales abelianas particulares

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ II &= \int \frac{(1-k^2x^2)\ dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ III_\gamma &= \int \frac{dx}{(1-\gamma^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ \gamma \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

denominadas, respectivamente: integral de primera especie, integral de segunda especie, integral de tercera especie con parámetro $\gamma \in \mathbb{C}$.

Se tiene entonces el siguiente resultado:

Teorema 4.1. *Toda integral $\int R(x,y)dx$ con $y^2 - (1-x^2)(1-k^2x^2) = 0$, se puede expresar como combinación lineal*

$$S(x,y) + a\ I + b\ II + \sum_{i=1}^{n} c_i\ III_{\gamma_i}$$

donde $S \in \mathbb{C}(x,y)$, $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ y $c_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$.

Más precisamente, la forma diferencial meromorfa $\omega = R(x,y)dx$ definida sobre la curva algebraica $C(f)$ es combinación lineal de una forma diferencial exacta dS y de las formas diferenciales

$$\omega_1 = dx/y, \quad \omega_2 = (1-k^2x^2)\ dx/y, \quad \omega_{3,i} = dx/(1-{\gamma_i}^2x^2)y$$

con $i = 1, \ldots, n$.

Proof. Ver por ejemplo [6], [12]. □

5. Curvas de género superior.

5.1. Definición y propiedades básicas del género.

Definición 5.1. *Sea $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogéneo irreducible de grado d. Supongamos que cada punto singular de $X = \bar{C}(F)$ es ordinario o bien es una cúspide (ver Definición 2.1). Entonces definimos el* **género geométrico** *de X como*

$$p_g(X) = (d-1)(d-2)/2 - \sum_{p \in S(X)} r_p(r_p-1)/2$$

Observación 5.2. *Más generalmente, si las singularidades de X son arbitrarias, se define el género geométrico del modo siguiente: para un punto $p \in X$ sea A_p su anillo local, sea $\tilde{A}_p$ la clausura normal de A_p y denotemos δ_p la longitud de $\tilde{A}_p/A_p$; se define entonces $p_g(X) = (d-1)(d-2)/2 - \sum_{p \in S(X)} \delta_p$; ver* [14].

Proposición 5.3. *El género geométrico goza de las siguientes propiedades.*

a) Para toda curva proyectiva plana irreducible X se tiene que $p_g(X) \geq 0$.

b) Si X_1 y X_2 son dos curvas proyectivas planas irreducibles biracionalmente equivalentes entonces $p_g(X_1) = p_g(X_2)$.

Proof. Ver [9], [17]. □

Corolario 5.4. *$X = \bar{C}(F)$ es racional si y sólo si $p_g(X) = 0$.*

Proof. Si X es racional entonces es biracionalmente equivalente a una recta $L = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Como claramente $p_g(L) = 0$, resulta de la Proposición 5.3 b) que $p_g(X) = 0$. La recíproca es la Proposición 3.2. □

Hasta ahora hemos considerado solamente curvas algebraicas planas. Para lo que sigue será conveniente trabajar también con una curva algebraica Y completa conexa no-singular, sobre los números complejos. Equivalentemente, suponemos que Y es una variedad holomorfa compacta conexa de dimensión compleja uno. En particular, Y es una superficie topológica orientable compacta. Denotaremos

$$g(Y) = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{H}_1(X, \mathbb{Q})$$

el género topológico de Y. Además, es un resultado bien conocido (que no utilizaremos) que Y es homeomorfa a un toro con $g(Y)$ manijas.

Tenemos entonces el siguiente complemento a la Proposición 5.3:

Proposición 5.5. *a) Para toda curva algebraica completa no singular Y vale la igualdad*

$$g(Y) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega[Y]$$

donde $\Omega[Y]$ es el espacio vectorial de las 1-formas diferenciales holomorfas en Y.

b) Sea $X = \bar{C}(F)$ una curva proyectiva plana como en la Definición 5.1 y sea $\tilde{X} \to X$ la desingularización de X. Entonces

$$g(\tilde{X}) = p_g(X)$$

En particular, si X es no-singular de grado d, su género topológico es

$$g(X) = p_g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Proof. Ver [6], [9]. □

Observación 5.6. *En el caso de una curva plana es posible explicitar la Proposición 5.5 del modo siguiente.*

Sea $f \in \mathbb{C}[x, y]$ (libre de cuadrados) y $C(f) \subset \mathbb{C}^2$ el conjunto de ceros de f. Denotemos $X = \bar{C}(F) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ la clausura proyectiva como en la Definición 3.1. Supongamos que X es no-singular. Para cada $g \in \mathbb{C}[x, y]$ consideremos la 1-forma diferencial meromorfa en X definida por

$$\omega_g = \frac{g\ dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

donde denotamos $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$. Afirmamos que ω_g es regular en el abierto afín $C(f)$. En efecto, en $C(f)$ vale que $f = 0$, por lo tanto, $df = 0$, o sea,

$$f_x dx + f_y dy = 0$$

y entonces

$$\omega_g = \frac{g\ dx}{f_y} = -\frac{g\ dy}{f_x}$$

Como f, f_x, f_y no tienen ceros comunes, resulta lo afirmado.

Por otra parte, sean $\{p_1, \ldots, p_N\} = X \cap \bar{C}(x_0)$ los puntos de X en el infinito. Afirmamos también lo siguiente:

Si g tiene grado $\leq d-3$ entonces ω_g es regular en cada $p_i, i = 1, \ldots, N$.

Dejamos la verificación a cargo del lector.

Hemos construido entonces una aplicación lineal

$$\omega : \mathbb{C}[x, y]_{\leq d-3} \to \Omega[X]$$

tal que $g \mapsto \omega_g$. Es claro que ω es inyectiva. Además, tenemos

$$\dim \mathbb{C}[x, y]_{\leq d-3} = (d-1)(d-2)/2 = \dim \Omega[X]$$

(la primera igualdad es elemental y la segunda resulta de la Proposición 5.5). Por lo tanto, ω es un isomorfismo y toda 1-forma regular en X se escribe como ω_g para un único $g \in \mathbb{C}[x, y]_{\leq d-3}$.

Observación 5.7. *Si $X = \bar{C}(F)$ es singular irreducible entonces la misma contrucción, con g satisfaciendo las* condiciones de adjunción*, produce todas las* 1-*formas diferenciales regulares en la desingularización $\tilde{X}$; ver* [1]*, Appendix A.*

5.2. **Formas diferenciales en una curva de género g.** Sea Y una curva algebraica completa conexa no-singular, definida sobre los números complejos, de género $g(Y) = g$. Utilizaremos la siguiente notación:

$\mathbb{C}(Y)$, conjunto de funciones racionales en Y. Es un cuerpo, extensión de $\mathbb{C}$ con grado de trascendencia igual a uno.

$\Omega(Y)$, conjunto de 1-formas diferenciales meromorfas en Y. Es un espacio vectorial de dimensión uno sobre $\mathbb{C}(Y)$.

$I = I(Y) = \Omega[Y]$, conjunto de 1-formas diferenciales regulares en Y, también denominadas *formas diferenciales de primera especie*. Es un espacio vectorial de dimensión g sobre $\mathbb{C}$.

$II = II(Y) = \{\omega \in \Omega(Y)/\mathrm{res}_p(\omega) = 0,\ \forall p \in X\}$, donde res_p denota el residuo en el punto p. Si $\omega \in II$, decimos que ω es una *forma diferencial meromorfa de segunda especie*.

$III = III(Y) = \{\omega \in \Omega(Y)/\mathrm{ord}_p(\omega) \geq -1,\ \forall p \in X\}$, donde ord_p denota el orden de cero en el punto p. La condición significa entonces que el desarrollo de Laurent en todo punto es de tipo rdz/z con $r \in \mathbb{C}$. Si $\omega \in III$, decimos que ω es una *forma diferencial meromorfa de tercera especie*.

$d : \mathbb{C}(Y) \to \Omega(Y)$, el operador $\mathbb{C}$-lineal derivada exterior. Si $\omega \in \Omega(Y)$ es tal que $\omega = df$ para alguna $f \in \mathbb{C}(Y)$ entonces decimos que ω es una forma diferencial meromorfa exacta. Denotaremos $d\,\mathbb{C}(Y) \subset \Omega(Y)$ la imagen de d.

Para $f \in \mathbb{C}(Y)$ denotamos (f) el divisor de ceros y polos de f. Es un divisor en Y de grado cero.

Para $\omega \in \Omega(Y)$ denotamos (ω) el divisor de ceros y polos de ω. Es un divisor en Y de grado $2g-2$ (esto es parte del teorema de Riemann-Roch; ver p. ej. [1], [6]).

Observación 5.8. *En estos términos, se puede formular el problema de la integración diciendo que se trata de entender el espacio cociente*

$$\Omega(Y)/d\,\mathbb{C}(Y)$$

de todas las formas diferenciales meromorfas, módulo las formas exactas.

Como primer paso en esa dirección, tenemos la siguiente Proposición:

Proposición 5.9. *Con la notación anterior, valen las siguientes relaciones:*
a) $II \cap III = I$
b) $d\,\mathbb{C}(Y) \subset II$
c) $d\,\mathbb{C}(Y) \cap I = 0$
d) $d\,\mathbb{C}(Y) \cap III = 0$

Proof. Ejercicio para el lector. □

Proposición 5.10. *Dados puntos distintos* $p_1, \dots, p_n \in Y$ *y números complejos* $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}$ *tales que* $\sum_i r_i = 0$ *existe una* $\omega \in III$ *tal que*
ω *es regular en* $Y - \{p_1, \dots, p_n\}$ *y*
$\mathrm{res}_{p_i}(\omega) = r_i$ *para todo* $i = 1, \dots, n$.

Proof. Dados puntos distintos $p, q \in Y$ existe $\omega \in \Omega(Y)$ regular en $Y - \{p, q\}$ y tal que $\mathrm{res}_p(\omega) = 1$ y $\mathrm{res}_q(\omega) = -1$. Para ver esto, tenemos por Riemann-Roch: $h^0(K_Y(p+q)) = 2g - 2 + 2 + 1 - g = g + 1$ y por el teorema de los residuos toda $\eta \in H^0(K_Y(p+q))$ satisface $\mathrm{res}_p(\eta) + \mathrm{res}_q(\eta) = 0$. Eligiendo una $\eta \in H^0(K_Y(p+q)) - H^0(K_Y)$ y tomando $\omega = \eta/\mathrm{res}_p(\eta)$ se satisface lo deseado.

Ahora elijamos un punto auxiliar $q \in Y - \{p_1, \dots, p_n\}$ y sea $\omega_i \in III$ regular en $Y - \{p_i, q\}$ y tal que $\mathrm{res}_{p_i}(\omega_i) = r_i$ y $\mathrm{res}_q(\omega_i) = -r_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i$ responde a la cuestión. □

Proposición 5.11. $\Omega(Y) = II + III$

Proof. Sea $\eta \in \Omega(Y)$. Como el número de polos de η es finito, por la Proposición 5.10 existe $\omega \in III$ tal que $\mathrm{res}_p(\omega) = \mathrm{res}_p(\eta)$ para todo $p \in Y$. Entonces $\eta - \omega \in II$ y por lo tanto la descomposición $\eta = (\eta - \omega) + \omega$ satisface lo requerido. □

Proposición 5.12.

$$\Omega(Y)/d\,\mathbb{C}(Y) = II/d\,\mathbb{C}(Y) + III$$
$$\Omega(Y)/(d\,\mathbb{C}(Y) + I) = II/(d\,\mathbb{C}(Y) + I) \oplus III/I$$

Proof. Resulta facilmente de las Proposiciones anteriores. □

Según la Observación 5.8 nos proponemos entender el espacio cociente $\Omega(Y)/d\,\mathbb{C}(Y)$. La Proposición 5.12 nos da una descomposición de este espacio en dos sumandos $II/d\,\mathbb{C}(Y)$ y III cuya intersección es el subespacio g-dimensional I. Nos proponemos entonces entender mejor cada uno de estos dos sumandos.

Comencemos con las diferenciales de segunda especie. Elijamos g puntos distintos $q_1, \dots, q_g \in Y$ en posición suficientemente general (ver la Demostración de la Proposición 5.13 para mayor precisión sobre esta hipótesis de posición general). Elijamos $\mu_i \in II$, regular en $Y - \{q_i\}$ y con un polo de orden dos en q_i, para

$i = 1, \ldots, g$. Tal μ_i existe ya que, por Riemann-Roch, se tiene $h^0(K_Y(2q_i)) = 2g-2+2+1-g = g+1$ y cualquier elemento de $\mathrm{H}^0(K_Y(2q_i)) - \mathrm{H}^0(K_Y)$ satisface lo requerido (notar que, por el teorema de los residuos, un elemento de $\mathrm{H}^0(K_Y(2q_i))$ no puede tener un polo de orden uno en q_i).

Proposición 5.13. *La aplicación natural*

$$\pi : I \oplus \bigoplus_{i=1}^{g} \mathbb{C}.\mu_i \to II/d\ \mathbb{C}(Y)$$

es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. O sea, las clases de $\mu_1, \ldots, \mu_g$ constituyen una base de $II/(d\ \mathbb{C}(Y) + I)$. En particular,

$$\dim_{\mathbb{C}}(II/d\ \mathbb{C}(Y)) = 2g, \quad \dim_{\mathbb{C}}(II/(d\ \mathbb{C}(Y) + I)) = g$$

Proof. π es inyectiva: un elemento en el núcleo de π da origen a una forma diferencial $\omega \in I + \sum_{i=1}^{g} \mathbb{C}.\mu_i$ tal que $\omega = df$ es exacta. Bastaría con ver que $\omega = 0$. Supongamos entonces que $\omega \neq 0$ y sea $(\omega)_\infty$ su divisor de polos. Entonces $(\omega)_\infty \leq 2\sum_{i=1}^{g} q_i$ y por lo tanto el divisor de polos de f satisface $(f)_\infty \leq \sum_{i=1}^{g} q_i$ y entonces f es un elemento no-constante del espacio vectorial $\mathrm{H}^0(Y, O_Y(D)) = \{g \in \mathbb{C}(Y)/(g) + D \geq 0\}$ con $D = \sum_{i=1}^{g} q_i$. Por lo tanto, la dimensión $h^0(Y, O_Y(D))$ de este espacio es al menos dos. Pero *si $q_1, \ldots, q_g$ están en posición general*, como estamos suponiendo, entonces $h^0(Y, O_Y(D)) = 1$ (ver [1], [6]). Por lo tanto, $\omega = 0$, como queríamos demostrar.

Consideremos la aplicación lineal

$$\imath : II/d\ \mathbb{C}(Y) \to \mathrm{H}_1(Y, \mathbb{C})^*$$

tal que $\imath(\omega)(\gamma) = \int_\gamma \omega$ para $\gamma \in \mathrm{H}_1(Y, \mathbb{C})$ (para una forma de segunda especie la integral está bien definida y es nula para formas exactas). Observemos que $\imath$ es inyectiva, ya que si $\imath(\omega) = 0$ entonces la función $f(p) = \int_{p_0}^{p} \omega$ está bien definida (la integral no depende del camino) y $\omega = df$ es exacta. En consecuencia, $\dim_{\mathbb{C}}(II/d\ \mathbb{C}(Y)) \leq \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{H}_1(Y, \mathbb{C})) = 2g$.

Como $\dim_{\mathbb{C}}(I \oplus \bigoplus_{i=1}^{g} \mathbb{C}.\mu_i) = 2g$ y π es inyectiva, resulta que π es un isomorfismo, como queríamos demostrar. También resulta que $\imath$ es un isomorfismo. □

Observación 5.14. *Sea $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base de $I = \Omega[Y]$. Recordemos que en el caso en que Y es una curva plana no-singular hemos construído explícitamente una tal base en la Observación 5.6. Sean $\mu_1, \ldots, \mu_g$ diferenciales de segunda especie como en la Proposición 5.13. Entonces se puede decir heurísticamente que las integrales abelianas $\int \omega_i, \int \mu_j$ con $i, j = 1, \ldots, g$, constituyen $2g$ "funciones multiformes" independientes en Y y que toda integral abeliana de segunda especie en Y se expresa como combinación lineal de ellas, más una función racional en Y.*

Ahora enfoquemos nuestra atención en las diferenciales de tercera especie. A diferencia de las de primera y segunda especie (módulo diferenciales exactas), éstas forman un espacio vectorial de dimensión infinita: una diferencial de tercera especie está determinada (salvo la adición de una de primera especie) por la ubicación de sus polos y por el valor de sus residuos.

Para expresar esto convenientemente, consideremos divisores en Y con coeficientes complejos: sea $\mathrm{Div}_{\mathbb{C}}(Y)$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial con base los puntos de Y. Un elemento de $\mathrm{Div}_{\mathbb{C}}(Y)$ es una combinación lineal $\sum_{p \in Y} r_p.p$ con coeficientes $r_p \in \mathbb{C}$, nulos salvo un número finito. El grado de un tal divisor es la suma $\sum_{p\in Y} r_p \in \mathbb{C}$ de sus coeficientes. Denotamos $\mathrm{Div}_{\mathbb{C}}(Y)_0$ el conjunto de divisores de grado cero.

Tenemos entonces:

Proposición 5.15. *La aplicación*

$$\mathrm{res} : III/I \to \mathrm{Div}_{\mathbb{C}}(Y)_0$$

tal que $\mathrm{res}(\omega) = \sum_{p\in Y} \mathrm{res}_p(\omega).p$*, es un isomorfismo de* $\mathbb{C}$*-espacios vectoriales.*

Proof. Es consecuencia inmediata de la Proposición 5.10. □

Para más detalles sobre diferenciales de tercera especie referimos a la literatura sobre variedades Jacobianas.

6. Ejemplos de integrales sobre curvas espaciales.

Para finalizar daremos algunos otros ejemplos de integrales abelianas, sobre curvas proyectivas no-necesariamente planas, que se pueden analizar desde la perspectiva de la Sección 5.

Ejemplo 6.1. *Consideramos una integral de tipo*

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})dx$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *y* $R \in \mathbb{C}(x, y, z)$ *una función racional de tres variables.*

La integral corresponde a la forma diferencial $\omega = R(x, y, z)dx$ sobre la curva en $\mathbb{C}^3$ intersección de las dos cuádricas

$$y^2 = ax + b, \quad z^2 = cx + d$$

Se puede ver que la curva proyectiva correspondiente es singular y que es una curva racional, de modo que la integral se reduce a fracciones simples. O bien, observar que eliminando x resulta $c(y^2 - b) = a(z^2 - d)$ de modo que la curva es equivalente a una cónica en el plano y, z y por lo tanto es racional.

Ejemplo 6.2. *Sea la integral*

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}, \sqrt{ex+f})dx$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$ *y* $R \in \mathbb{C}(x, y, z, w)$

Procedemos similarmente, interpretando la integral como correspondiente a la forma diferencial $\omega = R(x, y, z, w)dx$ sobre la (clausura proyectiva de la) curva intersección de las tres cuádricas

$$y^2 = ax + b,\ z^2 = cx + d,\ w^2 = ex + f$$

Proponemos como ejercicio investigar cuál es el género de esta curva y cómo se escriben las diferenciales básicas de primera y segunda especie.

Otros ejemplos análogos, para los cuales se propone realizar un análisis similar:

Ejemplo 6.3. $\int R(x, \sqrt[n]{ax^2 + bx + c})dx$

Ejemplo 6.4. $\int R(x, \sqrt[n]{ax + b}, \sqrt[m]{cx + d})dx$

Ejemplo 6.5. $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}, \sqrt{dx^2 + ex + f})dx$

References

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, J. Harris and P. Griffiths, *Geometry of algebraic curves, vol. I.* Springer-Verlag, 1985.
[2] H. Cartan, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables.* Hermann, Paris, 1963.
[3] H. Clemens, *A Scrapbook of complex curve theory.* American Mathematical Society, 2003.
[4] W. Fulton, *Algebraic curves.* Addison-Wesley, 1989.
[5] E. Goursat, *Cours d'analyse mathematique (2 vols.).* Gauthier-Villars, 1902.
[6] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry.* Wiley-Interscience, 1978.
[7] C. Jordan, *Cours d'analyse (3 vols.).* Gauthier-Villars, 1913.
[8] S. Lang, *Introduction to algebraic and abelian functions.* Springer-Verlag, 1982.
[9] D. Mumford, *Complex projective varieties.* Springer-Verlag.
[10] D. Mumford, *Curves and their jacobians.* Springer-Verlag.
[11] E. Picard, *Traite d'analyse (3 vols.).* Gauthier-Villars, 1891.
[12] V. Prasolov and Y. Solovyev, *Elliptic functions and elliptic integrals.* American Mathematical Society, 1997.
[13] J. Rey Pastor, P. Pi Calleja y C. Trejo, *Analisis matemático (3 vols.).* Ed. Kapelusz, 1951.
[14] J. P. Serre, *Algebraic groups and class fields.* Springer-Verlag, 1988.
[15] I. Shafarevich, *Basic algebraic geometry, 2 vols. (Historical sketch).* Springer-Verlag, 1994.
[16] C. L. Siegel, *Topics in complex function theory (3 vols.).* Wiley-Interscience, 1988.
[17] R. Walker, *Algebraic curves.* Springer-Verlag, 1978.

Universidad de Buenos Aires - CONICET
Departamento de Matemática, FCEN
Ciudad Universitaria, Pabellón 1
(1428) Ciudad de Buenos Aires
ARGENTINA

fcukier@dm.uba.ar