III COMPETENCIA MATEMATICA ERNESTO PAENZA

28 de agosto de 1988

SOLUCIONES

Las soluciones que se encuentran a continuación fueron elegidas por el Comité Organizador entre las respuestas de los participantes. *Son aquellas que más nos gustaron*, además de ser correctas.

Los vectores luego del número del problema indican:

- ⋆ *la primera coordenada*: el número de participantes que obtuvieron 8, 9 ó 10 puntos en el problema (problema esencialmente resuelto).
- ⋆ *la segunda coordenada*: el número de participantes que obtuvieron 5, 6 ó 7 puntos (esencialmente "la mitad o un poco más" del problema).
- ⋆ *la tercera coordenada*: el número de participantes que obtuvieron 1, 2, 3 ó 4 puntos (casos particulares, o algo conducente a una posible solución).

Problema 1. (5,1,4,90)

Solución de Horacio Casini, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura-Universidad Nacional de Rosario

Sea C= suma de dígitos de B. Si $10^k \equiv 1$ mod(9), se tiene $a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_0 10^0 \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$ mod(9). Entonces tenemos $4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C$ mod(9). Pero $4444 \equiv 7$ mod(9), con lo cual $4444^{4444} \equiv 7^{4444}$ mod(9). Además, $7^3 = 343 \equiv 1$ mod(9); por lo tanto, $7^{4444} \equiv 7^{4443}.7 \equiv 1.7 \equiv 7$ mod(9). Por lo tanto, $C \equiv 7$ mod(9).

Por otro lado, $4444^{4444} < 10^{4\times 4444}$; luego, una cota superior para A es $9 \times 4 \times 4444 \leqslant 10^6$; luego, una cota superior para B es $9 \times 6 = 54$ y por último una cota superior para C es $5 + 9 = 14$. Pero entonces, $C \equiv 7$ mod(9) y $C \leqslant 14$, de donde $C = 7$.

Problema 2. (15,4,2,79)

Solución de Fabiana Krongold, F.C.E. y N. - Universidad de Buenos Aires

Es claro que mediante este procedimiento, la cantidad de bolillas blancas que quedan en la caja después de cada operación es par, si había una cantidad par de bolillas blancas e impar, si había una cantidad impar de bolillas blancas. Como en cada extracción disminuye en 1 el número de bolillas en la caja, finalmente habrá una única bolilla en la caja. Como en este momento el número de bolillas blancas tiene que tener la misma paridad que p, es claro que esta bolilla será blanca si y sólo si p es impar. Luego, la probabilidad buscada es 1 si p es impar y 0 si p es par.

Problema 3. (0,0,2,98)

Solución del Comité Organizador

Por hipótesis, $p^2 < 2q^2$ y $p^2, 2q^2 \in \mathbb{N}$, luego $p^2 \leqslant 2q^2 - 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{q}+\frac{1}{4p^2}\right)^2 &= \frac{p^2}{q^2}+\frac{1}{2qp}+\frac{1}{16p^4}\\ &\leqslant \frac{2q^2-1}{q^2}+\frac{1}{2qp}+\frac{1}{16p^4}\\ &= 2-\frac{1}{q^2}+\frac{1}{2qp}+\frac{1}{16p^4}\end{aligned}$$

Basta ver entonces que $-\frac{1}{q^2}+\frac{1}{2qp}+\frac{1}{16p^4} < 0$. Pero $q < p$; luego,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{q^2}+\frac{1}{2qp}+\frac{1}{16p^4} &< -\frac{1}{q^2}+\frac{1}{2q^2}+\frac{1}{16p^4}\\ &= -\frac{1}{2q^2}+\frac{1}{16p^4}\\ &= \frac{1}{2q^2}\left(-1+\frac{1}{8q^2}\right) < 0\end{aligned}$$

Problema 4. (13,3,2,82)

Si bien hay varias soluciones correctas, todas ellas son demasiado largas.

Solución del Comité Organizador

Sea $x \in \mathbb{Z}$ cualquiera:

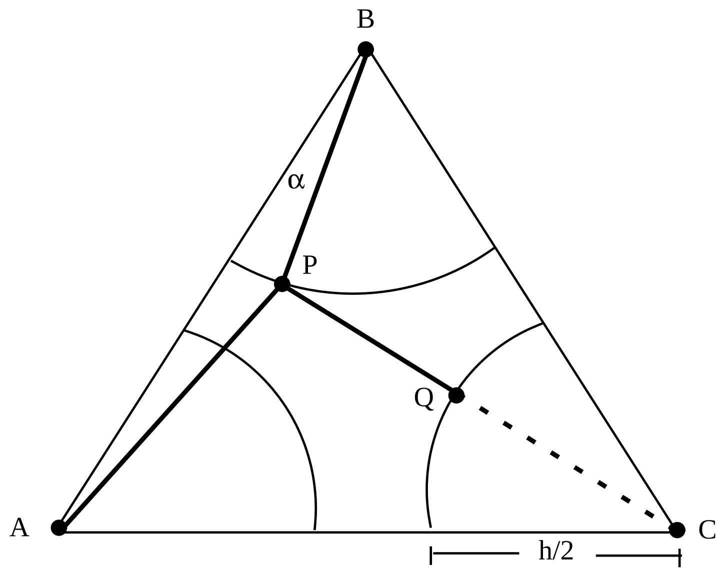
1. $x^2 \equiv 0, 1, 4, 5, 6$ ó $9 \bmod(10)$
2. Si $x^2 \equiv 11, 55$ ó $99 \bmod(100)$ entonces $x^2 \equiv 3 \bmod(4)$, hecho que no puede suceder.
3. Si $x^2 \equiv 66 \bmod(100)$, entonces $x^2 \equiv 2 \bmod(4)$ lo que es imposible también.
4. Luego, la única alternativa es que $x^2 \equiv 44 \bmod (100)$.
5. Si $x^2 \equiv 4444 \bmod(1000)$, entonces $x^2 \equiv 12 \bmod(16)$, imposible.

   De manera que cuatro números consecutivos no pueden darse. Queda preguntarse si para algún x, $x^2 \equiv 444 \bmod(1000)$. Esto sucede para $x = 38$, $x^2 = 1444$, que es la respuesta.

Problema 5. (6,13,6,75)

Muchos participantes dieron la trayectoria correcta

Sea $h =$ altura. El soldado deberá pasar por lo menos por un punto de cada uno de los tres arcos con centro en los vértices y radio $\frac{h}{2}$. Si parte de A y se dirige a B, tocará el arco con centro en B en un punto P. Luego se dirige hacia C hasta detenerse en un punto Q sobre el arco con centro en C.



<u>La trayectoria es mínima</u>:

(*Demostración de varios participantes*)

Por el principio de Femat, la trayectoria en mínima si forma ángulos iguales con respecto a la normal en el punto P al arco con centro en B. Ello sucede si P es el punto medio (ángulo $\alpha = 30^0$).

(Demostración del Comité Organizador)

Damos una solución puramente matemática. Minimizar el recorrido APQ es equivalente a minimizar APC pues la distancia del arco a C es constante. Consideremos la elipse con focos en A y C que pasa por P. Resulta tangente al arco con centro en B precisamente cuando P es el punto medio (ángulo $\alpha = 30^0$). Todo otro punto del arco queda fuera de la elipse, determinando por lo tanto una trayectoria mayor.

<u>El soldado cubre todo el triángulo</u>:

(*Demostración de Eduardo A. Jagla, F.C.E. y N. - Universidad de Buenos Aires*)

Todo punto a la izquierda de Q está a distancia menor que $\frac{h}{2}$ de algún punto del camino (aquel que está en la misma vertical). Claramente, el círculo con centro en Q y radio $\frac{h}{2}$ cubre todos los puntos que quedan a la derecha de Q.

Problema 6. (0,0,4,96)

Solución del Comité Organizador

Como $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$, tenemos por ejemplo, $a_{2k} \leqslant 2a_k$ y así, inductivamente, $a_{nk} \leqslant na_k$. Si $A = a_1$, se tiene $0 \leqslant \dfrac{a_n}{n} \leqslant A$. Luego, la sucesión $\dfrac{a_n}{n}$ es acotada. Sea b su límite inferior. Vamos a probar que b es, de hecho, el límite. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos k tal que $b + \varepsilon - \dfrac{a_k}{k} > 0$. Si $qk + r$, $1 \leqslant r \leqslant k$, se tiene:

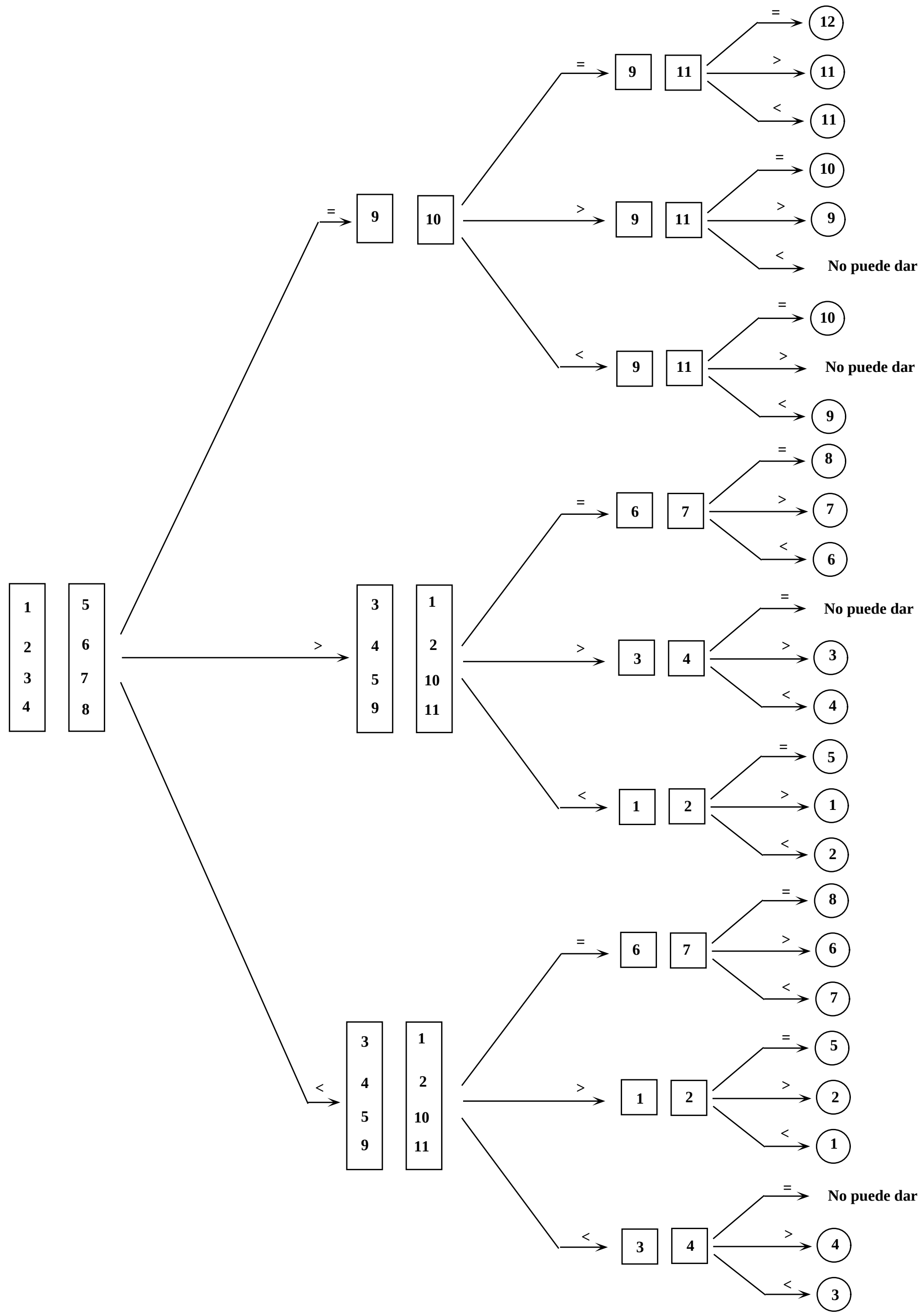
$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{qk+r}}{n} \leqslant \frac{qa_k}{n} + \frac{a_r}{n} \leqslant \frac{a_k}{k} + \frac{a_r}{n} \leqslant \frac{a_k}{k} + \frac{B}{n}$$

donde $B =$ máximo$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$. Como $(b + \varepsilon - \dfrac{a_k}{k}) > 0$, se tiene que para n suficientemente grande, $\dfrac{a_n}{n} < \dfrac{a_k}{k} + (b + \varepsilon - \dfrac{a_k}{k}) = b + \varepsilon$. Por otro lado, por definción de b, $\dfrac{a_n}{n} > b - \varepsilon$.

Problema 7. (2,2,4)

Solución de Ariel Carp, Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires

Se numeran las bolillas de 1 a 12 y se relizan las pesadas según el siguiente esquema:



Problema 8. (0,2,6,92)
Solución del Comité Organizador

Las raíces están acotadas superiormente: Sea α tal que

$$a(x) > 0 \qquad \text{si} \qquad x \geqslant \alpha$$

Veamos que f no tiene más que un cero en el intervalo $[\alpha, +\infty)$. Supongamos que $f(x_1) = f(x_2) = 0$, con $\alpha \leqslant x_1 < x_2$. Luego, como f no es idénticamente cero en $[x_1, x_2]$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que alcanza su máximo en $x_3 \in (x_1, x_2)$. Luego, $f(x_3) > 0$, $f'(x_3) = 0$ y $f''(x_3) \leqslant 0$, pero esto es absurdo ya que f y f'' tienen el mismo signo en $[\alpha, +\infty)$.

Las raíces no están acotadas inferiormente: Sea β tal que $a(x) < -1$ para todo $x \leqslant \beta$. Veamos que para todo $x_0 \leqslant \beta$, f tiene una raíz en $(-\infty, x_0]$. Supongamos que no. Luego, f tiene signo constante en $(-\infty, x_0]$ para algún x_0. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que f es positiva en ese intervalo.

Sea $x_1 \leqslant x_0$, cualquiera. Tenemos que

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) + \frac{1}{2}(x - x_1)^2 f''(\xi)$$

con ξ entre x y x_1.

Luego, si $x \leqslant x_0$, tenemos $\xi < x_0$ y $h''(\xi) < -h(\xi) < 0$ y luego

$$f(x) < f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1)$$

Si pudiéramos elegir x_1 tal que $f'(x_1) > 0$, esto mostraría que $f(x) < 0$ para algún x suficientemente grande negativo, contrariamente a lo que habíamos supuesto. Luego, supongamos que $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \leqslant x_0$. Pero esto implica $f(x) \geqslant f(x_0)$ para todo $x \leqslant x_0$; luego,

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) + \frac{1}{2}(x - x_1)^2 f''(\xi)$$

luego,

$$f(x) < f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) - \frac{1}{2}(x - x_1)^2 f''(x_0) \qquad (*)$$

(ya que $f''(\xi) = a(\xi)f(\xi) < -f(x_0)$) y $(*)$ muestra que $f(x)$ es negativa para valores negativos de x suficientemente grandes, lo que nuevamente da una contradicción.

Composición tipográfica: $\LaTeX\,2_\varepsilon$ (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)