I COMPETENCIA MATEMATICA ERNESTO PAENZA

28 de agosto de 1986

SOLUCIONES

Las soluciones que se encuentran a continuación fueron elegidas por el Comité Organizador entre las respuestas de los participantes. *Son aquellas que más nos gustaron*, además de ser correctas.

Los vectores luego del número del problema indican:

⋆ *la primera coordenada*: el número de participantes que obtuvieron 8, 9 ó 10 puntos en el problema (problema esencialmente resuelto).

⋆ *la segunda coordenada*: el número de participantes que obtuvieron 5, 6 ó 7 puntos (esencialmente "la mitad o un poco más" del problema).

⋆ *la tercera coordenada*: el número de participantes que obtuvieron 1, 2, 3 ó 4 puntos (casos particulares, o algo conducente a una posible solución).

Problema 1. (12,0,3)

Solución de Fabiana Krongold, F.C.E. y N. - Universidad de Buenos Aires

Sea c_1 = cantidad de vueltas del primer auto, c_2 = cantidad de vueltas del segundo auto, $c_1 = [t]$, $c_2 = [t-T]$. Se plantea la ecuación $[t] = 2[t-T]$.

Supongamos T entero. Queda $[t] = 2([t]-T) \iff [t] = 2T \iff 2T \leqslant t < 2T+1$. Luego, $c_1 = 2c_2$ durante la hora que va de $2T$ a $2T+1$.

Supongamos T no entero. $T = [T] + m(T)$, $m(T) \in (0,1)$ y $t = [t] + m(t)$, $m(t) \in [0,1)$. Queda $[t] = 2[[t] - [T] + m(t) - m(T)]$, donde $[t] - [T]$ es un entero positivo.

(1) Si $0 \leqslant m(t) - m(T) < 1$, se tiene $[t] = 2([t] - [T]) \iff [t] = 2[T]$. O sea, $2[T] + m(T) \leqslant t < 2[T] + 1$. Luego, $c_1 = 2c_2$ durante el tiempo igual a $1 - m(T)$.

(2) Si $0 > m(t) - m(T) > -1$, se tiene $[t] = 2([t] - [T] - 1) \iff [t] = 2[T] + 2$. O sea, $2[T] + 2 \leqslant t < 2[T] + 2 + m(T)$. Luego, $c_1 = 2c_2$ durante un tiempo igual a $m(T)$.

De (1) y (2) se sigue que $c_1 = 2c_2$ durante 1 hora.

Problema 2. (0,5,6)

Solución del Comité Organizador

Como $(k+1)P(k) - k = 0$ para todo $0 \leqslant k \leqslant n$, el polinomio de grado $n+1$ $Q(x) = (x+1)P(x)-x$ tiene las $(n+1)$ raíces $0, \ldots, n$. Luego, $Q(x) = (x+1)P(x)-x = cx(x-1)\ldots(x-n)$. Para calcular c, evaluemos Q en $x = -1$. Resulta,

$$Q(-1) = 1 = c(-1)(-2)\ldots(-(n+1)) = c(-1)^n(n+1)!$$

luego,

$$c = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{y} \qquad P(x) = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)\dots(x-n)+x}{x+1}$$

Entonces,

$$P(n+1) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)n\dots 1 + (n+1)!(n+1)}{(n+1)!(n+2)} = \frac{(-1)^{n+1}+n+1}{n+2}$$

o sea,

$$P(n+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{n+2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Problema 3. (1,2,19)

Solución de Eduardo Grondona, F.C.E. y N. - Universidad de Buenos Aires

a) $(x+y)^n(x^2-(2-\varepsilon)xy+y^2) = x^{n+2}+y^{n+2}+\sum_{k=0}^{n} x^{n+1-k}y^{k+1}\left(\binom{n+2}{k+1}-(4-\varepsilon)\binom{n}{k}\right).$

Ahora, para $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\left(\binom{n+2}{k+1}-(4-\varepsilon)\binom{n}{k}\right) > 0 \iff \frac{(n+2)(n+1)}{(n+1-k)(k+1)} > 4-\varepsilon \qquad (*)$$

La última desigualdad basta considerarla para los valores de k que maximicen la parábola $\phi(k) = (n+1-k)(k+1)$. Si k es pensado como una variable continua se obtiene fácilmente (derivando) que:

1) Si n es par, $\phi(\frac{n}{2}) \geqslant \phi(k)$, $k = 0, \dots, n$
2) Si n es impar, $\phi(\frac{n-1}{2}) = \phi(\frac{n+1}{2}) \geqslant \phi(k)$, $k = 0, \dots, n$

Luego, la desigualdad $(*)$ se satisface si y sólo si:

$$n > \frac{4}{\varepsilon} - 2 \quad \text{si } n \text{ es par} \qquad , \qquad n > \frac{4}{\varepsilon} - 3 \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

lo que prueba la parte a).

b) Si $\varepsilon = 0.002$, $n > \frac{4}{\varepsilon} - 2 = 1998$ si n es par, o $n > \frac{4}{\varepsilon} - 3 = 1997$ si n es impar.

Luego, $n = 1999$ es el valor pedido.

Problema 4. (5,2,1)

a) Para $n = 6$ existe coloración sin rectángulos con los 4 vértices del mismo color. (*Solución de Paula Alonso, F.C.E. y N. - Universidad de Buenos Aires*).

Para formar un rectángulo debo repetir en 2 columnas distintas 2 posiciones de igual coloración. Ahora, para ubicar 2 casilleros negros y 2 casilleros blancos en los 4 lugares de una columna tengo 6 posibilidades. Formo así 6 columnas distintas que no forman ningún rectángulo.

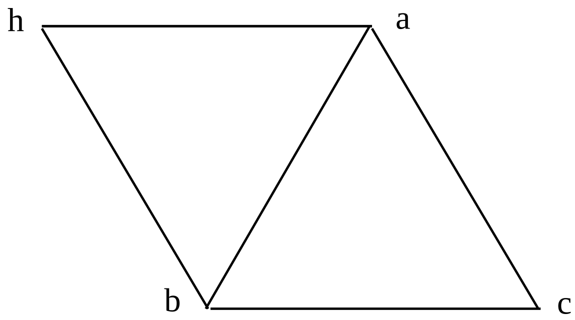
b) Para $n = 7$ siempre existe por lo menos 1 rectángulo con los 4 vértices del mismo color. (*Solución de Daniel Fridlender, I.M.A.F. - Universidad Nacional de Córdoba*).

Claramente puedo cambiar las columnas entre sí pues ello ni agrega ni quita rectángulos. Como son 7 columnas, en cada fila hay por lo menos 4 casilleros del mismo color. Supongamos que los 4 últimos casilleros de la primera fila son blancos. Veremos que en las 4 últimas columnas hay un rectángulo. En efecto, para que no haya un rectángulo blanco, la segunda y tercera fila deben tener por lo menos 3 casilleros negros, en cuyo caso hay un rectágulo negro.

Problema 5. (12,0,0)

Solución de Fabiana Krongold, F.C.E. y N. - Universidad de Buenos Aires

Es posible. Consideremos dos triángulos equiláteros de lado 1.



Sea $p_n = a$ si n es par y $p_n = b$ si n es impar.
Es claro que $d(p_n, p_{n+1}) = \max\{d(p_n, p)\} = 1$. Por otro lado,

$$\text{DIAMETRO} = d(h,c) = 2\text{ALTURA} = 2\sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3} > 1$$

Problema 6. (1,0,1)

Solución de Luis R. Cobacho, F.C.E. y N. - Universidad Nacional de Catamarca

Efectuando el cambio de variable $x = e^y$, definimos una nueva sucesión de funciones

$$g_n(y) = f_n(e^y)$$

Las condiciones dadas se convierten en:

$$\begin{cases} g_0(y) = f_0(e^y) = e^{e^y} \\ g_{n+1}(y) = f_{n+1}(e^y) = e^y.f_n'(e^y) = g_n'(y) \end{cases}$$

Luego, $g_n(y) = g_{n-1}'(y) = g_{n-2}''(y) = \cdots = g_0^{(n)}(y)$. Por lo tanto tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(1)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(e^0)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n(0)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n(0)}{n!} 1^n = g_0(1) = e^{e^1} = e^e$$

Problema 7. (1,1,0)

Solución de Luis R. Cobacho, F.C.E. y N. - Universidad Nacional de Catamarca

Sea $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^r}$. Consideremos el cambio de variable $y = \frac{\pi}{2} - x$. Entonces,

$$I = \int_{\pi/2}^{0} \frac{-dy}{1+(\operatorname{cotg} y)^r} = \int_0^{\pi/2} \frac{(\operatorname{tg} y)^r}{(\operatorname{tg} y)^r + 1}\, dy = \int_0^{\pi/2} \frac{(\operatorname{tg} x)^r}{1+(\operatorname{tg} x)^r}\, dx$$

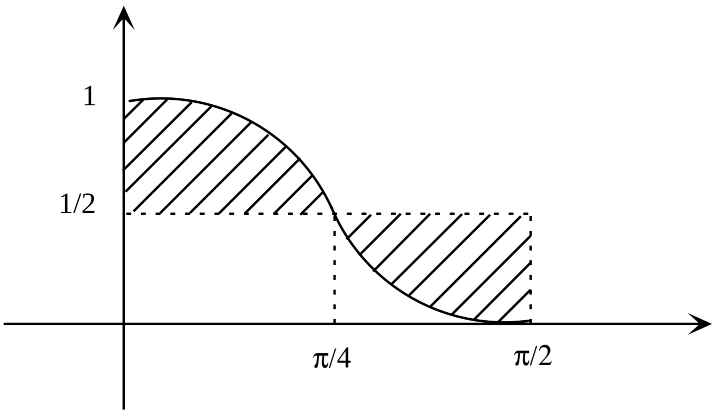
Luego,

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{1+(\operatorname{tg} x)^r}{1+(\operatorname{tg} x)^r}\, dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

De donde, $I = \dfrac{\pi}{4}$.

Otra solución interesante, parcialmente lograda por *Magdial D. Henriquez, D.C.E. - Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca* es la siguiente:

Consideremos el gráfica aproximado de $f(x) = \dfrac{1}{1+(\operatorname{tg} x)^r}$



vemos que las áreas rayadas se compensan, de donde se sigue que el valor de la integral es igual al área del rectángulo $\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$. Esta idea se convierte en una demostración rigurosa constatando la igualdad

$$f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{2} - f\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

lo que se hace fácilmente.

Problema 8. (6,0,4)

Solución de Fabiana Krongold, F.C.E. y N. - Universidad de Buenos Aires

Por inducción en el número de cuidades.

a) Si $n = 2$ es trivial

b) Supongamos que vale para n. Consideremos $(n+1)$ ciudades. Sabemos que existe un camino que une las ciudades 1 a n (podemos suponer sin pérdida de generalidad que el camino une las ciudades en ese orden)

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n \qquad (*)$$

Si existe una ruta de $(n+1)$ en 1, consideramos

$$(n+1) \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n$$

y listo.

En su defecto, existe una ruta de $1 \longrightarrow (n+1)$. Si todas las rutas entran a $(n+1)$, fabricamos el camino

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n \longrightarrow (n+1)$$

Luego, sólo resta analizar el caso

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[drr] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n \\ & & (n+1) \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

Consideremos en el orden de $(*)$ la primera ruta que salga de $(n+1)$ y llamemos k a dicha ciudad $(k>1)$. Entonces, la ruta entre $(k-1)$ y $(n+1)$ entra a $(n+1)$; luego, se tiene el siguiente camino entre las $n+1$ ciudades

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (k-1) \arrow[dr] & & k \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n \\ & & & & (n+1) \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)