III COMPETENCIA MATEMATICA ERNESTO PAENZA

28 de agosto de 1988

EJERCICIOS

Problema 1.

Cuando el número 4444^{4444} es escrito en notación decimal, la suma de sus dígitos es A. Llamemos B a la suma de los dígitos de A. Encuentre la suma de los dígitos de B.

Problema 2.

Una caja contiene p bolillas blancas y q negras. Al lado de dicha caja hay una pila con, por lo menos, $(p+q)$ bolillas negras. Se eligen dos bolillas de la caja al azar y se efectúa el siguiente procedimiento:

a) si las dos bolillas son del mismo color quedan afuera de la caja, pero se incluye en ella una bolilla negra de la pila.

b) si las dos bolillas son de diferente color, se repone la blanca en la caja.

Se continúa hasta que se sacan las dos últimas y se coloca una en la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que ésta sea blanca?

Problema 3.

Se tienen dos números naturales $q > p$, tales que : $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 < 2$.

Pruebe entonces que

$$\left(\left(\frac{p}{q}\right) + \left(\frac{1}{4p^2}\right)\right)^2 < 2$$

Problema 4.

Encuentre la longitud de la sucesión más larga de dígitos iguales no nulos en la que termina el cuadrado de un número entero –escrito en base 10– y exhiba el menor cuadrado que termine en tal sucesión.

Problema 5.

Un soldado necesita verificar la presencia de minas explosivas en una región que tiene la forma de triángulo equilátero. El radio de acción de su detector es igual al a mitad de la altura del triángulo.

El soldado está parado en uno de los vértices del triángulo. ¿Qué camino debería seguir, si pretende recorrer la menor distancia posible pero llevando a cabo su misión?

Problema 6.

Se tiene una sucesión de números reales no negativos que satisfacen la siguiente propiedad

$$a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$$

Pruebe entonces que siempre existe el límite de la sucesión $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)$.

Problema 7.

Se tienen 12 monedas indistinguibles por su aspecto exterior, pero con la particularidad que 11 de ellas pesan igual y la restante no.

Se se dispone de una balanza con dos platillos, ¿cómo puede hacerse para determinar cuál es la moneda que pesa distinto en sólo tres pesadas?

Problema 8.

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable y $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que verifica:

$$\lim_{x\to+\infty} a(x) = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} a(x) = -\infty$$

Si se sabe que $f(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$f''(x) = a(x)f(x)$$

y las condiciones iniciales

$$\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{array}$$

pruebe que los ceros de $f(x)$ están acotados superiormente, pero *no* inferiormente.

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)